1 Énoncé

1.1 Conjectures

On considère deux suites p et q définies par la donnée de $p_0 \in [0;1]$ et de $q_0 = 1 - p_0$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 0{,}3\, q_n \\ q_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}7\, q_n \end{cases}$$

1. (a) Dans une feuille de tableur, faire afficher les premiers termes des suites (p_n) et (q_n).
   (b) Émettre une conjecture sur la convergence de ces deux suites. La conclusion semble-t-elle dépendre de la valeur initiale p_0 ?
   (c) Émettre des conjectures sur les variations des suites (p_n) et (q_n) suivant les valeurs de p_0.
   (d) Semble-t-il exister une relation « simple » entre p_n et q_n ?
   (e) Placer sur un graphique de la feuille de calcul les premiers points $M_n\,(p_n; p_{n+1})$. Quelle relation peut-on conjecturer entre p_{n+1} et p_n ?
2. On notera ℓ_p la limite conjecturée pour la suite (p_n).
   (a) Faire afficher les valeurs de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = p_n - \ell_p$.
   (b) Faire une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.

1.2 Interprétation.

(BAC L 1998) À Cloche-Merle, la campagne électorale fait rage. Deux listes A et B s'affrontent.
La qualité des orateurs et l'indécision des électeurs fait que chaque jour 20% des personnes favorables à la liste A et 30% des personnes favorables à la liste B changent d'avis le jour suivant.
Chaque jour de campagne, on interroge un électeur au hasard. On note :
- A_n : « l'électeur est favorable à la liste A le $n^{\text{ième}}$ jour de la campagne ».
- B_n : « l'électeur est favorable à la liste B le $n^{\text{ième}}$ jour de la campagne ».

On note p_n la probabilité de A_n et q_n la probabilité de B_n.

1. En supposant que toutes les personnes sont favorables à l'une des deux listes (pas de vote blanc ou d'abstention), montrer que les suites (p_n) et (q_n) satisfont la définition de la partie 1.
2. Peut-on en déduire le vainqueur de l'élection ? Expliquer en revenant à votre feuille de calcul.

1.3 Démonstrations

1. Démontrer la conjecture faite sur la relation liant p_n et q_n.
2. Démontrer la conjecture faite sur la suite (u_n).
3. Démontrer les conjectures faites sur les convergences et les variations.

2 Corrigé, commentaires

2.1 Sujets

Les sujets liés à celui-ci : sujet 005 de 2007 ; sujets 007, 013 de 2008.

2.2 Intérêt de l'utilisation des TICE

1. Visualisation de la convergence des suites, de la vitesse de convergence.
2. Facilite la compréhension de la situation.
3. Dans une formation initiale, les questions peuvent être comme dans l'énoncé précédent assez explicites. A plus long terme, l'un des objectifs de l'utilisation des TICE doit être de permettre une plus grande prise d'initiatives par les élèves.

   Des méthodes de recherche classiques parfois laissées en partie de côté dans l'enseignement en TS pour cause de manque de temps et de manque de maîtrise du calcul élémentaire par les élèves peuvent ainsi ressurgir.

   Les méthodes de cet énoncé peuvent par exemple être soulignées auprès des élèves comme étant des méthodes de référence pour chercher à obtenir de l'information :
   (a) différence de termes,
   (b) rapport de termes,
   (c) terme p_{n+1} en fonction de p_n,
   (d) différence $p_n - \ell$ où ℓ est la limite conjecturée pour la suite (p_n),
   (e) chercher des comparaisons avec les suites de référence (suites géométriques et arithmétiques notamment),
   (f) faire des représentations graphiques pour trouver des réponses aux questions précédentes,
   (g) (liste à complèter).

   Avec ce type d'approche, il s'agit bien d'enseigner des démarches mathématiques.

2.3 Conjectures

1. (a) La suite (p_n) semble converger vers 0,6 ; la suite (q_n) vers 0,4.
   (b) i. Pour $p_0 = 0{,}6$, les suites semblent constantes.
      ii. Pour $0 \leqslant p_n < 0{,}6$, la suite (p_n) semble croissante et la suite (q_n) semble décroissante.
      iii. Pour $0{,}6 < p_n \leqslant 1$, la suite (p_n) semble décroissante et la suite (q_n) semble croissante.
      iv. Les points $(p_n; p_{n+1})$ semblent alignés : $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}3$
   (c) Il semble que $p_n + q_n = 1$ pour tout entier naturel n.
2. (a) La suite (u_n) semble géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

2.4 Des démonstrations

2.4.1 $p_n + q_n = 1$

On a $p_0 + q_0 = 1$ et pour tout entier n :

$$p_{n+1} + q_{n+1} = 0{,}8\, p_n + 0{,}3\, q_n + 0{,}2\, p_n + 0{,}7\, q_n = p_n + q_n$$

2.4.2 $u_n = u_0 \times 0{,}5^n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \ell_p \\ &= 0{,}8\,p_n + 0{,}3\,q_n - 0{,}6 \\ &= 0{,}8\,p_n + 0{,}3\,(1 - p_n) - 0{,}6 \\ &= 0{,}5\,p_n + 0{,}3 - 0{,}6 \\ &= 0{,}5\,(p_n - 0{,}6) \\ &= 0{,}5 u_n \end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times 0{,}5^n$$

2.4.3 Convergence des suites, monotonie

On a pour tout entier naturel n :

$$p_n = (p_0 - 0{,}6)\,0{,}5^n + 0{,}6 \quad \text{et} \quad q_n = 1 - p_n = -\,(p_0 - 0{,}6)\,0{,}5^n + 0{,}4$$

D'où les résultats sur les variations et les limites.

