Séance du samedi 9 mars 2013

Accélération d'une suite par la méthode de Richardson

Leçons : 251, 201, 215, 233, 238, 241, 255, 256
Exercices : 401, 403, 406, 418, 432, 433, 444
Références : [2], [6]

Principe

On suppose qu'une suite admet un développement asymptotique de la forme

$$x_n = \alpha + \beta\lambda^n + \gamma\mu^n + o(\mu^n) \text{ avec } (\beta, \gamma) \neq (0, 0) \text{ et } 0 < |\mu| < |\lambda| < 1$$

On accélère la suite (x_n) en la remplaçant par $y_n = \dfrac{x_{n+1} - \lambda x_n}{1 - \lambda}$ ou plus simplement par $y_n = x_n - \beta\lambda^n$ si β est connu. Dans chaque cas, (y_n) converge plus rapidement que (x_n) et la convergence est géométrique de vitesse μ. On peut réitérer le procédé sur y_n etc.

Un exemple classique : approximation de π

La suite $u_n = n \sin \dfrac{\pi}{n}$ converge vers π mais lentement. On peut déjà accélérer cette suite en calculant $U_n = u_{2^n}$ de vitesse de convergence $\dfrac{1}{4}$. Comme on ne peut pas utiliser $\dfrac{\pi}{2^n}$ pour le calcul de U_n, on va utiliser la suite $V_n = \cos \dfrac{\pi}{2^n}$. On a alors les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} V_{n+1} = \sqrt{\dfrac{V_n + 1}{2}} \text{ avec } V_1 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{V_{n+1}} \text{ avec } U_1 = 2 \end{cases}$$

On trouve ensuite à partir du développement limité de $\sin x$ en 0 un développement asymptotique de U_n :

$$U_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{\pi^5}{5!}\left(\frac{1}{16}\right)^n - \frac{\pi^7}{7!}\left(\frac{1}{64}\right)^n + o\left(\frac{1}{64^n}\right)$$

On ne peut évidemment pas utiliser $\dfrac{\pi^3}{3!}, \dfrac{\pi^5}{5!}, \dfrac{\pi^7}{7!}$ pour accélérer U_n, d'où à partir de U_n, le calcul de $W_n = \dfrac{U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{4U_{n+1} - U_n}{3}$ qui converge à la vitesse $\dfrac{1}{16}$. On peut alors réitérer le procédé pour avoir une suite qui converge à la vitesse $\dfrac{1}{64}$

1. Programmer le calcul de U_n sur un tableur. Quelle est la meilleure approximation possible de π ?

2. Programmer le calcul de U_n sur Xcas puis celui de W_n.

3. Réitérer le processus.

4. Donner une approximation de π avec 500 chiffres

Approximation de e

En utilisant la suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et en reprenant le même procédé que celui décrit pour π, on peut déterminer une approximation de e. Pour cela, on cherche le développement de $\exp\left(\frac{ln(1+x)}{x}\right)$ en 0 qui est donné par `series`.
On cherche ensuite le développement asymptotique de $U_n = u_{2^n}$ que l'on accélère par la méthode de Richardson. Calculer 500 décimales de e.

Approximation de γ

On sait que $U_n = H_n - \ln n$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ converge très lentement vers γ. Le développement asymptotique de H_n doit être calculé terme à terme. On trouve :

$$U_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

Comparer la rapidité de convergence des différentes suites vers γ.

Méthode de Monte Carlo

Leçons : 220, 233, 238, 241, 252, 255, 256
Exercices : 421, 425, 432, 433, 435, 437, 442
Références : [1], [3]

Un exemple historique : l'aiguille de Buffon

La probabilité qu'une aiguille de longueur a chevauche une latte de largeur b est $\frac{2a}{b\pi}$.[1] On va prendre y comme variable uniforme sur $[0, b]$ et α sur $[-\pi, \pi]$ à l'aide de la fonction `rand`. L'aiguille chevauche la latte supérieure si $y + a\sin\alpha > b$.

1. Simuler le lancement d'une aiguille de côté $1\,cm$ sur une latte de côté $1\,cm$.

2. Simuler le lancement d'une aiguille de côté $a\,cm$ sur une latte de côté $b\,cm$ ($a < b$). Tester le cas $a := 78,5398\,cm$, $b := 1\,m$ pour deux lancers.

Approximation de π

Dans un carré $ABCD$ de côté 1, un point pris au hasard possède une probabilité de $\frac{\pi}{4}$ d'être dans le quart de cercle centré sur A et de rayon 1. Écrire un programme, ayant comme argument n le nombre de points aléatoires et donnant la valeur approchée de π.
La convergence est - elle rapide ?

[1] Voir ce site ou Delahaye [3]

Amélioration de la convergence

On peut considérer l'exercice précédent comme le calcul de $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$
On prend alors une variable aléatoire t uniforme sur $[0,1]$ et on calcule la moyenne des $f(t)$ qui converge vers I. Écrire la procédure correspondante et vérifier qu'elle converge plus rapidement que la précédente.

Résolution de l'équation f(x)=0

Leçons : 208, 251, 201, 233, 241, 255, 256, 257
Exercices : 401, 403, 432, 443, 444
Références : [2], [6], [5]

Méthode du point fixe

On cherche à résoudre l'équation $x = e^{-x}$. La fonction $f(x) = e^{-x}$ possède un point fixe et la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers une solution que l'on nommera α avec x_0 convenablement choisi.

1. Déterminer une valeur approchée de α avec `fsolve` ou `resoudre_numerique`
2. Écrire une procédure ayant comme argument n et x_0 qui calcule x_n
3. Déterminer une valeur de x_0 et de n en déduire une valeur approchée de α
4. Comparer la valeur obtenue à la valeur donnée par Xcas.
5. Utiliser `plotseq` pour illustrer la démarche.

