$N' = (\overline{\lim}\, B_n)^c$. Par définition, $\omega \notin N' \Rightarrow X_n(\omega) > \operatorname{Log} n$ pour une infinité d'entiers n, ce qui implique :

$$\text{(VI.13)} \qquad \omega \notin N' \Rightarrow \overline{\lim}\, \frac{X_n(\omega)}{\operatorname{Log} n} \geq 1\,.$$

(VI.12) et (VI.13) montrent que :

$$\omega \notin N \cup N' \Rightarrow \overline{\lim}\, \frac{X_n(\omega)}{\operatorname{Log} n} = 1\,.$$

Puisque $P(N \cup N') = 0$, cela achève l'exercice.

CHAPITRE II

Compléments sur les séries et les séries de fonctions

Il n'est bien entendu pas question de faire dans ce chapitre une théorie complète des séries puisque la littérature abonde d'ouvrages traitant de ce sujet ; l'objectif est seulement d'apporter quelques compléments moins connus, en particulier de populariser une méthode, due à Abel, de comparaison entre séries et intégrales aux applications intéressantes. On termine ce chapitre par les séries de Dirichlet et par quelques digressions sur la fonction ζ de Riemann et son prolongement au plan complexe.

I. – Formule d'Abel et applications

1. Formule d'Abel. Exemples

Si a est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ on posera pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$\text{(I.1)} \qquad A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)\,.$$

D'autre part pour $t \in \mathbb{R}_+$ on notera $[t]$ sa partie entière et $\{t\} = t - [t]$ sa partie décimale. Alors $0 \leq \{t\} < 1$.

Théorème I.1. *Soient $y < x$ deux réels positifs, f une fonction de classe C^1 sur $[y,x]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Alors*

$$\text{(I.2)} \qquad \sum_{y<n\leq x} a(n)\, f(n) = A(x)\, f(x) - A(y)\, f(y) - \int_y^x A(t)\, f'(t)\, dt\,.$$

Corollaire I.2. *Soient $y < x$ deux réels positifs, $f \in C^1([y,x], \mathbb{C})$. Alors*

$$\text{(I.3)} \qquad \sum_{y<n\leq x} f(n) = \{y\}\, f(y) - \{x\}\, f(x) + \int_y^x f(t)\, dt + \int_y^x \{t\}\, f'(t)\, dt\,.$$

En particulier si n_0 et N sont deux entiers positifs on a

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) = \int_{n_0}^{N} f(t)\,dt + \int_{n_0}^{N} \{t\}\,f'(t)\,dt. \tag{I.4}$$

Corollaire I.3. *Soient $x_0 \geq 0$ et $f : [x_0, +\infty[\to \mathbb{C}$, de classe C^1. Si l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ est convergente, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.*

Remarque I.4. Lorsque f est à valeurs positives et décroissante, l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ est convergente puisque $\int_{x_0}^{X} |f'(t)|\,dt = -\int_{x_0}^{X} f'(t)\,dt = f(x_0) - f(X)$ tend vers une limite lorsque $X \to +\infty$. On retrouve alors le critère classique. Cependant il n'est pas nécessaire dans ce cas de supposer que f est C^1. Mais lorsque f est C^1 le corollaire I.3 montre qu'il n'est pas nécessaire que f soit réelle ni monotone.

PREUVE DU THÉORÈME I.1. Posons $p = [y]$, $q = [x]$ de sorte que pour $p \leq t < p+1$ on a $A(t) = A(y) = A(p)$ et pour $q \leq t < q+1$, $A(t) = A(x) = A(q)$.