2.5 Partie « interprétation »

On saucissonne les événements du rang $n+1$ par les événements du rang n :

$$\begin{aligned} P\left(A_{n+1}\right) &= P\left(A_{n+1} \cap A_n\right) + P\left(A_{n+1} \cap B_n\right) \\ &= 0{,}8\,p_n + 0{,}3\,q_n \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} P\left(B_{n+1}\right) &= P\left(B_{n+1} \cap A_n\right) + P\left(B_{n+1} \cap B_n\right) \\ &= 0{,}2\,p_n + 0{,}7\,q_n \end{aligned}$$

Par ailleurs $p_n + q_n = 1$ puisque tous votent pour A ou B.
Le résultat $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}6$ peut s'interpréter par le fait que la liste A l'emportera avec environ 60 % des voix. Mais, ceci, à condition que la campagne dure suffisamment de temps. L'observation de la feuille de tableur montre que la convergence est rapide et que même avec un très mauvais départ, la liste A dépasse les 50% en quelques jours.
Lorsque l'expression de p_n en fonction de n est explicitée, la détermination du premier jour n tel que $p_n > 0{,}5$ est facile.
Avec par exemple :

$$\begin{cases} p_0 = 0{,}1 \\ p_{n+1} = 0{,}99 p_n + 0{,}05 q_n \\ q_{n+1} = (1 - 0{,}99)\,p_n + (1 - 0{,}05)\,q_n \end{cases}$$

on obtient :

	A	B	C
1	Indices	p(n)	q(n)
2			
3			
4	0	0,1000000000	1,0000000000
5	1	0,1490000000	0,9510000000
6	2	0,1950600000	0,9049400000
7	3	0,2383564000	0,8616436000
8	4	0,2790550160	0,8209449840
9	5	0,3173117150	0,7826882850
10	6	0,3532730121	0,7467269879
11	7	0,3870766314	0,7129233686
12	8	0,4188520335	0,6811479665
13	9	0,4487209115	0,6512790885
14	10	0,4767976568	0,6232023432
15	11	0,5031897974	0,5968102026
16	12	0,5279984096	0,5720015904
17	13	0,5513185050	0,5486814950

Avec une campagne d'au plus 11 jours, la liste A est donc perdante. On peut ainsi soulever de façon simple la notion de vitesse de convergence.

2.6 Généralisation

Avec des coefficients "variables" :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-\alpha)\, p_n + \beta q_n \\ q_{n+1} = \alpha p_n + (1-\beta)\, q_n \end{cases}$$

et la feuille de tableur :

	A	B	C
1	Indices	p(n)	q(n)
2			
3			
4	0	0,1000000000	1,0000000000
5	1	0,3800000000	0,7200000000
6	2	0,5200000000	0,5800000000
7	3	0,5900000000	0,5100000000
8	4	0,6250000000	0,4750000000
9	5	0,6425000000	0,4575000000
10	6	0,6512500000	0,4487500000
11	7	0,6556250000	0,4443750000
12	8	0,6578125000	0,4421875000
13	9	0,6589062500	0,4410937500
14	10	0,6594531250	0,4405468750
15	11	0,6597265625	0,4402734375
16	12	0,6598632813	0,4401367188
17	13	0,6599316406	0,4400683594

I	J
0,8000000000	0,3000000000
0,2000000000	0,7000000000

	A	B	C
1	Indices	p(n)	q(n)
2			
3			
4	0	0,1000000000	=J10
5	1	=$I$4*B4+$J$4*C4	=$I$5*B4+$J$5*C4
6	2	=$I$4*B5+$J$4*C5	=$I$5*B5+$J$5*C5
7	3	=$I$4*B6+$J$4*C6	=$I$5*B6+$J$5*C6
8	4	=$I$4*B7+$J$4*C7	=$I$5*B7+$J$5*C7
9	5	=$I$4*B8+$J$4*C8	=$I$5*B8+$J$5*C8
10	6	=$I$4*B9+$J$4*C9	=$I$5*B9+$J$5*C9
11	7	=$I$4*B10+$J$4*C10	=$I$5*B10+$J$5*C10
12	8	=$I$4*B11+$J$4*C11	=$I$5*B11+$J$5*C11
13	9	=$I$4*B12+$J$4*C12	=$I$5*B12+$J$5*C12
14	10	=$I$4*B13+$J$4*C13	=$I$5*B13+$J$5*C13
15	11	=$I$4*B14+$J$4*C14	=$I$5*B14+$J$5*C14
16	12	=$I$4*B15+$J$4*C15	=$I$5*B15+$J$5*C15
17	13	=$I$4*B16+$J$4*C16	=$I$5*B16+$J$5*C16

I	J
0,8000000000	0,3000000000
=1-I4	=1-J4

on pourra envisager le cas général (convergence de la suite (p_n) vers $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$).