Sujets choisis

Gilles Aldon

13 octobre 2007

1 Sujet 001

1.1 Analyse

1.1.1 Solution experte 1

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 11$$

La différence de deux termes consécutifs étant affine, la différence seconde sera constante, comme on s'en persuade :

$$u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) = 2(n+1) - 11 - 2n + 11 = 2$$

On a donc une "accélération" constante et un mouvement du second degré : $u_n = an^2 + bn + c$
En calculant $u_1 = -11$ et $u_2 = -20$, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} c & = & 0 \\ a+b+c & = & -11 \\ 4a+2b+c & = & -20 \end{array} \right.$$

Soit $a = 1$, $b = -12$, et $c = 0$, et finalement $u_n = n^2 - 12n$
Une récurrence achève la démonstration :
En appelant v_n la suite définie par $v_n = n^2 - 12n$: $u_0 = v_0$
Hypothèse de récurrence : il existe n tel que $u_n = v_n$
$u_{n+1} = u_n + 2n - 11 = n^2 - 12n + 2n - 11 = (n+1)^2 - 12(n+1) = v_{n+1}$

1.1.2 Solution experte 2

On peut considérer la suite u_n comme la somme des suites v_n et w_n telles que $v_{n+1} - v_n = 2n$ avec $v_0 = 0$ et $w_{n+1} - w_n = -11$ avec $w_0 = 0$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2\frac{n(n-1}{2} = n(n-1)$$

$$w_n = -11n$$

Et par conséquent :

$$u_n = n^2 - 12n$$

Comme ci-dessus pour conclure.

1.2 Critiques de l'exercice

Les critiques concernant cet exercice d'évaluation speuvent être l'usage d'un tableur pour résoudre un cas particulier sans s'intéresser à la généralisation ; autrement dit, si un élève ne connait pas le résultat général, il ne l'apprend pas et s'il le connait, l'expérience sur tableur n'a pas de sens.

Cet exercice peut être transformé en TP avec comme objectif de montrer que lorsque la différence seconde est une constante, le phénomène sera un phénomène du second degré. Et que lorque la différence première est affine, la différence seconde est une constante. On pourra bien sûr faire le parrallèle avec le phénomène continue (dérvée seconde, dérivée). Autrement dit, en ouvrant cet exercice on propose une démonstration générale en utilisant les TICE pour le faire apparaître.

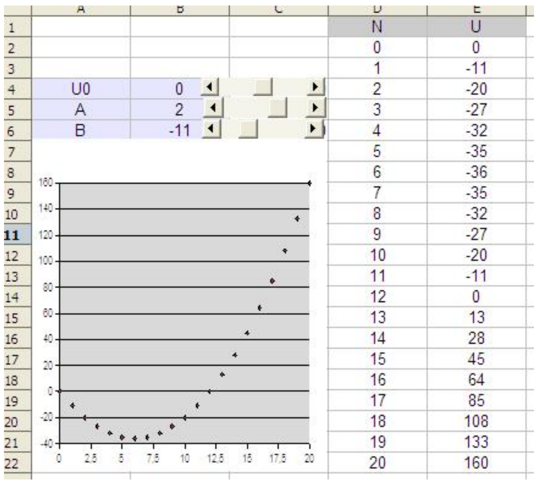
Etude des suites définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & & \\ u_n & = & u_{n-1} + an + b \end{array}\right.$$

Ici, on peut imaginer de demander aux élèves de particulariser avec des valeurs de u_0, a, b, différentes et d'en tirer une conjecture générale.

Sur une même feuille de tableur, calculer les 20 premiers termes de la suite définie avec $u_0 = 0$, $a = 1$, $b = 0$ puis $u_0 = 0$, $a = 2$, $b = 1$, puis $u_0 = 0$, $a = 2$, $b = -1$, puis...

Représenter graphiquement les nuages de points. Conjecture. Démonstration.



Les solutions expertes données plus haut sont généralisables (il peut d'ailleurs être intéressant de considérer une démonstration particulière comme archétype d'une démonstration générale)

$$u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) = a(n+1) + b - an - b = a$$

On pose $u_n = cn^2 + dn + e$; on a évidemment $c = u_0$, $u_1 = u_0 + b$ et $u_2 = u_0 + 2b + a$; d'où le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} c + d & = & u_0 + b \\ 4c + 2d & = & u_0 + 2b + a \end{array}\right.$$

$$\{c = -1/2\, u0 + 1/2\, a, d = 3/2\, u0 + b - 1/2\, a\}$$

On retrouve, au passage les solutions du cas particulier vu dans l'énoncé avec $u_0 = 0$, $a = 2$ et $b = -11$

1.3 Prolongement

En considérant des suites de k nombres, on peut étudier le procédé qui revient à calculer les différences successives jusqu'à trouver une contante, ce qui peut permettre de trouver le (les) termes suivants ; par exemple :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 \\
 & 1 & & 2 & & 4 & & 8 & \\
 & & 1 & & 2 & & 4 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & 31 \\
 & 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 15 & \\
 & & 1 & & 2 & & 4 & & 7 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 3 & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}
$$