Notons d'autre part $I = \sum_{y<n\leq x} a(n)\,f(n)$. On a

$$I = \sum_{n=p+1}^{q} a(n)\,f(n) = \sum_{n=p+1}^{q} (A(n) - A(n-1))\,f(n) = \sum_{n=p+1}^{q} A(n)\,f(n)$$

$$-\sum_{n=p}^{q-1} A(n)\,f(n+1) = A(q)\,f(q) - A(p)\,f(p+1) + \sum_{n=p+1}^{q-1} A(n)\,(f(n) - f(n+1)).$$

Or $f(n) - f(n+1) = -\int_n^{n+1} f'(t)\,dt$ et pour $n < t < n+1$, $A(t) = A(n)$. Par conséquent

$$I = A(q)\,f(q) - A(p)\,f(p+1) - \int_{p+1}^{q} A(t)\,f'(t)\,dt. \tag{I.5}$$

Ensuite pour $q \leq t \leq x < q+1$, $A(t) = A(x) = A(q)$; alors

$$A(q)\,f(q) = A(x)\,f(x) + A(q)\,[f(q) - f(x)]$$

$$A(q)\,f(q) = A(x)\,f(x) - \int_{q}^{x} A(t)\,f'(t)\,dt. \tag{I.6}$$

De même pour $p \leq y \leq t < p+1$, $A(t) = A(y) = A(p)$, d'où

$$A(p)\,f(p+1) = A(y)\,f(y) + A(p)\,[f(p+1) - f(y)],$$

$$A(p)\,f(p+1) = A(y)\,f(y) + \int_{y}^{p+1} A(t)\,f'(t)\,dt. \tag{I.7}$$

On déduit de (I.5), (I.6) et (I.7)

$$I = A(x)\,f(x) - A(y)\,f(y) - \left(\int_{y}^{p+1} A(t)\,f'(t)\,dt + \int_{p+1}^{q} A(t)\,f'(t)\,dt + \int_{q}^{x} A(t)\,f'(t)\,dt \right) \tag{I.8}$$

ce qui prouve (I.2).

PREUVE DU COROLLAIRE I.2. Appliquons le théorème I.1 au cas où $a(n) = 1$ pour tout n. Comme $A(x) = [x]$ on obtient

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = [x]\,f(x) - [y]\,f(y) - \int_{y}^{x} [t]\,f'(t)\,dt. \tag{I.9}$$

D'autre part une intégration par parties montre que

$$\int_{y}^{x} f(t)\,dt = x\,f(x) - y\,f(y) - \int_{y}^{x} t\,f'(t)\,dt. \tag{I.10}$$

Il suffit alors d'ôter l'égalité (I.10) à (I.9) pour obtenir (I.3).

PREUVE DU COROLLAIRE I.3. Supposons l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ convergente. Comme $|\{t\}\,f'(t)| \leq |f'(t)|$, le membre de droite de l'égalité (I.4) admet une limite lorsque $N \to +\infty$ ce qui prouve que la série $\sum f(n)$ est convergente. Inversement, par hypothèse, l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} |f'(t)|$ est convergente. Donc $\int_{x_0}^{+\infty} f'(t)\,dt$ est convergente *i.e.* $\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$ tend vers une limite lorsque $x \to +\infty$. Par conséquent $f(x)$ tend vers une limite ℓ à l'infini. Supposons la série $\sum f(n)$ convergente ; alors $f(n) \to 0$ si $n \to +\infty$, ce qui entraîne que $\ell = 0$. Il suffit d'utiliser (I.3) pour déduire que $\int_y^x f(t)\,dt$ tend vers une limite lorsque $x \to +\infty$.

Exemples I.5.

1. La série de terme général $u_n = \frac{\cos \operatorname{Log} n}{n}$ est divergente. En effet la fonction $f(t) = \frac{\cos \operatorname{Log} t}{t}$ est C^1 sur $[1, +\infty[$ et $f'(t) = -\frac{\sin \operatorname{Log} t}{t^2} - \frac{\cos \operatorname{Log} t}{t^2}$, d'où $|f'(t)| \leq \frac{2}{t^2}$. Le corollaire I.3 s'applique. Dans l'intégrale $F(x) = \int_1^x \frac{\cos \operatorname{Log} t}{t}\,dt$

posons $\operatorname{Log} t = u$, il vient $F(x) = \int_0^{\operatorname{Log} x} \cos u\, du = \sin \operatorname{Log} x$ qui n'admet pas de limite lorsque $x \to +\infty$; il suffit de prendre $x = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$, où $k \to +\infty$, alors $F(x) = (-1)^k$.

