SITUATION 12

Multiplication et longueur

Les élèves ont rencontré la multiplication dès le cycle 2 et lui ont attaché une première signification, celle d'additions réitérées : elle associe l'écriture 5 × 3 à la somme 3 + 3 + 3 + 3 + 3 (5 fois 3) ou à la somme 5 + 5 + 5 (5 multiplié par 3)[1].

Ils peuvent ainsi interpréter la multiplication $6 \times \frac{7}{3}$ comme étant la somme de 6 termes tous égaux à $\frac{7}{3}$ (6 fois $\frac{7}{3}$) mais pas l'appréhender en tant que produit de 6 par $\frac{7}{3}$ dans lequel c'est la fraction qui opère sur le nombre ($\frac{7}{3}$ de 6). Cette seconde approche devient pourtant indispensable pour donner un sens à des écritures du type $\frac{7}{3} \times 3{,}6$ ou $1{,}5 \times 4{,}8$ qui ne peuvent être vues comme des additions réitérées.

Cette nouvelle signification de la multiplication est à construire en fin de cycle 3. Elle est à mettre en lien avec celle de l'addition réitérée pour que le signe « × », lu soit « fois » soit « multiplié par », prenne sens lorsqu'il est étendu à l'opération « prendre une fraction d'une quantité ou d'un nombre », puis à la multiplication d'un nombre par un décimal.

ESTIMATION DE LA DURÉE

- Deux séances de 55 minutes.
- Exercices dont la durée est à déterminer par l'enseignant.

APPRENTISSAGES VISÉS

Dans un contexte de longueur :
- associer les opérations « multiplier un décimal par une fraction » et « prendre une fraction de ce décimal » ;
- associer les opérations « multiplier un nombre par un décimal » et « prendre une fraction décimale de ce nombre » ;
- se familiariser avec des techniques de calculs qui permettent d'effectuer le produit d'un nombre décimal par une fraction (ou par un décimal).

DESCRIPTION DE L'ACTIVITÉ

Pendant la première séance, les élèves travaillent seuls puis en binôme. Ils doivent découvrir des égalités en déterminant les mesures de segments longs comme un nombre de fois des bandes de longueurs données. La classe institutionnalise le fait que prendre un nombre de fois une fraction d'une unité revient à prendre la même fraction du nombre donné d'unités et que cette opération peut se traduire par une multiplication.

Dans la seconde séance, les élèves doivent choisir, parmi des bandes, celle qu'ils préfèrent utiliser pour construire, sans règle graduée, un premier puis un second segment dont les longueurs sont données sous

[1] Chacun des deux facteurs a alors un statut différent : celui de nombre qui exprime, parfois implicitement, une mesure de grandeur pour l'un et celui de nombre scalaire, non accompagné d'une unité et qui opère sur cette mesure, pour l'autre.

la forme du produit d'un entier puis d'un décimal. En synthèse, la classe établit des techniques permettant d'effectuer le calcul du produit, en lien avec les méthodes de constructions des segments.

MATÉRIEL

SÉANCE 1 QUEL EST LE PLUS LONG ?

Pour chaque élève, prévoir :
- une paire de ciseaux, de la colle, du ruban adhésif ;
- une demi-feuille énoncé de l'annexe S12 A1 E ;
- éventuellement une calculatrice pour la phase de validation et de réinvestissement.

Pour le professeur, prévoir :
- des bandes A de longueur 2,75 cm et des bandes B de longueur 6 cm, ainsi que quelques guide-ânes petit format (voir annexe S2 A2 E), à mettre à dispositions des élèves ;
- le diaporama « Quel est le plus long ? » (S12 A1 P) pour présenter les consignes et illustrer les procédures des élèves.

SÉANCE 2 CONSTRUIRE DES SEGMENTS

Pour chaque élève, prévoir :
- une paire de ciseaux, de la colle, du ruban adhésif ;
- l'annexe S12 A2 E ;
- éventuellement une calculatrice pour la phase de validation et de réinvestissement.

Pour le professeur, prévoir :
- des bandes de longueur 1,5 cm et 9 cm puis de longueur 5,2 cm et 4,5 cm ainsi que quelques guide-ânes petit format (voir annexe S2 A2 E), et des feuilles A4, à mettre à disposition des élèves qui les demanderaient ;
- les diaporamas « Construire un segment 1 » (S12 A2 P) et « Construire un segment 2 » (S12 A3 P) qui présentent les différentes procédures de construction.

DÉROULEMENT

SÉANCE 1 QUEL EST LE PLUS LONG ?

Phase 1

Le professeur distribue l'annexe S12 A1 E et demande aux élèves de dire lequel des trois enfants a tracé le segment le plus long. Après un temps de recherche individuelle, il recense les différentes propositions sans se prononcer sur leur validité. Puis il invite les élèves à vérifier leurs suppositions par binômes en déterminant la longueur de chacun des segments. Il précise que l'utilisation de la règle graduée n'est pas autorisée, mais qu'on peut, si on le juge nécessaire, découper les bandes A et B ou utiliser celles que le professeur tient à la disposition de la classe.

