

Type 2 : les compositions d'états

Il s'agit de la composition de deux collections. Par exemple : « Regarde cette carte, combien y a-t-il de points dessus ? Et sur celle-ci ?... Attention, je cache les deux cartes, peux-tu me dire combien de points sont cachés ? » C'est le caractère statique des deux états (collections) qui caractérise ce type de problème.

Schéma type :

$$\left. \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \end{array} \right\} E : \text{composition des deux états}$$

Il est remarquable de constater que les jeunes élèves réussissent moins bien ces problèmes que ceux du type 1.

Différents problèmes de ces deux types sont proposés dans les pages qui suivent, ainsi que dans la bibliographie...

Les problèmes de partage

Les problèmes additifs et soustractifs ne sont pas les seuls par l'intermédiaire desquels les élèves peuvent être confrontés à des situations riches d'anticipation. Les tâches de partage sont également intéressantes.

On peut, par exemple :

- soit construire p sous-collections à partir de n objets donnés, chacune des parts devant contenir le même nombre d'objets : fabrication de p colliers avec n pastilles, n n'étant pas forcément un multiple de p .
- soit distribuer un certain nombre d'objets à des enfants, sachant que, pour des raisons diverses, tous ne recevront pas le même nombre : ils en auront chacun entre un minimum et un maximum.

Certains de ces partages sont équitables (que le reste soit nul ou non), d'autres ne le sont pas. Pour les élèves, diverses procédures numériques personnelles et aucunement expertes sont possibles, elles servent à contrôler le partage. Certaines sont plus complexes que d'autres : quand le partage est équitable, le contrôle numérique de l'équité de chacune des parts (en particulier, s'il reste des objets que l'on ne peut pas partager) nécessite de nombreuses étapes. Souvent le processus échoue au regard de la surcharge cognitive qu'il induit.

Les différentes caractéristiques de ces activités ⁸

Ce sont de véritables situations de recherche, car si la compréhension de la tâche ne pose pas de difficulté, d'une part, il est nécessaire de mettre en œuvre des procédures originales et d'autre part, il n'est pas nécessaire qu'une procédure particulière, sous prétexte qu'elle est plus efficace qu'une autre, soit institutionnalisée.

La recherche et la validation des solutions nécessitent la prise en compte de plusieurs contraintes. Dans le cas où la contrainte de l'équité est imposée, même si elle est très forte, elle n'est pas la seule (absence ou non d'objets non rangés, valeur d'une part, nombre de parts). Dans le cas où

⁸ Se reporter à R. CHARNAY, J. DOUAIRE, J.-C. GUILLAUME, D. VALENTIN, « Chacun, tous... différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages », *Rencontres pédagogiques* n° 34, INRP, 1995, p. 117.

Il n'y a pas d'équité imposée, d'autres contraintes nécessitent un contrôle numérique qui ne va pas de soi (par exemple : « n'en mettre pas plus de cinq mais pas moins de deux »).

Par voie de conséquence, le contrôle et la régulation jouent un rôle décisif dans l'action.

Enfin, les élèves doivent prendre conscience qu'une collection quelconque d'objets peut se décomposer en sous-collections distinctes. Pour certains, la considération perceptive du « tas global indissociable » est encore très prégnante. Ces problèmes sont, par eux-mêmes, source d'un apprentissage qui est loin d'être négligeable.

Dans les situations correspondantes, nos objectifs et nos exigences sont ⁹ :

- respecter les contraintes, mettre en œuvre une procédure originale, être capable de contrôler et de corriger une solution en prenant en compte les différentes variables numériques, de formuler les critères de réussite et les causes d'échec...
- en grande section, les objets restent toujours à disposition des élèves même si on les invite plus tard à s'en passer (au CP).

Remarque : certains y verront les prémices de la division. Certes, mais, il n'est pas inutile de préciser que l'investissement sur le long terme de procédures personnelles, mais complexes, permettent, le moment venu, de mieux cerner les raisons pour lesquelles ces procédures doivent devenir de plus en plus expertes (cycles 2 et 3).

Des situations sont proposées dans les pages qui suivent, mais d'autres sont à la disposition du lecteur, en particulier dans *Apprentissages numériques et résolution de problèmes - GS*, de la page 118 à la page 137.

SITUATION 24 : Les camions

Cette activité est inspirée de la situation « Les caisses », proposée dans le livre : Apprentissages numériques et résolution de problèmes - GS, ERMEL, Hatier, 1990, p. 129.

Niveau : MS.

Description rapide

Placer une quantité déterminée d'objets dans des camions (des boîtes), sous certaines contraintes.

Situation-problème : les partages inéquitables.