2. La série de terme général $u_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ est convergente. En effet la fonction $f(t) = \frac{\sin\sqrt{t}}{t}$ est C^1 sur $[1, +\infty[$ et $f'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{t^{3/2}} - \frac{\sin\sqrt{t}}{t^2}$ d'où $|f'(t)| \leq \frac{2}{t^{3/2}}$ pour $t \geq 1$. Le corollaire I.3 s'applique. Dans l'intégrale $F(x) = \int_1^x \frac{\sin\sqrt{t}}{t} dt$ posons $\sqrt{t} = u$. Il vient, $F(x) = \int_1^{\sqrt{t}} \frac{\sin u}{u} du$ qui tend vers une limite lorsque $x \to +\infty$. L'intégrale et la série sont donc convergentes. Remarquons que l'on aurait pu être tenté d'utiliser le critère d'Abel usuel mais une estimation uniforme de $|\sum_0^N \sin\sqrt{n}|$ n'est pas évidente.

3. Il est bien connu que pour $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 1$ la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^s}$ est absolument convergente. Que se passe-t-il pour $\operatorname{Re} s = 1$? Si $s = 1$ la série diverge. Considérons le cas où $s = 1 + i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^*$. La fonction $f(t) = t^{-(1+i\theta)}$ est C^1 sur $[1, +\infty[$ et $f'(t) = -(1+i\theta)t^{-(2+i\theta)}$ d'où $|f'(t)| \leq \frac{1+|\theta|}{t^2}$. Le corollaire I.3 s'applique; comme $\int_1^x \frac{dt}{t^{1+i\theta}} = \frac{1}{i\theta}\left(1 - \frac{1}{x^{i\theta}}\right)$ et que $x^{i\theta} = e^{i\theta \operatorname{Log} x}$ n'admet pas de limite lorsque $x \to +\infty$ on déduit que la série $\sum \frac{1}{n^{1+i\theta}}$, $\theta \in \mathbb{R}^*$, est divergente. Cependant, remarquons que, d'après (I.4) on a

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{1+i\theta}} = \int_1^N \frac{dt}{t^{1+i\theta}} - \int_1^N \{t\} \frac{1+i\theta}{t^{2+i\theta}} dt.$$

On en déduit

$$\left|\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^{1+i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|\theta|} + \int_1^{+\infty} \frac{1+|\theta|}{t^2} dt = \frac{2}{|\theta|} + (1+|\theta|),$$

ce qui montre que les sommes partielles sont uniformément bornées. En utilisant le critère d'Abel usuel on en déduit, par exemple que la série de terme général $\frac{a_n}{n^{1+i\theta}}$ où (a_n) est une suite décroissante qui tend vers zéro est convergente pour $\theta \neq 0$. Remarquons que $\operatorname{Re} \frac{1}{n^{1+i}} = \frac{\cos \operatorname{Log} n}{n}$; on retrouve ainsi l'exemple 1.

Remarque I.6. Si f' n'est pas absolument intégrable sur $[a, +\infty[$ le corollaire I.3 ne s'applique plus. Cependant si f est C^2 et si f'' est absolument intégrable on peut encore avoir un résultat du même type. En effet on part de la formule (I.3); notons $p = [y]$, $q = [x]$. On a

$$\int_y^x \{t\} f'(t)\, dt = \int_y^{p+1} (t-p) f'(t)\, dt + \sum_{n=p+1}^{q-1} \int_n^{n+1} \{t\} f'(t)\, dt + \int_q^x (t-q) f'(t)\, dt$$

et pour $n < t < n+1$, $\{t\} = t - n$. On intègre par parties dans ces trois intégrales en posant $u = f'(t)$. Il vient

$$\int_y^x \{t\} f'(t)\, dt = \frac{1}{2}\{x\}^2 f'(x) - \frac{1}{2}\{y\}^2 f'(y) + \frac{1}{2}\sum_{n=p+1}^{q} f'(n) - \frac{1}{2}\int_y^x \{t\}^2 f''(t)\, dt$$

