APPLICATIONS CONFORMES

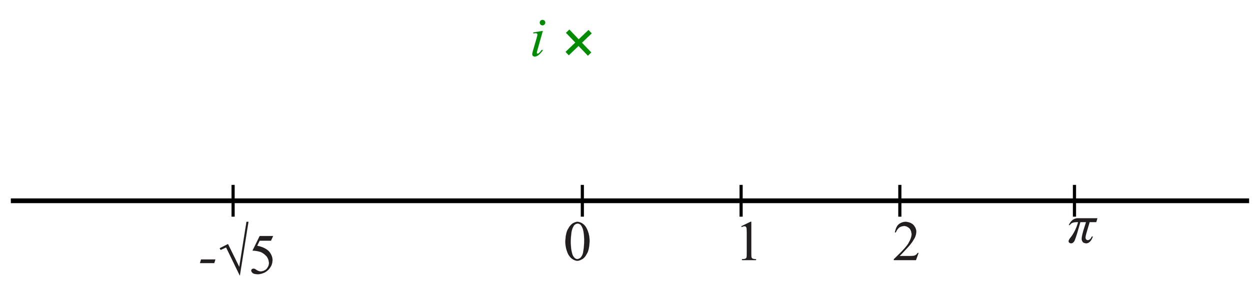
Le plan complexe

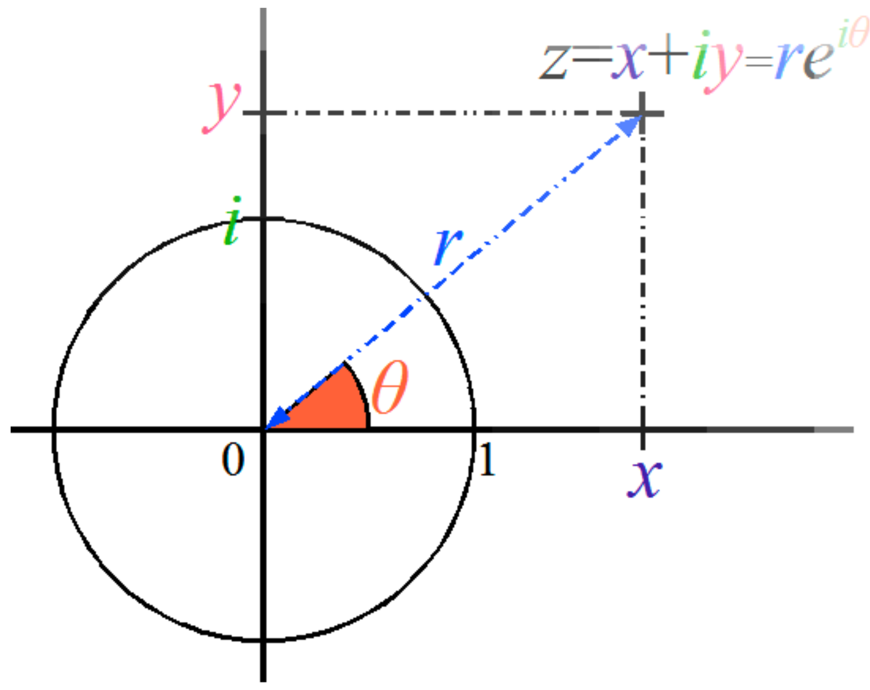
L'ensemble des nombres *réels* est habituellement représenté par une droite : à chaque point de celle-ci correspond un nombre.

Il existe cependant des nombres *non réels*, par exemple le nombre *imaginaire* appelé i qui a la propriété :

$$i^2 = -1.$$

Un tel nombre ne correspond à aucun point de la droite réelle, il est donc représenté dans le plan comme ci-contre.





Ce nombre i permet alors de construire d'autres nombres appelés *nombres complexes*. On les représente par des points du plan.