Soit n , p , a , b , quatre nombres entiers tels que $0 < a < b$. Il s'agit de partager n jetons dans p camions, de telle façon que chaque camion contienne moins de b jetons (il ne faut pas qu'ils soient trop lourds pour avoir l'autorisation de partir) et plus de a jetons (mais pas trop légers, et surtout pas vides). Le nombre n doit vérifier : $0 < p \times a \leq n \leq p \times b$. Si $n = p \times a$ ou $p \times b$, il y a une seule solution possible au problème. Si n est au centre de l'intervalle, alors il existe un maximum de solutions.

Exemples :

Soit $a = 3$, $b = 5$ (pas moins de 3 jetons et pas plus de 5 jetons) et $p = 4$, donc : $12 \leq n \leq 20$

- Si $n = 12$, une solution : 3, 3, 3, 3. Si $n = 20$, une solution également : 5, 5, 5, 5.
- Si $n = 18$, alors deux solutions : 4, 4, 5, 5 et : 3, 5, 5, 5.
- Si $n = 16$, alors il y a plus de solutions : 4, 4, 4, 4 ; 3, 3, 5, 5 ; 3, 4, 4, 5 ; etc.

Compétences

- Comprendre et utiliser les contraintes inhérentes aux situations de partage ou de distribution.
- Mettre en œuvre des procédures et des compétences numériques acquises dans d'autres contextes pour gérer des décompositions d'une quantité (c'est-à-dire utiliser le nombre pour partager).

Matériel

- Des cubes ou des jetons, des boîtes pour ranger les jetons (voir figure 1).
- Des boîtes faisant office de camions : sur chaque boîte est dessiné un camion (voir figure 2).

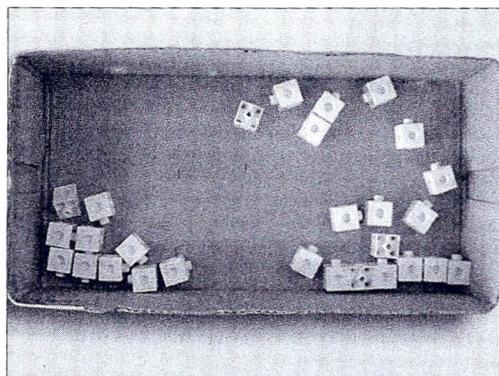


Figure 1 : la boîte de cubes à vider dans les camions



Figure 2 : les camions

Variables

- Les valeurs minimales et maximales (a et b) déterminent le contenu des camions. Elles sont importantes et déterminées par les capacités stables de dénombrement (ou d'appréhension globale de la quantité) des élèves.
- Le nombre de camions (p). Cette valeur détermine le nombre n de cubes ou jetons à partager (puisque : $0 < p \times a \leq n \leq p \times b$). Or ce nombre n est déterminé par les capacités des élèves au niveau non pas du dénombrement (ils peuvent réussir à partager sans savoir exactement combien ils ont de cubes), mais au niveau de l'appréhension globale de la quantité (si n est trop grand, un élève peut dire : « Je ne peux pas... Il y en a trop. »).
- Le nombre n désigné dans l'intervalle ($p \times a, p \times b$). Ce choix détermine le nombre de solutions. Si $n = p \times a$ (ou $p \times b$), il n'y a qu'une solution possible (a ou b objets par camion), ce qui risque de bloquer l'activité de l'élève et l'empêcher de faire des essais fructueux...

Organisation

Un groupe de six ou huit élèves est autour de l'enseignant(e). Les autres élèves sont répartis dans des ateliers, en autonomie avec un travail différent.

Déroulement

Phase 1 : avec le matériel (15 à 20 min) et appropriation (5 min).

Matériel : trois séries de camions contenant des jetons :

- Série S1 : 5 camions contenant : 3, 1, 5, 2, 4 (jetons).
- Série S2 : 6 camions contenant : 3, 4, 4, 5, 3, 3.
- Série S3 : 5 camions contenant : 3, 4, 4, 7, 2.

Cela correspond à 16 camions et 57 cubes (ou jetons).

L'enseignant(e) montre une boîte avec des jetons, et une série de camions vides.

Tous les élèves sont attentifs à la consigne.

Consigne : *Vous allez devoir mettre tous ces jetons dans ces camions. Mais attention :*

- il faut que tous les camions contiennent des jetons ;
- il ne faut pas qu'il y en ait trop dans un camion : pas plus de 5 ;
- mais pas trop peu : pas moins de 3...

Il faut, à la fin, que tous les jetons de la boîte soient dans les camions... Débrouillez-vous...

Nous allons d'abord vérifier si vous avez bien compris la consigne...

Une autre classe a déjà fait le travail... À votre avis, ces élèves ont-ils bien respecté la consigne ?

L'enseignant(e) montre les camions de la série S1. La réponse est négative, mais pourquoi ? (un camion est trop léger pour partir).

Puis il (elle) montre les deux autres séries : S2 est correcte, S3 est incorrecte (un camion est trop lourd).