Ensuite d'après la formule (I.3) appliquée à f' on a

$$\sum_{n=p+1}^{q} f'(n) = \{y\} f'(y) - \{x\} f'(x) + \int_y^x f'(t)\, dt + \int_y^x \{t\} f''(t)\, dt.$$

En utilisant (I.3) et les deux formules ci-dessus on obtient

$$\text{(I.11)} \quad \sum_{y<n\leq x} f(n) = \{y\} f(y) - \{x\} f(x) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(y)\big) + \\ + \Big(\frac{1}{2}\{x\}^2 - \{x\}\Big) f'(x) - \Big(\frac{1}{2}\{y\}^2 - \{y\}\Big) f'(y) - \\ - \frac{1}{2}\int_y^x \big(\{t\}^2 - \{t\}\big) f''(t)\, dt + \int_y^x f(t)\, dt.$$

En particulier si $y = n_0$ et $x = N$ sont entiers

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) = \frac{1}{2}\big(f(N) - f(n_0)\big) + \int_{n_0}^{N} f(t)\, dt + \frac{1}{2}\int_{n_0}^{N} \big(\{t\} - \{t\}^2\big) f''(t)\, dt.$$

Voici un exemple. Soit à étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\cos \operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} n}$. On considère la fonction $f(t) = \frac{\cos \operatorname{Log} t}{\operatorname{Log} t}$ qui est C^∞ sur $[2, +\infty[$. On a

$$f'(t) = \frac{-\sin \operatorname{Log} t}{t \operatorname{Log} t} - \frac{\cos \operatorname{Log} t}{t(\operatorname{Log} t)^2} = g_1 + g_2.$$

Il est facile de voir que g_2 est absolument intégrable mais pas g_1 car $\int_2^x \frac{|\sin \operatorname{Log} t|}{t \operatorname{Log} t} dt = \int_{\operatorname{Log} 2}^{\operatorname{Log} x} \frac{|\sin u|}{u} du \to +\infty$ si $x \to +\infty$. Cependant un calcul simple montre que $f'' \in L^1([2, +\infty[)$. Compte tenu de la formule (I.11) il apparaît que la série est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\cos \operatorname{Log} t}{\operatorname{Log} t} dt$ est convergente. Or celle ci est divergente car elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. En effet prenons $x' = e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$, $x'' = e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$ alors

$$\int_{x'}^{x''} \frac{\cos \operatorname{Log} t}{\operatorname{Log} t} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} e^u \frac{\cos u}{u} du \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}}{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \to +\infty$$

si $k \to +\infty$, donc la série $\sum \frac{\cos \operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} n}$ est divergente.

Bien entendu on peut itérer ce procédé en intégrant à nouveau par parties dans l'intégrale $\int_y^x \{t\}^2 f''(t)\, dt$.

2. Prolongement de la fonction ζ au demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$ privé de $\{1\}$

Pour $\operatorname{Re} s > 1$ la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est une fonction holomorphe. Nous voulons dans ce paragraphe la prolonger au demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$ privé du point $s = 1$, c'est-à-dire trouver une fonction holomorphe dans $\{s : \operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$ qui coïncide avec $\zeta(s)$ lorsque $\operatorname{Re} s > 1$. Appliquons la formule (I.4) à $f(t) = \frac{1}{t^s}$. On a