Ce qui confirme bien que pour compléter la suite 1, 2, 4, 8 16, il faut écrire 31 ;-)

Sujet 25

1.4 Analyse

1.4.1 Solution experte

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k \\
&= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n+1}{2} \\
&= \frac{n^2-1}{3}
\end{aligned}
$$

1.5 Critiques de l'exercice

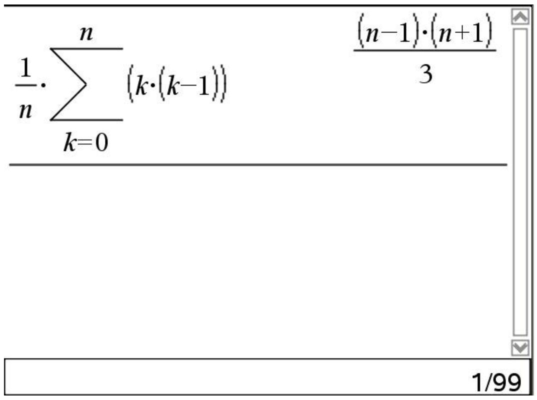
D'abord dans le titre ; la suite n'est pas définie par récurrence !

Pourquoi, directement ne pas étudier la suite v_n ?

Les stratégies pour "programmer" sur tableur sont intéressantes et permettent d'évaluer de réelles connaissances sur le tableur.

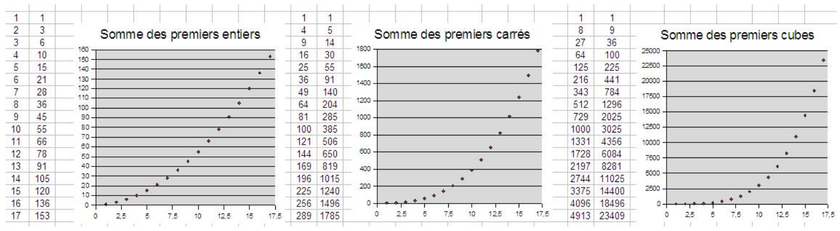
Un élève qui connaitrait la formule de la somme des premiers carrés (et de la somme des premiers entiers) pourrait être surpris de l'expérience à mener alors que, de fait, le résultat est immédiat (modulo cette connaissance). On peut à cette occasion se poser la question de l'attitude à avoir devant un élève qui ne "jouerait pas le jeu" et qui utiliserait une stratégie différente pour résoudre l'exercice.

Que dire également d'un élève qui choisirait le calcul formel (d'un logiciel ou de sa calculatrice) pour résoudre cet exercice :



1.6 Prolongements

On peut bien sûr imaginer d'utiliser le tableur pour chercher des formules générales des sommes des nombres, des carrés, des cubes :



2 Sujet 012

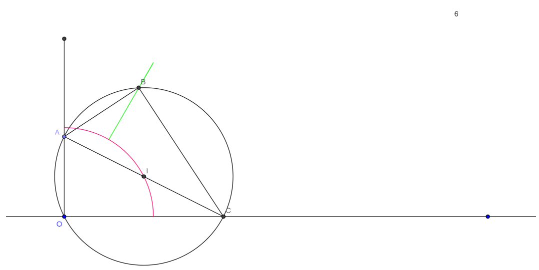
2.1 Solution experte

Le triangle ACO étant rectangle en O, $IO = \frac{AC}{2} = 3$ et donc le lieu des points I est inclus dans le quart de cercle de centre O et de rayon 3.

Réciproquement

Si M appartient à ce quart de cercle, alors $OM = 3$; on considère le point A de l'axe des ordonnées deuxième point d'intersection du cercle de centre M et de rayon 3. La droite (AM) recoupe l'axe des abscisses en C et $AC = 6$ (OAC est un triangle rectangle en$O$ de médiane $OM = 3$).

Le lieu des points I est le quart de cercle de centre O et de rayon 3.



$OABC$ sont sur un même cercle de rayon 3 et de centre I, donc les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux. Comme $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$, le lieu des point B se situe sur la droite passant par O et de pente $\sqrt{3}$

Les relations métriques dans le triangle OAB donnent $OB = 6\sin\left(\widehat{OAB}\right)$. Donc $3 \leq OB \leq 6$

2.2 Critiques de l'exercice

Des allers retours entre "expériences" et connaissances permettent de construire le raisonnement avec un lien très intéressant avec la construction sur le logiciel de géométrie dynamique. Il est important de dépasser les constructions annexes pour garder le fil du problème cherché, et une fois la construction réalisée, le "dynamisme" de la figure permet non seulement de visualiser les lieux demandés mais aussi de comprendre, me semble t'il le fond du problème.

2.3 Prolongement

Un TP possible à réaliser en relation avec le prof de physique :

Un bonhomme grimpe sur une échelle, l'échelle glisse. A quelle vitesse notre bonhomme va-t-il arriver sur le sol ?