Après ces vérifications, le professeur recueille les mesures de longueur proposées pour chacun des trois segments. Il les met en débat et fait exposer les méthodes qui ont conduit aux différents résultats jusqu'à ce que la classe s'accorde sur leur égalité.

COMMENTAIRE

Pour le premier segment les élèves peuvent travailler avec l'écriture fractionnaire : calculer 6 fois $\frac{11}{4}$ cm = $\frac{66}{4}$ cm ou 6 fois (2 cm + $\frac{3}{4}$ cm) = 12 cm + $\frac{18}{4}$ cm = 16 cm + $\frac{2}{4}$ cm = 16 cm + $\frac{1}{2}$ cm. Ils peuvent aussi, après avoir identifié que $\frac{11}{4}$ cm = 2,75 cm, effectuer directement le calcul 6 fois 2,75 cm = 16,5 cm.

Pour le deuxième segment, les élèves se réfèrent à des manipulations sur les bandes. Pour cela, ils commencent :
- soit par découper mentalement la bande B pour obtenir des fractions de bandes et les reporter bout à bout : ce qui les conduit à calculer (6 cm : 4) × 11 = 16,5 cm ;

– soit par coller plusieurs bandes B bout à bout pour former une grande bande à partager ensuite dans le nombre de parts demandées : ce qui les amène à effectuer le calcul (6 cm × 11) : 4 = 16,5 cm.

Le calcul 2,75 cm × 6 donne directement la longueur du troisième segment. On fera remarquer que 2,75 cm peut aussi s'écrire $\frac{11}{4}$ cm.

INSTITUTIONNALISATION

Prendre $\frac{11}{4}$ de fois 6 cm revient à prendre 6 fois $\frac{11}{4}$ cm ou à multiplier $\frac{11}{4}$ cm par 6.

Ainsi on peut écrire : $6 \times \frac{11}{4}$ cm = $\frac{11}{4} \times 6$ cm.

Phase 2

Le professeur pose la question suivante :

« Mario affirme que, de même :

– prendre $\frac{7}{5}$ de fois 13 cm revient à prendre 13 fois $\frac{7}{5}$ cm ;

– et que prendre $\frac{4}{3}$ de 17 cm revient à prendre 17 fois $\frac{4}{3}$ cm.

A-t-il raison ? Justifier. »

Après un temps de recherche individuelle, il invite les élèves à vérifier leurs réponses par binômes et à mettre leurs explications par écrit.

Il met ensuite en débat les réponses apportées aux deux affirmations jusqu'à ce que la classe s'accorde sur leur validité.

Il demande alors si ces affirmations restent valides avec d'autres fractions et d'autres nombres entiers donnés.

COMMENTAIRE

Pour justifier ces affirmations les élèves peuvent effectuer les calculs :

– dans le premier cas, les réponses peuvent s'exprimer sous forme décimale : $\frac{7}{5}$ de fois 13 cm = 13 fois $\frac{7}{5}$ cm = 18,2 cm ;

– dans le second cas, il est nécessaire d'utiliser l'écriture fractionnaire pour exprimer les résultats en donnant leurs valeurs exactes : $\frac{4}{3}$ de 17 cm = 17 fois $\frac{4}{3}$ cm = $\frac{68}{3}$ cm.

La généralisation peut être menée sur un exemple générique avec ces écritures fractionnaires et s'appuyer sur un raisonnement : 4 fois $\frac{17}{3}$ cm = $\frac{4 \times 17}{3}$ cm = $\frac{17 \times 4}{3}$ cm = 17 fois $\frac{4}{3}$ cm.

INSTITUTIONNALISATION

Prendre un certain nombre de fois une fraction d'unités revient à prendre une fraction de fois ce nombre d'unités (cette fraction restant la même).

Ainsi 13 fois $\frac{7}{5}$ cm = $\frac{7}{5}$ fois 13 cm et peut s'écrire $13 \times \frac{7}{5}$ cm = $\frac{7}{5} \times 13$ cm.

Pour effectuer ce calcul, différentes méthodes sont possibles. Elles donnent toutes le même résultat.

Ainsi pour calculer $13 \times \frac{7}{5}$ ou $\frac{7}{5} \times 13$ on peut :

– calculer $13 \times \frac{7}{5}$ en le tapant directement à la calculatrice ;

– calculer (13 × 7) : 5 ;

– calculer (13 : 5) × 7 ;

– calculer $13 + 13 \times \frac{2}{5}$ ou 13 + (13 : 5 × 2).

Réinvestissement

On pourra demander aux élèves de produire d'autres égalités du type $13 \times \frac{7}{5}$ cm = $\frac{7}{5} \times 13$ cm et de les vérifier à la calculatrice.