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} = \int_1^N \frac{dt}{t^s} - s\int_1^N \{t\}\,\frac{dt}{t^{s+1}} = \frac{1}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_1^N \{t\}\,\frac{dt}{t^{s+1}}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \{t\}\,\frac{dt}{t^{s+1}}$ est convergente pour $\operatorname{Re} s > 0$ car $\left|\{t\}\cdot\frac{1}{t^{s+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\operatorname{Re} s+1}}$. En outre la fonction $s \mapsto \int_1^{+\infty}\{t\}\,\frac{dt}{t^{s+1}}$ est holomorphe dans $\operatorname{Re} s > 0$ car à t fixé $s \mapsto \frac{\{t\}}{t^{s+1}}$ est holomorphe et si $\operatorname{Re} s \geq \varepsilon > 0$, $\left|\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\varepsilon+1}} \in L^1(1, +\infty)$ et on applique le théorème I.7, chapitre IX. On pose alors pour $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$,

$$\zeta(s) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1}\right) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty}\{t\}\,\frac{dt}{t^{s+1}}. \tag{I.12}$$

Le troisième terme de cette égalité est une fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$. Si $\operatorname{Re} s > 1$, $N^{1-s} \to 0$ et on retrouve $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$. Nous verrons à la fin de ce chapitre une extension holomorphe de $\zeta(s)$ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

3. La fonction θ

Elle est définie pour $x \in]0, +\infty[$ par

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi x n^2}. \tag{I.13}$$

Comme la série de terme général $n^{2k}\,\mathrm{e}^{-\pi x n^2}$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour $\varepsilon > 0$, la fonction θ est C^∞ sur $]0, +\infty[$. Elle admet même un prolongement holomorphe au demi-plan complexe $\operatorname{Re} z > 0$. Comme la série ne converge pas pour $x = 0$, il est naturel de penser que $\theta(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 0$. Voici l'expression de θ au voisinage de zéro. Appliquons la formule (I.4).

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-\pi x n^2} = \int_0^N \mathrm{e}^{-\pi x t^2}\,dt + \int_0^N (-2\pi x t)\{t\}\,e^{-\pi x t^2}\,dt = (1) + (2)$$

$$(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{N\sqrt{\pi x}} e^{-s^2}\,ds \xrightarrow{N\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$|(2)| \leq \int_0^N 2\pi x t\,e^{-\pi x t^2}\,dt \leq \int_0^{+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-\pi x t^2}\right)'\,dt = 1.$$

On en déduit que $\theta(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x t^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + O(1)$, $x \to 0$.

4. Application aux nombres premiers

Pour $x > 0$ on note $\mathcal{P}_x = \{p \in \mathbb{N}, p \text{ premier}, p \leq x\}$ puis

$$\pi(x) = \operatorname{card}\mathcal{P}_x = \sum_{p\in\mathcal{P}_x} 1$$

$$\theta(x) = \sum_{p\in\mathcal{P}_x} \operatorname{Log} p.$$

Si on introduit la fonction a définie par

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on aura

$$\pi(x) = \sum_{1<n\leq x} a(n), \quad \theta(x) = \sum_{1<n\leq x} a(n)\operatorname{Log} n.$$

Appliquons le théorème I.1 à la fonction $f(t) = \operatorname{Log} t$. Comme $A(x) = \sum_{1<n\leq x} a(n) = \pi(x)$, on obtient (puisque $\pi(t) = 0$ si $t < 2$)

$$\theta(x) = \pi(x)\operatorname{Log} x - \int_{\frac{3}{2}}^{x}\frac{\pi(t)}{t}\,dt. \tag{I.14}$$

Posons ensuite $b(n) = a(n)\operatorname{Log} n$. Alors $\theta(x) = \sum_{\frac{3}{2}<n\leq x} b(n)$ et $\pi(x) = \sum_{\frac{3}{2}<n\leq x}\frac{b(n)}{\operatorname{Log} n}$. En appliquant le théorème I.1, avec $f(t) = \frac{1}{\operatorname{Log} t}$ on obtient

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\operatorname{Log} x} - \int_{\frac{3}{2}}^{x}\frac{\theta(t)}{t(\operatorname{Log} t)^2}\,dt. \tag{I.15}$$

On a alors la :

Proposition I.7. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\operatorname{Log} x}{x} = 1$, *ii)* $\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta(x)}{x} = 1$.

