1 Recherche des entiers naturels n tels que $n+5 \mid n^3+5$

1. Définir une feuille de tableur (Open Office Calc) contenant :
   (a) en colonne 1 : les entiers n de 0 à 1000 ;
   (b) en colonne 2 : les entiers $n+5$;
   (c) en colonne 3 : les entiers n^3+5 ;
   (d) en colonne 4 : les restes $r(n)$ dans la division euclidienne de n^3+5 par $n+5$.
2. Faire un graphique de la suite r avec les points obtenus.
3. A l'aide du graphique, quelle expression peut-on conjecturer pour $r(n)$ pour de "grandes" valeurs de n ?
4. Démontrer cette conjecture.
5. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $n+5$ divise n^3+5.

2 Corrigé

1. Feuille tableur (Open Office Calc) :

	A	B	C	D	E
1	Valeur de n	Valeur de $n+5$	Valeur de n^3+5	Reste	
2	1	$=A2+5$	$=A2\hat{}3+5$	MOD(C2 ;B2)	
3	2	$=A3+5$	$=A3\hat{}3+5$	MOD(C3 ;B3)	
4	3	$=A4+5$	$=A4\hat{}3+5$	MOD(C4 ;B4)	
⋮	⋮				

   La fonction MOD(cellule1 ; cellule2) renvoie le reste de la division euclidienne du contenu de la cellule1 par le contenu de la cellule2 et vaut donc 0 lorsque l'entier de la cellule2 divise l'entier de la cellule1.
2. Les points $(n; r(n))$ semblent alignés pour $n \geqslant 115$ sur la droite d'équation $y = x - 115$.
3. On peut donc penser que $r(n) = n - 115$ pour $n \geqslant 115$.
4. (a) On cherche si pour $n \geqslant 115$ il existe un entier $q(n)$ tel que

$$n^3+5 = (n+5)\,q(n) + (n-115)$$

   Le membre de gauche étant un polynôme de degré 3, le membre de droite doit être un polynôme de degré 3.
   Il est donc naturel de chercher $q(n)$ sous la forme d'un polynôme de degré 2, c'est à dire sous la forme $q(n) = an^2+bn+c$.
   On a :

$$(n+5)(an^2+bn+c) + (n-115) = an^3 + (b+5a)n^2 + (c+5b+1)n + 5c - 115$$

   Par identification avec les coefficients du polynôme $n \longmapsto n^3+5$, on voit qu'il suffit de poser :

$$(a; b; c) = (1; -5; 24)$$

   On a ainsi, pour tout entier n :

$$n^3+5 = (n+5)(n^2-5n+24) + (n-115)$$

   et $q(n) = n^2-5n+24$ est entier pour tout entier n.

   (b) A quelle condition l'entier $n-115$ est-il le reste dans la division de l'entier n^3+5 par l'entier $n+5$? A la condition suivante :

$$n+5 = r(n) \Longleftrightarrow 0 \leqslant n-115 < n+5$$

   c'est à dire :

$$\boxed{n+5 = r(n) \Longleftrightarrow 115 \leqslant n}$$

5. (a) Pour $n \geqslant 115$, le reste dans la division de $n^3 + 5$ par $n + 5$ est $n - 115$ et n'est donc nul que pour $n = 115$.
   (b) Pour $n < 115$, on relève dans la feuille de calcul un reste nul pour les valeurs de n suivantes :
   $0; 1; 3; 5; 7; 10; 15; 19; 25; 35; 55$
   (c) L'ensemble des entiers naturels tels que $n + 5$ divise $n^3 + 5$ est donc l'ensemble

$$\mathscr{L} = \{0; 1; 3; 5; 7; 10; 15; 19; 25; 35; 55; 115\}$$