Méthode de Newton-Raphson

Principes et application au cas précédent

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ en partant d'une valeur x_0 "proche" de la solution $\bar{x}$ et en approximant la fonction par sa tangente. On construit alors une suite

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On montre que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et si $f'(\bar{x}) \neq 0$ alors la suite est d'ordre 2.

Programmer la méthode de Newton pour approcher α de l'exercice précédent. Montrer que la la méthode est bien d'ordre 2. On pourra utiliser `plotfunc` et `tangent` pour illustrer la démarche.

Cas particuliers

1. Écrire un programme permettant d'approcher l'inverse d'un nombre réel uniquement en utilisant la somme/différence et le produit. Donner une approximation de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{\pi}$
2. Sous les mêmes contraintes, écrire une procédure permettant d'approcher la racine carrée d'un réel positif sans utiliser le calcul d'inverse. Donner une approximation de $\sqrt{2}$, $\sqrt{\pi}$.

Accélération de séries alternées

Leçons : 216, 201, 207, 233, 241, 255, 256
Exercices : 401, 403, 404, 408, 415, 432, 433, 444
Référence : [4], [5]

On se donne les 3 séries alternées suivantes qui sont de convergence (très) lente et que l'on va chercher à accélérer.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln(2)$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots = (1 - 2^{-2})\zeta(3)$$

Calculer la valeur obtenue pour chaque série après 100 itérations et déterminer la précision obtenue.

Transformée d'Euler d'une série alternée

Un théorème

Soit une série alternée de terme général $(-1)^n u_n = (-1)^n f(n)$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{aligned}
\Delta^0 u_k &= u_k \\
\Delta u_k &= u_k - u_{k+1} \\
\Delta^p u_k &= \Delta^{p-1} u_k - \Delta^{p-1} u_{k+1}
\end{aligned}$$

On fait l'hypothèse que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f^{(p)}$ est décroissante en valeur absolue et de signe constant. On a alors

$$\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k u_k = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=p} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}}$$

Une majoration de l'erreur est donnée par $\dfrac{1}{2^{p+1}} \left| \Delta^{p+1} u_0 \right|$

La démonstration

1. On pose $g(x) = f(x) - f(x+1)$ et $v_n = \Delta u_n = g(n)$. On montre par récurrence sur p grâce au théorème des accroissements finis que
$$\forall p \geqslant 1 \; \exists x \in]n; n+p[\, , \; \Delta^p u_n = (-1)^p f^{(p)}(x)$$
Et donc que $\Delta^p u_n$ est une suite monotone tendant vers 0.

2. On montre par récurrence sur p que :
$$\forall p > 0 \quad \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\Delta^k u_0}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^p} \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \Delta^p u_k$$

3. Puisque $\sum\limits_{k \geqslant 0} (-1)^k \Delta^p u_k$ est une série alternée convergente, $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{1}{2^p} \sum\limits_{k \geqslant 0} (-1)^k \Delta^p u_k = 0$ et la série $\left| \sum\limits_{k \geqslant 0} (-1)^k \Delta^p u_k \right|$ est majorée par son premier terme.

Algorithme naïf

On pose `D1(u,k):=u(k)-u(k+1)`.

1. Écrire une procédure récursive `D2(u,p,k)` qui calcule $\Delta^p u_k$ *(prévoir un cas d'arrêt pour $p = 0$).*
2. Pour chaque série, déterminer le nombre d'itération nécessaires pour obtenir 5 chiffres significatifs et donner une valeur approchée avec 5 chiffres significatifs de $\ln(2)$, π, $\zeta(3)$
3. Peut-on avec cette méthode obtenir 100 chiffres significatifs ?

Algorithme naïf bis

Le programme récursif n'est pas le mieux adapté au calcul de $\Delta^p u_k$ puisque l'on calcule plusieurs fois le même terme. On peut préférer calculer "directement" $\Delta^p u_k$ en utilisant la formule : $\Delta^p u_k = \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \binom{p}{n} u_{k+n}$

1. Écrire une procédure itérative `D3(u,p,k}` qui calcule $\Delta^p u_k$
2. Comparer la vitesse d'exécution avec la procédure `D2`
3. Peut-on avec cette méthode obtenir 100 chiffres significatifs ?

Accélération d'une série à terme positif

On peut appliquer la méthode précédente en utilisant l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^s} = (1 - \frac{1}{2^{s-1}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = (1 - \frac{1}{2^{s-1}}) \zeta(s)$$

Calcul de $\zeta(2)$ avec la transformée de Fourier

Pour $s = 2$, on a le résultat $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On obtient ce résultat en calculant les termes de la transformée de Fourier de la fonction 2π périodique sur $[-\pi, \pi]$, $f(t) = \frac{t}{2}$ puis en concluant avec l'égalité de Parseval. Faire les calculs nécessaires avec le logiciel grâce à `fourier_an`, `fourier_bn` et `int`.

Accélération de la convergence

Appliquer la transformation d'Euler et vérifier qu'elle converge plus rapidement que la suite initiale.

References

[1] C Brezinski. *Algorithmique Numérique.* Ellipses, 1988.

[2] JF Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation interne, analyse et probabilité.* Vuibert, 2007.

[3] JP Delahaye. *Le fascinant nombre Pi.* Belin, 1998.

[4] W Giorgi. *Thèmes mathématiques pour l'agregation.* Masson, 1998.

[5] X Gourdon P Dumas. *Maple, Son bon usage en mathématiques.* Springer.

[6] J-E Rombaldi. *Eléments d'analyse réelle.* EDP Sciences, 2004.