En coordonnées cartésiennes, un nombre complexe z s'écrit sous la forme

$$z = x + iy,$$

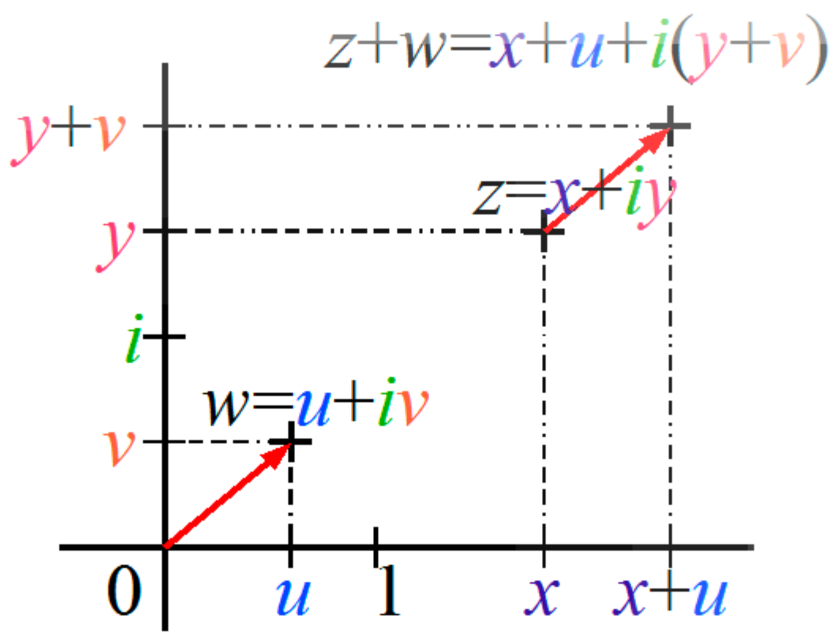
où x et y sont deux nombres réels.

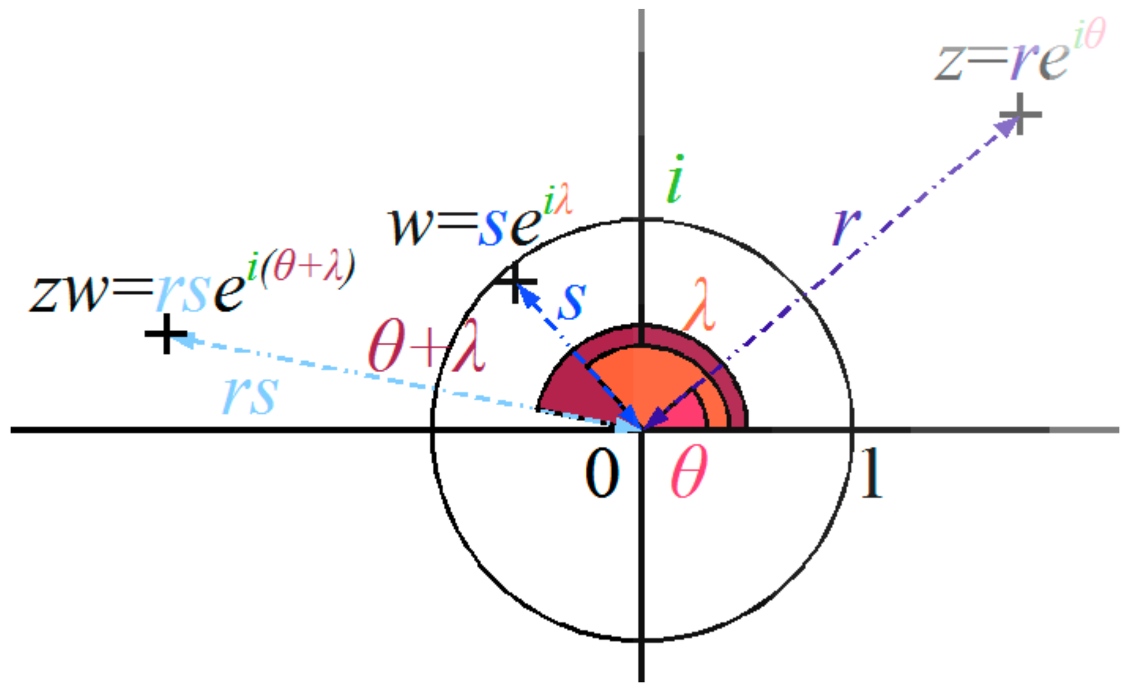
En coordonnées polaires, on l'écrit sous la forme

$$z = re^{i\theta}$$

où r et θ sont des nombres réels.