Développement asymptotique de la série harmonique

Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS Analyse 1*, page 145

Exercice : On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

1. Soit $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Démontrer que ces suites sont adjacentes et convergent vers une constante réelle strictement positive γ.
2. Déterminer un développement asymptotique de H_n comprenant quatre termes.
3. On pose $k_n = \min\{k \in \mathbb{N}\ ,\ H_k \geq n\}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n}$.

1. La différence $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est positive et converge vers 0. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante puisque

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$$

en vertu de l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$. D'autre part, cette même inégalité assure la croissance de $(v_n)_{n \geq 1}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

Les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont donc adjacentes, et elles convergent vers un réel γ. Comme $v_2 = 1 - \ln 2 > 0$, on a $\gamma > 0$.

On a donc

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + 0(1)} \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers } +\infty$$

2. • Posons $t_n = u_n - \gamma$ $(n \geq 1)$. On emploie une méthode classique qui consiste, pour obtenir un équivalent de t_n, à chercher un équivalent de $t_n - t_{n-1}$, puis à "sommer" l'équivalent obtenu. On a pour n tendant vers l'infini,

$$t_n - t_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

La série $\sum(t_k - t_{k-1})$ converge. Le théorème de sommation des équivalents nous donne :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

l'équivalent du reste de la série de Riemann s'obtenant à l'aide d'une simple comparaison série-intégrale :

Théorème de comparaison série-intégrale des séries de Riemann : *Si $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissance et intégrale sur $[1, +\infty[$, si bien que pour $k \geq 2$,*

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

En sommant cela entre $n+1$ et N, puis en faisant tendre N vers l'infini, on obtient

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

Comme les membres de gauche et de droite sont tous deux équivalents à $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$, le théorème d'encadrement assure que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Le cas $\alpha = 2$ donne l'équivalent annoncé. On a donc déjà

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

• On pose $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$, suite qui converge vers 0. La somme $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1})$ vaut $-w_n$ et son terme général s'écrit

$$w_n - w_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$$

Pour n tendant vers l'infini, on a

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= \frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3} \end{aligned}$$

Le théorème de sommation des équivalents donne

$$-w_n \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

Ainsi, on obtient le développement asymptotique :

$$\boxed{H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

3. Pour estimer k_n, on va utiliser le début du développement asymptotique de H_n. On sait que $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ où (ε_n) tend vers 0. Par définition de k_n, on a

$$\ln k_n + \gamma + \varepsilon_{k_n} \geq n$$

et

$$\ln(k_n - 1) + \gamma + \varepsilon_{k_n - 1} < n$$

Il en résulte, en passant à l'exponentielle, que

$$e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n-1}} + 1 > k_n \geq e^n e^{-\gamma - \varepsilon_{k_n}}$$

On a donc $k_n \sim e^n e^{-\gamma}$ et

$$\boxed{\lim_{n\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e}$$

La somme $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ est une somme de Riemann :

c'est aussi : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$, avec :

$f(x)=\frac{1}{1+x}$, sur [0,1].

La limite de cette somme est bien $\ln 2=\int_0^1 f(t)dt$.

On sait que la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge en vertu du TSSA.
Notons S_n sa somme partielle. On a :

$$S_{2n}=1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n}-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}.$$

L-2.2

Formule de Stirling

1) Montrer que la suite de terme général :
$\ln(n!)$ - $(n+\frac{1}{2})\ln n+n$
converge.

2) Montrer que : $n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ (avec [Q-1.1]).

Solution

1) On utilise la série de terme général $u_n=x_n-x_{n-1}$, où x_n est le terme général de cette suite.

On a facilement :

$$u_n=-(n-\frac{1}{2})(-\ln(1-\frac{1}{n}))\ +\ 1.$$

On développe :

$$u_n=1\ -\ (n-\frac{1}{2})(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}(\frac{1}{n^3}))$$
$$=\mathcal{O}(\frac{1}{n^2}).$$

Donc la série de terme général u_n converge.