Phase 2 : recherche.

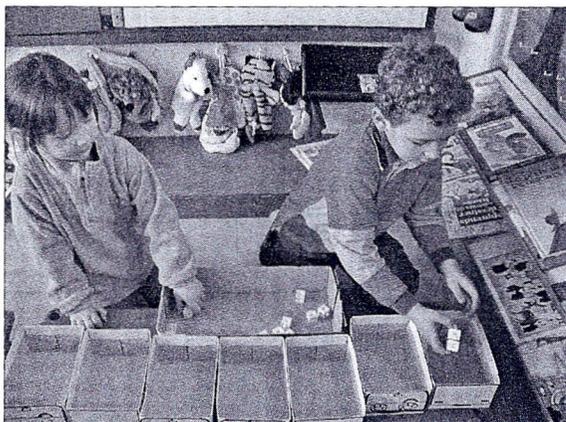
Quand il (elle) est assuré(e) que la consigne est bien intégrée, l'enseignant(e) distribue les boîtes de jetons et les camions, et incite les élèves à effectuer le travail.

Matériel : Les groupes sont constitués en fonction des performances des élèves :

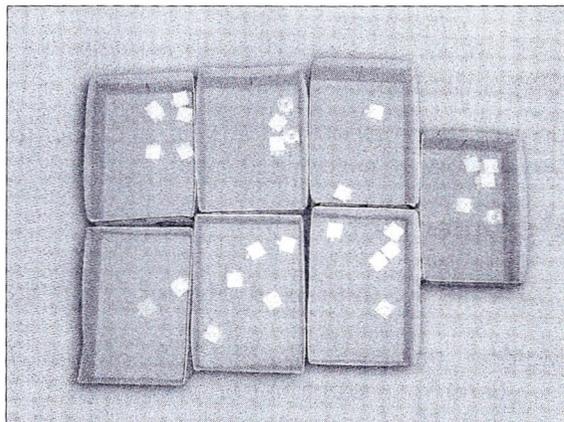
- Groupe G1 : 16 jetons et 4 camions (vides, cette fois).
- Groupe G2 : 19 jetons et 5 camions.
- Groupe G3 : 28 jetons et 7 camions.
- Total : 63 jetons et 16 camions en tout (les trois boîtes de jetons correspondant aux trois groupes sont remplies avant).

Consigne : À la fin, il ne doit rester aucun jeton dans la boîte.

La différenciation peut se faire également (en plus des valeurs numériques différentes) par la présence de l'enseignant(e) auprès de certains groupes.



Deux élèves remplissent les camions.



Pour $a = 3$, $b = 5$, $n = 28$, certains camions ne sont pas remplis correctement.

Phase 3 : mise en commun (pas plus de 10 min).

Elle se fait avec tous les élèves qui ont réalisé le partage et même ceux qui ne l'ont pas encore fait (ceux qui étaient en autonomie). En effet, elle est principalement axée sur le respect ou non des contraintes et le contrôle du contenu des camions.

L'enseignant(e) place les camions d'un groupe sur une table devant tous les élèves et leur demande si la répartition est correcte. Il (Elle) fait la même chose pour les autres groupes.

L'enseignant(e) peut ainsi lancer d'autres groupes dans la recherche, et inviter ceux qui ont réalisé un partage à travailler en autonomie.

Remarque : Cette situation se poursuit au CP ¹² en remplaçant les camions par des enveloppes et en faisant travailler les élèves à partir des jetons mais également des écritures chiffrées sur les enveloppes..

¹² Voir ERMEL, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes - CP*, Hatier, 2002, p. 101.

SITUATION 25 : Le goûter des souris**Niveaux :** PS, MS.**Description rapide**

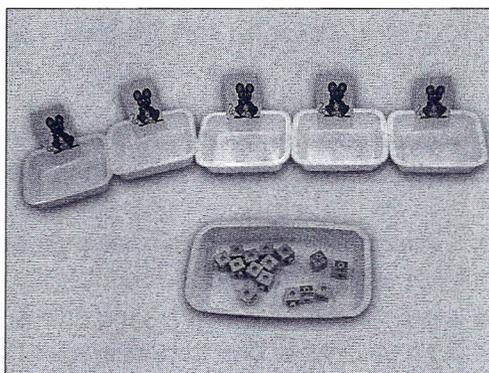
Distribution (équitable) de morceaux de fromage aux souris (des cubes représentent les morceaux).

Compétences

- Partager une collection en collections équipotentes.
- Dénombrer une quantité pour vérifier les résultats.
- Travailler en binômes et communiquer pour se mettre d'accord : c'est une compétence transversale.

Matériel**Par binôme**

- Cinq boîtes vides. Sur chacune est collée une image de souris.
- Quinze cubes (jeux de construction par exemple) représentant les fromages.
- Une boîte contenant les cubes à distribuer.