On peut additionner deux nombres complexes : comme pour les vecteurs du plan, la transformation du plan qui en résulte est une translation (un "glissement").





Mais on peut aussi multiplier deux nombres complexes, ce qui n'est pas possible pour des vecteurs ! La transformation du plan correspondante est composée d'une homothétie (contraction/dilatation) et d'une rotation.

Similitudes et applications conformes

Si z est un nombre complexe, une *similitude* est une fonction complexe de la forme

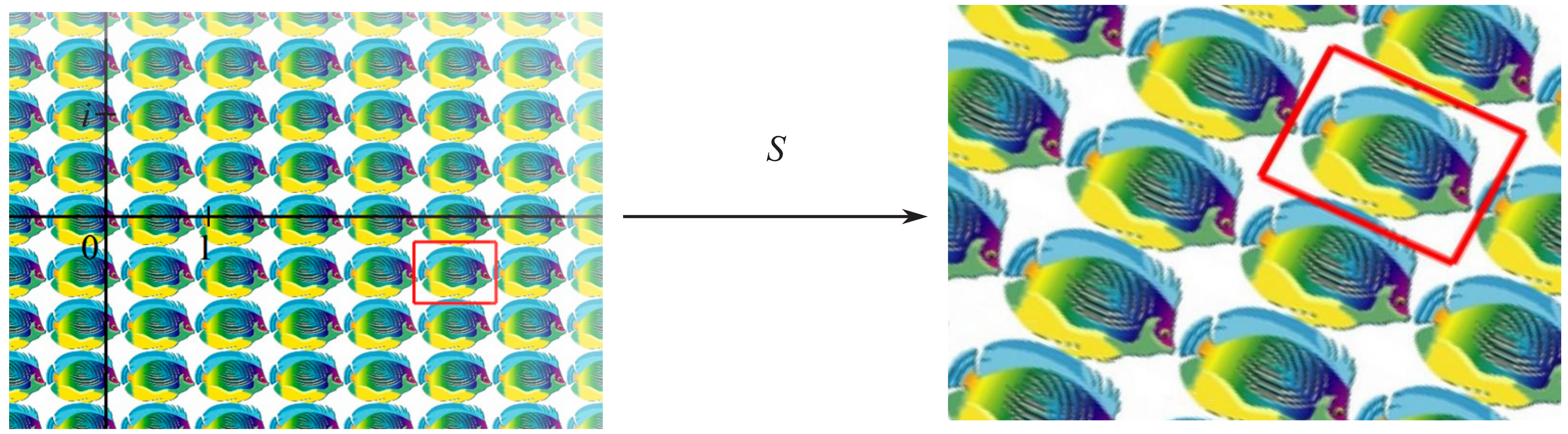
$$S(z) = az + b,$$

où a et b sont deux nombres complexes fixés, avec a différent de 0.

On peut voir une similitude comme une transformation du plan composée

- d'une rotation et d'une homothétie, correspondant à la partie "az", et
- d'une translation, correspondant à la partie "$+b$".

Dans l'exemple suivant, le plan est recouvert par un banc de poissons, transformé par une similitude S.