Il revient au même de dire que la suite (x_n) converge.

2) On déduit du 1) qu'il existe $k>0$ tel que :

$\frac{n!}{\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}}$ tend vers k.

. C'est dire que :

$$n!\ \sim\ kn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

On en déduit que :

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!^2}\ \sim\ \frac{k(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{k^2n^{2n+1}e^{-2n}}\ \sim\ \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{k\sqrt{n}}.$$

Par ailleurs, nous avons vu que ([Q-1.1]) :

$$\binom{2n}{n}\ \sim\ \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

Donc $k=\sqrt{2\pi}$. C'est le résultat voulu.

L-2.3

Soit $0<a<\pi$. Montrer que la série de terme général $\frac{|\sin na|}{n}$ diverge.

Solution

On regroupe les termes deux par deux.

Posons :

$$v_n=\frac{|\sin na|}{n}.$$

On pose donc $u_n=v_{2n-1}+v_{2n}$.

On a :

$$u_n\geq\frac{|\sin(2n-1)a|+|\sin 2na|}{2n}.$$

Posons :

$$f(x)=|\sin x|+|\sin(x+a)|.$$

On a :

$$u_n\geq\frac{f((2n-1)a)}{2n}.$$

Montrons que la fonction f est minorée par une constante >0.

Comme f est de période π, la borne inférieure de f est sa borne inférieure sur $[0,\pi]$ et cet Inf est atteint en un certain c car f est continue.

On a $f(c)>0$ car on ne peut annuler en même temps $\sin c$ et $\sin(a+c)$.

Donc $\operatorname{Inf} f=m>0$.

Donc : $u_n\geq\frac{m}{2n}$.

La série de terme général u_n diverge.

Donc la série de terme général v_n diverge.

Intégrales paramétrées

Q

Q. 1 Suites d'intégrales

Q-1.1

Intégrales de Wallis

On pose $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$.

1) Montrer que $na_n = (n-1)a_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

2) Calculer pour tout $n \geq 1$: $na_n a_{n-1}$.

3) Montrer que $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

Solution

1) Une IPP donne ce résultat, pour $n \geq 2$:

$$a_n = \left[-\cos t \sin^{n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{n-2} t\, dt$$
$$= (n-1)(a_{n-2} - a_n)...$$

2) On a pour $n \geq 2$,

$$na_n a_{n-1} = (n-1)a_{n-1}a_{n-2}$$

d'après le 1), ce qui montre bien que la suite de terme général $na_n a_{n-1}$ est constante.

Sa valeur pour $n = 1$ est $\frac{\pi}{2}$, car $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_1 = 1$.

3) La suite (a_n) est par nature positive et décroissante.

On a donc l'encadrement :

$$na_n^2 \leq na_n a_{n-1} \leq na_{n-1}^2,$$

qui lui-même donne :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq a_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc : on a bien par encadrement l'équivalent voulu.

La relation du 1) et les valeurs initiales montrent que :

$$a_{2n} = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\frac{\pi}{2};$$

$$a_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\frac{\pi}{2};$$

On en déduit le dernier résultat demandé.

Remarque

Le dernier résultat permet de montrer la formule de Stirling ([L-2.2]).

Q-1.2

Sommes de Gauss et intégrales de Fresnel

On pose $A = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ et $G_n = \sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k^2 2\pi}{n}}$.

On calculera simultanément ces deux expressions.

1) Montrer la convergence de l'intégrale définissant A.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$, on pose $\epsilon(q,n) = 1$ si q est pair et $\epsilon(q,n) = (-i)^n$ si q est pair.

2) Montrer que :

$$\int_0^1 e^{2i\pi n(t^2 - qt)} dt = \epsilon(q,n)\int_{\frac{q}{2}-1}^{\frac{q}{2}} e^{2i\pi n u^2} du.$$

3) Montrer que la limite, quand Q tend vers ∞, de :

$$\sum_{q=-Q}^{Q} \int_0^1 e^{2i\pi n(t^2-qt)} dt = A(1 + (-i)^n)\sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

4) Soit f une fonction C^1 par morceaux et continue.
Montrer que la limite quand Q tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{q=-Q}^{Q} \int_0^n f(t)e^{-2i\pi qt} dt = \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) + \sum_{j=0}^{n-1} f(j).$$

5) Montrer que $A = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+i)$.