COMMENTAIRE

L'utilisation de la calculatrice permet de lever les erreurs de calculs dans les divisions ou multiplication mais aussi d'accéder au résultat de la multiplication par la fraction en une seule opération. C'est l'occasion d'utiliser la touche d/c (ou n/d) de la calculatrice. Elle permet d'entrer un nombre dans la calculatrice sous une écriture fractionnaire mais aussi, selon le modèle de calculatrice, de faire apparaître des résultats sous forme fractionnaire ou décimale.

SÉANCE 2 CONSTRUIRE DES SEGMENTS

Phase 1

Le professeur distribue l'annexe S12 A2 E où la consigne « construire un segment de longueur 9 × 1,5 cm » est donnée par écrit. Il précise : « Attention, vous n'êtes pas autorisés à utiliser la règle graduée. Mais vous disposez de deux bandes, une de 9 cm et une autre de 1,5 cm. Vous pouvez découper celle que vous préférez pour construire votre segment. Vous le construirez à l'aide de cette bande, puis vous chercherez quelle est sa longueur. Vous expliquerez ensuite comment vous avez procédé. Si vous avez besoin de matériel vous pouvez me le demander. »

Après un temps de recherche individuelle, les élèves sont invités à vérifier leurs résultats par 2. La mise en commun permet de mettre en évidence et d'expliciter les différentes méthodes utilisées.

COMMENTAIRE

L'ordre dans lequel les facteurs sont donnés dans l'énoncé (9 × 1,5 cm) peut inciter les élèves à construire le segment en reportant 9 fois la bande de 1,5 cm. Toutefois, cette procédure est longue et il probable que certains d'entre eux préfèrent reporter une fois et demi la bande de 9 cm. D'autres encore peuvent associer 1,5 à $\frac{15}{10}$ et réclamer un guide-âne pour partager la bande de 9 cm en 10 parties égales. Le professeur pourra illustrer ces procédures à l'aide du diaporama « Construire un segment 1 » (S12 A2 P). Si elles n'apparaissent pas spontanément, il attendra la phase suivante pour les présenter.

Phase 2

La même activité est reprise avec des modalités similaires, mais cette fois-ci les dimensions données sont toutes non entières. Il s'agit de construire un segment de longueur 5,2 × 4,5 cm (23,4 cm) sur une feuille suffisamment grande. Les élèves construisent le segment seuls. Ils sont ensuite invités à vérifier leurs constructions de segments en binômes et à chercher le maximum de façons de calculer sa longueur exacte. La mise en commun vise à mettre en évidence le lien entre les méthodes de construction et les méthodes de calcul.

COMMENTAIRE

Cette fois-ci le report d'unités entières n'est plus possible. Il faut revenir à la signification fractionnaire des écritures décimales et par exemple utiliser les égalités $5{,}2 = 5 + \frac{2}{10}$ ou $4{,}5 = 4 + \frac{1}{2}$ pour pouvoir opérer sur une des bandes données et construire le segment demandé.

Bien que la multiplication de deux décimaux apparaisse dans cette activité, il est encore trop tôt pour aborder la technique de la multiplication posée de deux nombres en écriture décimale.

En bilan, on pourra illustrer les procédures possibles sur le diaporama « Construire un segment 2 » (S12 A3 P).

INSTITUTIONNALISATION

Elle s'appuie sur les propositions des élèves et peut porter sur tout ou partie des éléments suivants :
– pour construire un segment de longueur 4,5 × 5,2 cm, on peut prendre 4,5 fois 5,2 cm ou 5,2 fois 4,5 cm ;
– pour calculer sa longueur, différentes méthodes sont possibles ; ainsi pour calculer 5,2 fois 4,5 cm, on peut :
  - prendre $\frac{52}{10}$ de 4,5 et calculer (4,5 : 10) × 52 ou (4,5 × 52) : 10 ;
  - prendre 5 fois 4,5 cm et encore $\frac{2}{10}$ (ou $\frac{1}{5}$) de fois 4,5 cm ;
  - prendre $\frac{45}{10}$ de 5,2 ;
  - prendre 4 fois 5,2 et encore $\frac{5}{10}$ (ou $\frac{1}{2}$) de fois 5,2 ;
  - effectuer 5,2 × 4,5 en tapant directement les nombres en écritures décimales à la calculatrice.

Réinvestissement
On pourra proposer des exercices du type de ceux proposés en annexe S12 A4 E. Ce sont essentiellement des mises en application des techniques rencontrées en séances 1 et 2.

L'exercice n° 2 permet d'aborder le cas où le résultat du calcul n'est pas un décimal. Ce sera l'occasion de revenir sur le quotient de deux nombres en écriture fractionnaire et la distinction entre valeur exacte et valeur approchée. On pourra rappeler que le résultat exact du produit d'une fraction par un nombre peut toujours s'exprimer sous la forme fractionnaire et parfois seulement sous la forme d'un nombre en écriture décimale.