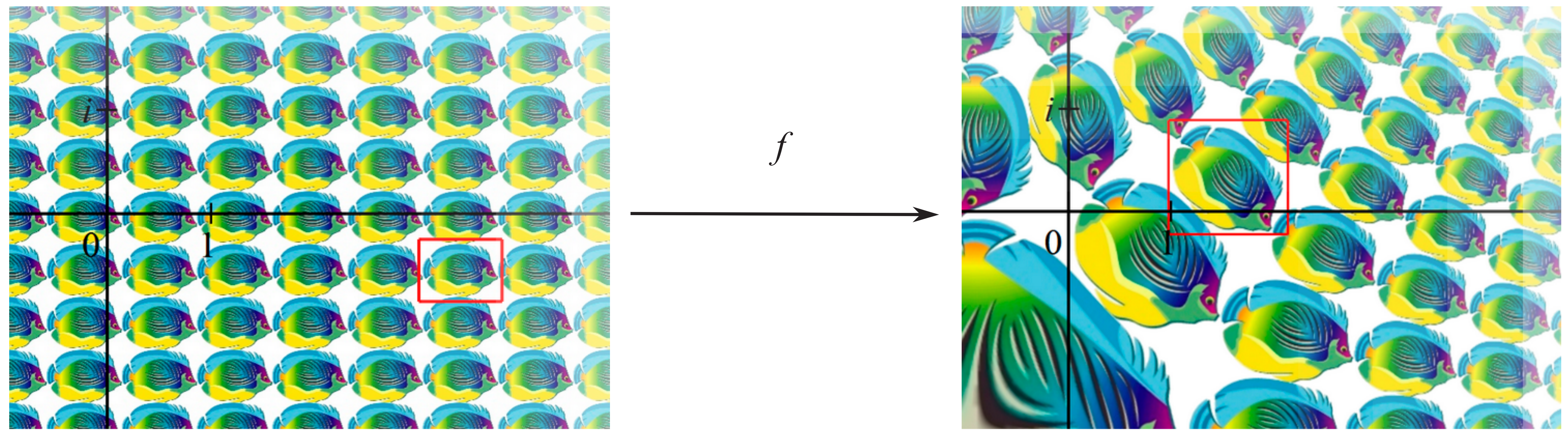
On peut suivre cette transformation sur le poisson encadré : il a été tourné, dilaté, et a glissé vers la gauche et vers le haut.

Une *application conforme* est une fonction complexe f qui "ressemble *localement* à une similitude" :

$$f(z) \approx az + b,$$

où a et b sont eux-mêmes des nombres complexes fixés, avec a différent de 0.

Ci-dessous, notre banc de poissons a été déformé par une application conforme f. On voit que le poisson encadré a été déformé de manière *identique* à l'exemple précédent, mais ce n'est pas le cas de tous ses congénères...



Ainsi, sur le poisson encadré, f se comporte comme la similitude S précédente, mais sur un poisson voisin, f se comporte comme une similitude différente... On voit donc bien que f est *localement* une similitude.

La transformation ci-dessus a été obtenue essentiellement à partir de l'application conforme $z \to z^2$.

Université Claude Bernard Lyon 1 — IREM — Lyon — CNRS

INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR 5208 - UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

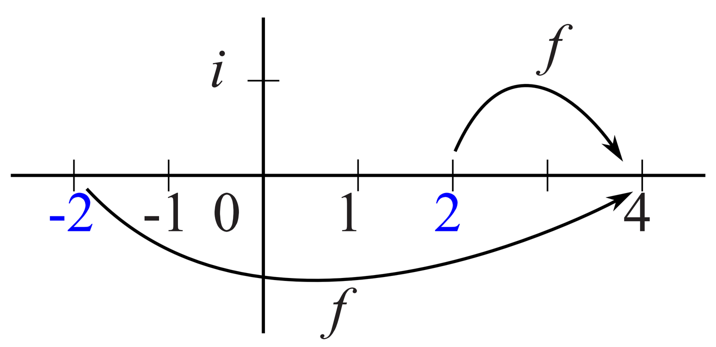
Applications conformes

Comment représenter une application conforme

Une application conforme transforme le plan. Un bon moyen d'observer comment s'effectue cette transformation est donc de déformer une figure, comme un dessin ou une photo, par une telle fonction.

Une fonction f va envoyer un point z du plan complexe sur un unique point image $w = f(z)$.
Mais certaines fonctions peuvent néanmoins envoyer deux points différents z_1 et z_2 sur le même point image w. Par exemple, la fonction $f(z) = z^2$ envoie les points -2 et 2 sur le point 4.