Montrer que $G_n = \begin{cases} \sqrt{n}(1+i) & \text{si } n \equiv 0 \mod 4 \\ \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1 \mod 4 \\ 0 & \text{si } n \equiv 2 \mod 4 \\ \sqrt{n}i & \text{si } n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$

Solution

1) On a :

$$\frac{d}{dt}\frac{e^{it^2}}{2it} = e^{it^2} + \frac{i}{2}\frac{e^{it^2}}{t^2}.$$

Intégrons de 1 à X :

Intégrales paramétrées

Q

Q. 1 Suites d'intégrales

Q-1.1

Intégrales de Wallis

On pose $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$.

1) Montrer que $na_n = (n-1)a_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

2) Calculer pour tout $n \geq 1$: $na_n a_{n-1}$.

3) Montrer que $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

Solution

1) Une IPP donne ce résultat, pour $n \geq 2$:

$$a_n = \left[-\cos t \sin^{n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{n-2} t \, dt$$
$$= (n-1)(a_{n-2} - a_n)...$$

2) On a pour $n \geq 2$,

$$na_n a_{n-1} = (n-1)a_{n-1}a_{n-2}$$

d'après le 1), ce qui montre bien que la suite de terme général $na_n a_{n-1}$ est constante.

Sa valeur pour $n = 1$ est $\frac{\pi}{2}$, car $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et $a_1 = 1$.

3) La suite (a_n) est par nature positive et décroissante.

On a donc l'encadrement :

$$na_n^2 \leq na_n a_{n-1} \leq na_{n-1}^2,$$

qui lui-même donne :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq a_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc : on a bien par encadrement l'équivalent voulu.

La relation du 1) et les valeurs initiales montrent que :

$$a_{2n} = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)} \frac{\pi}{2};$$

$$a_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{\pi}{2};$$

On en déduit le dernier résultat demandé.

Remarque

Le dernier résultat permet de montrer la formule de Stirling ([L-2.2]).

Q-1.2

Sommes de Gauss et intégrales de Fresnel

On pose $A = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ et $G_n = \sum_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k^2 2\pi}{n}}$.

On calculera simultanément ces deux expressions.

1) Montrer la convergence de l'intégrale définissant A.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$, on pose $\epsilon(q,n) = 1$ si q est pair et $\epsilon(q,n) = (-i)^n$ si q est pair.

2) Montrer que :

$$\int_0^1 e^{2i\pi n(t^2-qt)}dt = \epsilon(q,n)\int_{\frac{q}{2}-1}^{\frac{q}{2}} e^{2i\pi n u^2} du.$$

3) Montrer que la limite, quand Q tend vers ∞, de :

$$\sum_{q=-Q}^{Q} \int_0^1 e^{2i\pi n(t^2-qt)}dt = A(1+(-i)^n)\sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

4) Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue.
Montrer que la limite quand Q tend vers $+\infty$ de :

$$\sum_{q=-Q}^{Q} \int_0^n f(t)e^{-2i\pi qt}dt = \frac{1}{2}(f(0)+f(n)) + \sum_{j=0}^{n-1} f(j).$$

5) Montrer que $A = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+i)$.

Montrer que $G_n = \begin{cases} \sqrt{n}(1+i) & \text{si } n \equiv 0 \mod 4 \\ \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1 \mod 4 \\ 0 & \text{si } n \equiv 2 \mod 4 \\ \sqrt{n}i & \text{si } n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$

Solution

1) On a :

$$\frac{d}{dt}\frac{e^{it^2}}{2it} = e^{it^2} + \frac{i}{2}\frac{e^{it^2}}{t^2}.$$

Intégrons de 1 à X :