

1 Énoncé

On dispose d'une roue divisée en trois secteurs identiques numérotés 1, 2 et 3.

On suppose qu'après rotation la roue s'arrête sur l'un des trois secteurs de façon équiprobable.

On fait tourner trois fois de suite la roue en supposant les résultats indépendants.

On désigne par S la variable aléatoire définie par la somme des trois numéros obtenus.

On désigne par U , D et T les variables aléatoires donnant respectivement le numéro obtenu lors de la première rotation, lors de la seconde rotation, lors de la troisième rotation.

2 Travail sur tableur

1. Dans une feuille de tableur, réaliser une simulation de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer pour cette simulation les répartitions des fréquences pour la variable aléatoire S .
3. Faire afficher, pour la simulation, les fréquences des événements $(S = 4)$, $(D = 1)$, $(S = 4) \cap (D = 1)$. Que suggèrent les résultats ?
4. Faire afficher, pour la simulation, les fréquences des événements $\{|D - U| = 0\}$, $\{|D - T| = 2\}$ et $\{|D - T| = 2\} \cap \{|D - U| = 0\}$. Que suggèrent les résultats ?

3 Justifications

1. Déterminer la loi de D .
2. Déterminer la loi de S .
3. Les événements $(S = 4)$ et $(D = 1)$ sont-ils indépendants ?
4. Les événements $\{|D - U| = 0\}$ et $\{|D - T| = 2\}$ sont-ils indépendants ?

Corrigé, commentaires

1 Compétences TICE

1. Utilisation de la fonction ALEA.ENTRE.BORNES ou de la fonction ALEA (instruction =ENT(3*ALEA()+1)).
2. Fonction SOMME.
3. Fonction NB.SI pour les effectifs (ou fonction FREQUENCE nécessitant la notion de formule matricielle).
4. Fonction SI et utilisation du ET.

2 Apport TICE

La feuille de calcul n'apporte rien pour le problème lui-même, mais :

- Avec un échantillon de taille suffisante, les résultats de la feuille de calcul constituent un bon élément de contrôle des calculs exécutés ensuite pour la partie démonstration.
 - L'utilisation "pratique" de la loi des grands nombres renforce le sens de cette loi (normalement déjà acquise en terminale).
- L'observation d'élèves montre que ceux qui n'ont pas encore acquis la notion de "loi des grands nombres" se contentent d'un échantillon de taille 30 environ (raison évoquée : « ça tient dans la partie visible de la feuille »).

3 Place dans la progression

- Sans question sur l'indépendance, la situation relève de la classe de première.
- En terminale, la situation peut éventuellement servir pour "réactiver" les compétences TICE nécessaires en simulation avant une séance menant à une résolution de problème plus difficile.

4 Feuille tableur 1

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P |
|----|---|---|---|---|---|---|-----------------------------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|---|-------|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 5 | 0 | | Valeurs de S | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 0 | | effectifs | 3689 | 5471 | 10911 | 25360 | 10938 | 5441 | 3726 | | 65536 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 0 | | fréquences | 0,06 | 0,08 | 0,17 | 0,39 | 0,17 | 0,08 | 0,06 | | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 5 | 3 | 1 | 3 | 7 | 0 | | PROBAS | 0,04 | 0,11 | 0,22 | 0,26 | 0,22 | 0,11 | 0,04 | | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 3 | 5 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 7 | 3 | 3 | 1 | 7 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 8 | 1 | 3 | 3 | 7 | 0 | | Effectif de S=4 | | 5471 | | | | | | | |
| 9 | 1 | 2 | 1 | 4 | 0 | | Fréquence de S=4 | | 0,08 | | | | | | | |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 6 | 0 | | | | | | 0,03 | 0,04 | | | | |
| 11 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | | Effectif de D=1 | | 21742 | | | | | | | |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 3 | 0 | | Fréquence de D=1 | | 0,33 | | | | | | | |
| 13 | 3 | 3 | 1 | 7 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 14 | 2 | 1 | 2 | 5 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 15 | 2 | 3 | 1 | 6 | 0 | | Effectif de (D=1) et (S=4) | | 3681 | | | | | | | |
| 16 | 1 | 2 | 2 | 5 | 0 | | Fréquence | | 0,06 | 0,07 | | | | | | |
| 17 | 3 | 3 | 3 | 9 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 18 | 3 | 1 | 3 | 7 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 19 | 3 | 2 | 1 | 6 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 20 | 2 | 2 | 2 | 6 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 21 | 2 | 2 | 2 | 6 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 22 | 1 | 2 | 3 | 6 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 23 | 3 | 2 | 1 | 6 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 24 | 2 | 3 | 3 | 8 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 25 | 2 | 2 | 2 | 6 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 26 | 3 | 1 | 3 | 7 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 27 | 1 | 3 | 3 | 7 | 0 | | | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E |
|----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------|-----------------------------|
| 1 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A1:C1) | =SI((B1=1) ET (D1=4);1;0) |
| 2 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A2:C2) | =SI((B2=1) ET (D2=4);1;0) |
| 3 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A3:C3) | =SI((B3=1) ET (D3=4);1;0) |
| 4 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A4:C4) | =SI((B4=1) ET (D4=4);1;0) |
| 5 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A5:C5) | =SI((B5=1) ET (D5=4);1;0) |
| 6 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A6:C6) | =SI((B6=1) ET (D6=4);1;0) |
| 7 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A7:C7) | =SI((B7=1) ET (D7=4);1;0) |
| 8 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A8:C8) | =SI((B8=1) ET (D8=4);1;0) |
| 9 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A9:C9) | =SI((B9=1) ET (D9=4);1;0) |
| 10 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A10:C10) | =SI((B10=1) ET (D10=4);1;0) |
| 11 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A11:C11) | =SI((B11=1) ET (D11=4);1;0) |
| 12 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A12:C12) | =SI((B12=1) ET (D12=4);1;0) |
| 13 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A13:C13) | =SI((B13=1) ET (D13=4);1;0) |
| 14 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A14:C14) | =SI((B14=1) ET (D14=4);1;0) |
| 15 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A15:C15) | =SI((B15=1) ET (D15=4);1;0) |
| 16 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A16:C16) | =SI((B16=1) ET (D16=4);1;0) |
| 17 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A17:C17) | =SI((B17=1) ET (D17=4);1;0) |
| 18 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A18:C18) | =SI((B18=1) ET (D18=4);1;0) |
| 19 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | =SOMME(A19:C19) | =SI((B19=1) ET (D19=4);1;0) |

| | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|----|----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1 | Valeurs de S | | | | | | | | |
| 2 | effectifs | =NB.SI(\$D\$1:\$D\$65536;H1) | =NB.SI(\$D\$1:\$D\$65536;I1) | =NB.SI(\$D\$1:\$D\$65536;J1) | =NB.SI(\$D\$1:\$D\$65536;K1) | =NB.SI(\$D\$1:\$D\$65536;L1) | =NB.SI(\$D\$1:\$D\$65536;M1) | =NB.SI(\$D\$1:\$D\$65536;N1) | =NB.SI(\$D\$1:\$D\$65536;O1) |
| 3 | fréquences | =H2/\$P\$2 | =I2/\$P\$2 | =J2/\$P\$2 | =K2/\$P\$2 | =L2/\$P\$2 | =M2/\$P\$2 | =N2/\$P\$2 | =O2/\$P\$2 |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | PROBAS | =1/3*1/3*1/3 | =1/3*1/3*1/3 | =1/3*1/3*1/3 | =7*1/27 | =6*1/27 | =3*1/27 | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | Effectif de S=4 | | =NB.SI(D1:D65536;4) | | | | | | |
| 9 | Fréquence de S=4 | | =I8/P2 | | =I8*I12 | =1/27 | | | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | Effectif de D=1 | | =NB.SI(B1:B65536;1) | | | | | | |
| 12 | Fréquence de D=1 | | =I11/P2 | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | |
| 15 | Effectif de (D=1) et (S=4) | | =NB.SI(E1:E65536;1) | | | | | | |
| 16 | Fréquence | | =I15/P2 | =2*1/27 | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | |

5 Feuille tableur 2

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
|----|------------|------------|------------|-----|-----|-------------------|---|---|----------------|--------------------|------|---|-----------|---|------|
| 1 | Rotation 1 | Rotation 2 | Rotation 3 | U-D | T-D | U-D =0 ET T-D =2 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 3 | | 1 | 2 | 2 | | | Fréquence de | U-D =0 | 0,34 | | Produit : | | 0,08 |
| 3 | 1 | 2 | | 1 | 1 | 0 | | | Fréquence de | T-D =2 | 0,22 | | | | |
| 4 | 2 | 1 | | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | |
| 5 | 3 | 3 | | 2 | 0 | 1 | | | Fréquence de (| U-D =0 ET T-D =2) | | | 0,08 | | |
| 6 | 1 | 1 | | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 7 | 3 | 2 | | 2 | 1 | 0 | | | | | | | | | |
| 8 | 1 | 1 | | 2 | 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 9 | 2 | 3 | | 1 | 1 | 2 | | | | | | | | | |
| 10 | 2 | 2 | | 2 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 11 | 3 | 3 | | 2 | 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 12 | 2 | 3 | | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 13 | 3 | 1 | | 3 | 2 | 2 | | | | | | | | | |
| 14 | 2 | 2 | | 3 | 0 | 1 | | | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F |
|----|-------------------------|------------|------------|---------------|---------------|-----------------------------|
| 1 | Rotation 1 | Rotation 2 | Rotation 3 | U-D | T-D | U-D =0 ET T-D =2 |
| 2 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A2-B2) | =ABS(C2-B2) | =SI((D2=0) ET (E2=2);1;0) |
| 3 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A3-B3) | =ABS(C3-B3) | =SI((D3=0) ET (E3=2);1;0) |
| 4 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A4-B4) | =ABS(C4-B4) | =SI((D4=0) ET (E4=2);1;0) |
| 5 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A5-B5) | =ABS(C5-B5) | =SI((D5=0) ET (E5=2);1;0) |
| 6 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A6-B6) | =ABS(C6-B6) | =SI((D6=0) ET (E6=2);1;0) |
| 7 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A7-B7) | =ABS(C7-B7) | =SI((D7=0) ET (E7=2);1;0) |
| 8 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A8-B8) | =ABS(C8-B8) | =SI((D8=0) ET (E8=2);1;0) |
| 9 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A9-B9) | =ABS(C9-B9) | =SI((D9=0) ET (E9=2);1;0) |
| 10 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A10-B10) | =ABS(C10-B10) | =SI((D10=0) ET (E10=2);1;0) |
| 11 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A11-B11) | =ABS(C11-B11) | =SI((D11=0) ET (E11=2);1;0) |
| 12 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A12-B12) | =ABS(C12-B12) | =SI((D12=0) ET (E12=2);1;0) |
| 13 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A13-B13) | =ABS(C13-B13) | =SI((D13=0) ET (E13=2);1;0) |
| 14 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A14-B14) | =ABS(C14-B14) | =SI((D14=0) ET (E14=2);1;0) |
| 15 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A15-B15) | =ABS(C15-B15) | =SI((D15=0) ET (E15=2);1;0) |
| 16 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A16-B16) | =ABS(C16-B16) | =SI((D16=0) ET (E16=2);1;0) |
| 17 | =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) | ### | ### | =ABS(A17-B17) | =ABS(C17-B17) | =SI((D17=0) ET (E17=2);1;0) |

| | H | I | J | K | L | M | N | O |
|---|--|---|---|---------------------------|---|-------------------------|---|--------|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | Fréquence de $ U-D =0$ | | | =NB.SI(D2:D65536;0)/65535 | | Produit : | | =K2*K3 |
| 3 | Fréquence de $ T-D =2$ | | | =NB.SI(E2:E65536;2)/65535 | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | Fréquence de $(U-D =0 \text{ ET } T-D =2)$ | | | | | =SOMME(F2:F65536)/65535 | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |

6 Conjecture

1. Les événements $(S = 4)$ et $(D = 1)$ ne semblent pas indépendants.
2. Les événements $|D - U| = 0$ et $|D - T| = 2$ semblent indépendants.

7 Partie démonstrations

7.1 Loi de D

Trois issues équiprobables.

| Valeurs de la v.a. | 1 | 2 | 3 |
|--------------------|---------------|---------------|---------------|
| Probabilités | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

7.2 Loi de S

En s'aidant d'un arbre :

| Valeurs de la v.a. | Issues favorables | Probabilités |
|--------------------|---|----------------|
| 3 | 1,1,1 | $\frac{1}{27}$ |
| 4 | 1,1,2-1,2,1-2,1,1 | $\frac{3}{27}$ |
| 5 | 1,2,2-2,1,2-2,2,1-3,1,1-1,3,1-1,1,3 | $\frac{6}{27}$ |
| 6 | 2,2,2-3,2,1-3,1,2-1,2,3-1,3,2-2,3,1-2,1,3 | $\frac{7}{27}$ |
| 7 | 3,3,1-3,1,3-1,3,3-3,2,2-2,3,2-2,2,3 | $\frac{6}{27}$ |
| 8 | 3,3,2-3,2,3-2,3,3 | $\frac{3}{27}$ |
| 9 | 3,3,3 | $\frac{1}{27}$ |

7.3 Dépendance de $(S = 4)$ et $(D = 1)$

$$P(S = 4) = \frac{3}{27} \quad P(D = 1) = \frac{1}{3} \quad P(S = 4)P(D = 1) = \frac{1}{27}$$

$$P((S = 4) \cap (D = 1)) = P((1, 1, 2); (2, 1, 1)) = \frac{2}{27}$$

7.4 Indépendance de $|D - U| = 0$ et $|D - T| = 2$

$$\{|D - U| = 0\} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3)\}$$

$$\{|D - T| = 2\} = \{(1, 1, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 3), (1, 3, 1), (2, 3, 1), (3, 3, 1)\}$$

D'où :

$$P(|D - U| = 0) = \frac{9}{27} \quad P(|D - T| = 2) = \frac{6}{27} \quad P(|D - T| = 2) \times P(|D - U| = 0) = \frac{2}{27}$$

$$\{|D - T| = 2\} \cap \{|D - U| = 0\} = \{(1, 1, 3), (3, 3, 1)\}$$

D'où :

$$P(\{|D - T| = 2\} \cap \{|D - U| = 0\}) = \frac{2}{27}$$