Posé de cette manière, l'énoncé est incomplet ; il s'agit donc de faire des hypothèses pour pouvoir traiter mathématiquement ce problème, puis d'effectuer les calculs en s'appuyant sur une théorie, puis, éventuellement de vérifier expérimentalement l'accord de la pratique avec la théorie.

2.3.1 Les premières hypothèses

On assimile l'échelle à un segment [AB] de longueur L et le bonhomme à un point M de ce segment. On pose BM=l. On appelle α l'angle $\widehat{OBA}$.

Prenons comme origine du temps l'instant où l'échelle commence à glisser.

Les points A et B glissent sur le mur et le sol. On suppose que le point M reste immobile sur [AB] pendant la chute. Il s'agit de déterminer la trajectoire d'un point matériel M du segment [AB] ainsi que sa vitesse v à l'instant où M est sur l'axe des abscisses.

2.3.2 Les premiers calculs

Le point M a pour coordonnées $(x(t), y(t))$.

Remarque : l'abscisse x du point M est comprise entre 0 (si l'echelle est verticale) et L-l (si l'échelle est horizontale)

L'ordonnée y du point M est comprise entre 0 et l

L'angle α dépend du temps..

Calculons x(t) et y(t) en fonction de α

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & (L-l)\cos(\alpha) \\ y(t) & = & l\sin(\alpha) \end{array}\right.$$

2.3.3 premières conséquences

On peut déduire de cette écriture une relation entre x et y :

$$\left(\frac{x}{L-l}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2 = 1$$

soit

$$y = l\sqrt{1-\left(\frac{x}{L-l}\right)^2}$$

Etudions alors la fonction :

$$x \to l\sqrt{1-\left(\frac{x}{L-l}\right)^2}$$

1. Quel est son domaine de définition ?
2. Quelle est sa dérivée ?
3. Quelles sont les courbes obtenues pour l = $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ en prenant L=1.

Cette étude ne permet pas de déterminer la vitesse du mobile au point d'impact.

2.4 Deuxièmes hypothèses

Supposons que l'angle α dépende linéairement du temps, c'est à dire que $\alpha = kt + \alpha_0$.
On peut réécrire les coordonnées de M :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & (L-l)\cos(kt+\alpha_0) \\ y(t) & = & l\sin(kt+\alpha_0) \end{array} \right.$$

2.5 Comment interpréter ces équations

Il s'agit alors d'un système d'équations paramétriques de paramètre t, que l'on peut représenter par l'écriture vectorielle :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} (L-l)\cos(kt+\alpha_0) \\ l\sin(kt+\alpha_0) \end{pmatrix}$$

Les deux fonctions de t, x et y sont dérivables sur leurs domaines de définition. Le vecteur tangent à la courbe décrite par M à l'instant t_0 est alors le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{v}(t_0) = x'(t_0)\overrightarrow{i} + y'(t_0)\overrightarrow{j}$$

pourvu que ce vecteur ne soit pas nul

Du point de vue de la courbe décrite par le point M, il nous donne un vecteur directeur de la tangente. D'un point de vue cinématique, il donne le vecteur vitesse du point M à l'instant t_0.

En effet :

Le vecteur $\frac{\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}}{t-t_0}$ représente le taux de déplacement pour la durée $t - t_0$

En faisant tendre t vers t_0, la durée $t - t_0$ tend vers 0 et la position de M tend vers la position de M_0

Le vecteur $\frac{\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}}{t-t_0}$ tend vers une limite $\overrightarrow{v_0}$. qui représente le vecteur de vitesse instantanée à l'instant t_0 :

$$\overrightarrow{v_0} = lim_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}}{t-t_0} = lim_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{M_0M}}{t-t_0}$$

Le vecteur vitesse instantanée à l'instant t d'un point mobile M a :

- la direction de la tangente à la courbe suivie par M
- le sens du mouvement
- une norme égale à la norme de $\overrightarrow{v}$

2.5.1 Résolution complète du problème

Supposons L = 1, l=$\frac{1}{4}$, k = -1, $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$

Nous avons donc à étudier la trajectoire et la vitesse du mobile M tel que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{3}{4}\cos(-t+\frac{\pi}{4}) \\ y(t) & = & \frac{1}{4}\sin(-t+\frac{\pi}{4}) \end{array} \right.$$

2.5.2 Etude du mouvement

Domaine de définition :

A l'instant 0 :

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{3\sqrt{2}}{8} \\ y(0) &= \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

Le mouvement s'arrêtera lorsque $\alpha = 0$ donc $t = \frac{\pi}{4}$

2.5.3 Etude des deux fonctions x et y

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{3\cos(t+\frac{\pi}{4})}{4} \\ y'(t) &= \frac{-\sin(t+\frac{\pi}{4})}{4} \end{aligned}$$

1. le signe de x'(t) détermine les variations de x
2. le signe de y'(t) détermine les variations de y
3. La vitesse du mobile lorsque $t = \frac{\pi}{4}$ vaut donc :