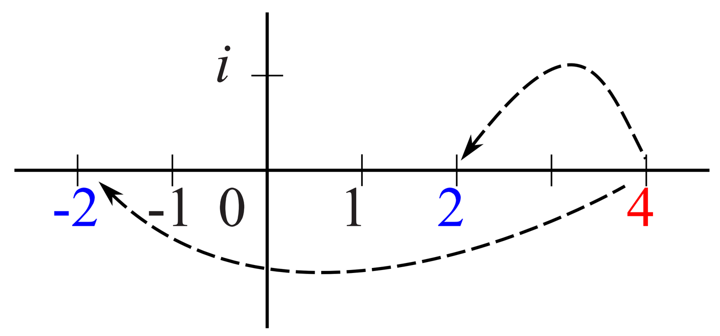
$2^2 = (-2)^2 = 4$



On voit donc qu'une déformation directe de la figure n'est pas toujours possible : si on veut créer une figure qui est l'image de la figure de départ par une fonction f, quelle couleur va-t'on affecter à un point qui est l'image de deux points différents z_1 et z_2 ? la couleur du point z_1 ou celle de z_2 ?

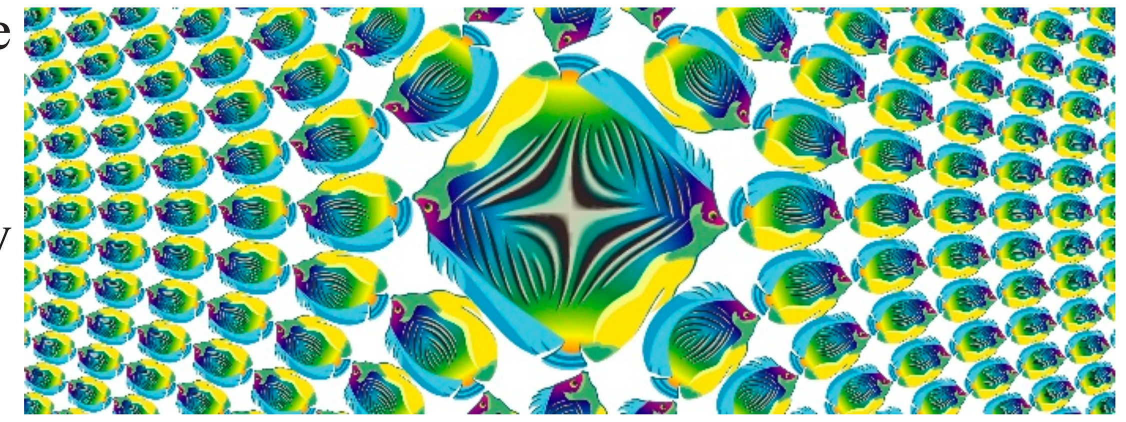
Par contre en partant d'un point $w = f(z)$, on peut créer une nouvelle figure en colorant le point z de la même couleur que son image $f(z) = w$ dans la figure de départ : on dit que cette dernière a été *tirée en arrière par la fonction f*.

Dans ce cas, si deux points différents z_1 et z_2 sont envoyés par f sur le même point image w, ils auront la même couleur.
En reprenant l'exemple de $f(z) = z^2$, si on part du point 4 et qu'on le tire en arrière par f, on obtient les points -2 et 2 à qui on attribue alors la même couleur.



Observons comment la fonction $f(z)=z^2$ déforme notre banc de poissons. Le centre de l'image correspond au point 0.