Le matériel

Organisation

Des ateliers autonomes et un groupe de huit élèves avec l'enseignant(e).

Variables

- Le nombre de boîtes, c'est-à-dire le nombre de parts.
- Le nombre de cubes à partager.
- Le nombre de cubes est un multiple du nombre de boîtes ou non. Si ce nombre est un multiple du nombre de parts, c'est nettement plus facile (tant qu'il reste des cubes, l'élève désire poursuivre le partage, ceci par un simple « effet de contrat »). Il est préférable qu'en PS et en MS, le nombre de cubes soit un multiple du nombre de boîtes. En GS, on peut envisager le cas contraire.¹³
- Le partage est équitable ou non. Si le partage n'est pas équitable, la tâche est nettement plus facile. On peut commencer, dans la phase d'appropriation, par un partage de ce type (la seule contrainte est que les boîtes ne soient pas vides). Le partage pourrait être inéquitable en PS et équitable en MS, ainsi qu'en GS.

¹³ Voir pour ceci, ERMEL, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes - GS*, Hatier, 1990, de la page 120 à la page 135.

Déroulement

Phase 1 : appropriation (faisable en PS).

Les élèves doivent avoir déjà manipulé les cubes dans d'autres situations.

Mais ils doivent également apprendre à les distribuer de façon à ce que toutes les souris puissent manger du fromage, c'est-à-dire apprendre à distribuer tous les cubes, sans que, pour autant, chaque souris ait le même nombre de cubes...

Consigne : Vous devez donner à manger aux souris, toutes les souris. Peu importe si elles ont beaucoup ou peu à manger, elles doivent toutes avoir à manger... Et tout le manger doit être distribué. On peut le reformuler ainsi : Cela veut dire que tous les cubes doivent être distribués, aucune boîte ne doit être vide...

Ce type de partage fait prendre conscience que le tas de cubes est composé d'éléments indépendants les uns des autres... Ce qui n'est pas forcément évident pour tous les élèves...

Phase 2 : le partage devient équitable (faisable en MS).

L'enseignant(e) présente aux élèves le matériel et les invite à le décrire (quinze cubes et cinq boîtes). Puis, il(elle) énonce la consigne.

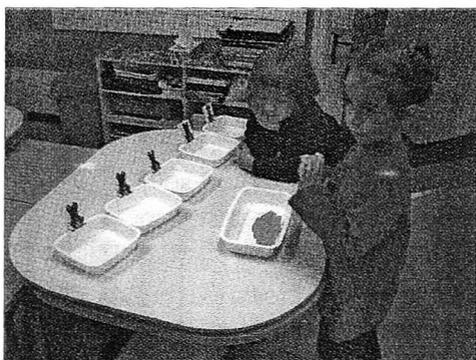
Consigne : Voici cinq souris. Elles sont toutes dans leur maison et elles ont faim, mais il n'y a plus rien dans leur réfrigérateur. Voici une boîte dans laquelle il y a des cubes de fromages. Il faut TOUT distribuer aux souris, mais attention : il ne faut pas qu'une souris soit avantagée, elles doivent toutes être approvisionnées de la même façon.

Vous allez travailler avec votre camarade et quand vous aurez fini, vous aurez réussi si tous les fromages sont distribués sans qu'aucune souris ne soit ni avantagée ni désavantagée.

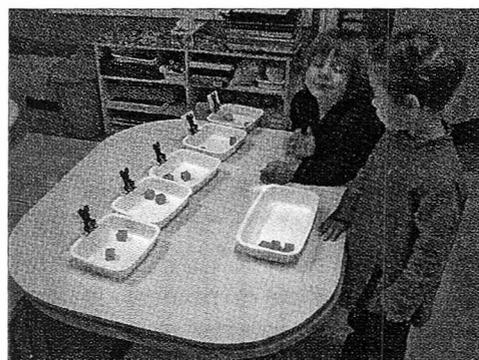
Remarque : La phase 2 n'est pas évidente, la validation par les autres binômes est importante.

En cas de réussite : l'enseignant(e) reprend avec un autre nombre de cubes et/ou de boîtes.

En cas d'échec : après formulation du constat (« Ici, il y a quatre cubes, et ici, six. »), on demande de refaire, sans trop insister sur l'erreur. En revanche, il est important que l'élève formule son échec.



Le partage peut commencer.



C'est bien parti, mais un tour reste possible !

Rôle de l'enseignant(e) : Il (Elle) rappelle les consignes dans les binômes, les précise avec un vocabulaire que tous les élèves soient capables de comprendre, sans pour autant en dénaturer son contenu didactique (attention aux ruptures du contrat).

Il (Elle) relance la recherche et fait valider le travail par les autres binômes à la fin de la séance.