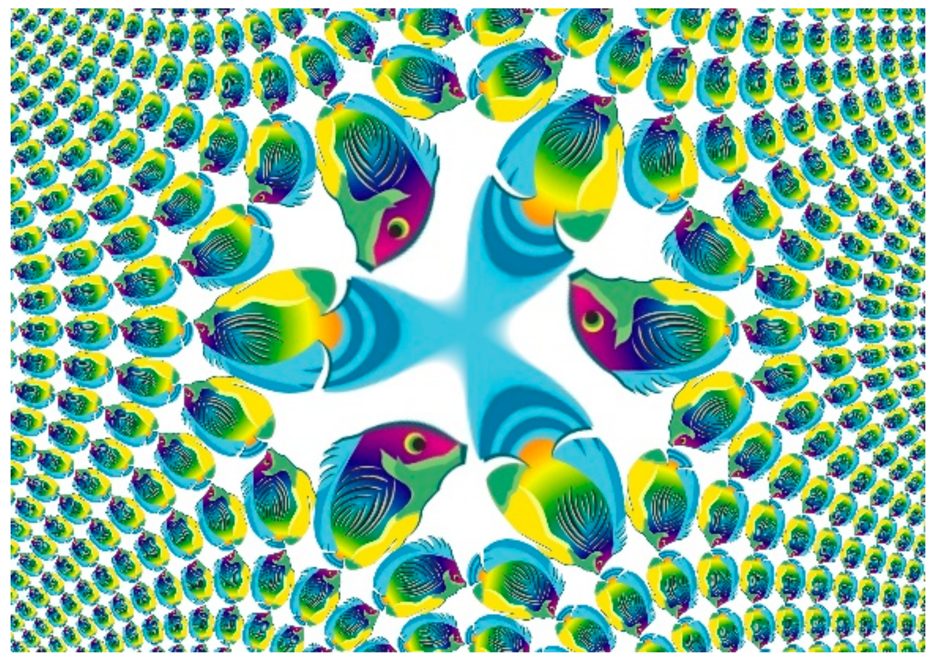
On voit que le point 0 est un *"point critique"* : que s'y passe-t-il ?



Et maintenant, des exemples !

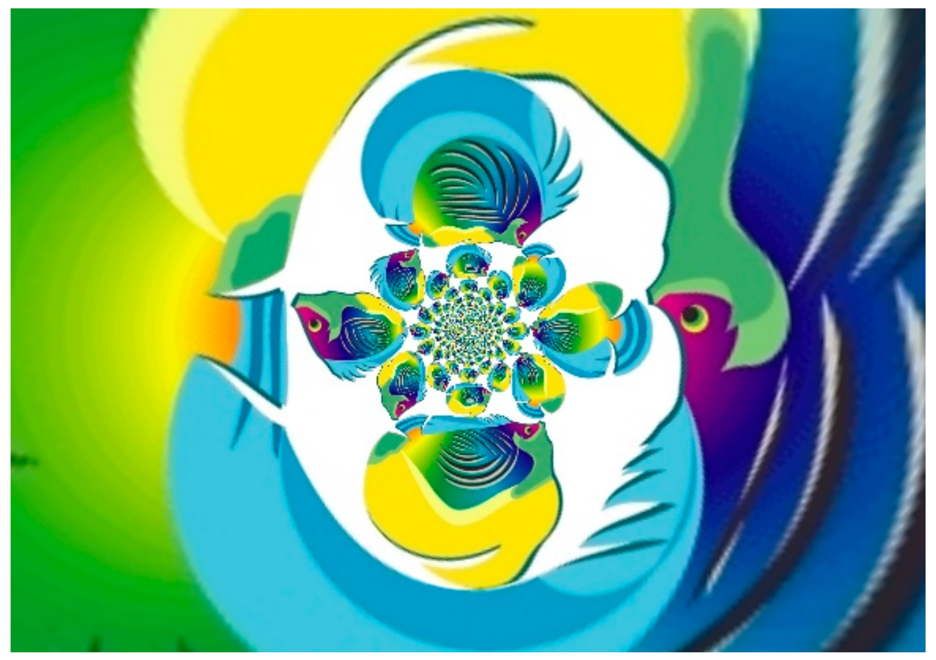
Presque toutes les fonctions usuelles sont des applications conformes, notamment les polynômes et les fonctions rationnelles (quotients de polynômes). Mais elles se cachent également derrière la quasi-totalité des touches de la calculatrice : *exp*, *log*, *cos*, *sin*, etc... En reprenant l'exemple précédent du banc de poissons, nous allons explorer quelques-unes de ces transformations.

$f(z)=z^3$



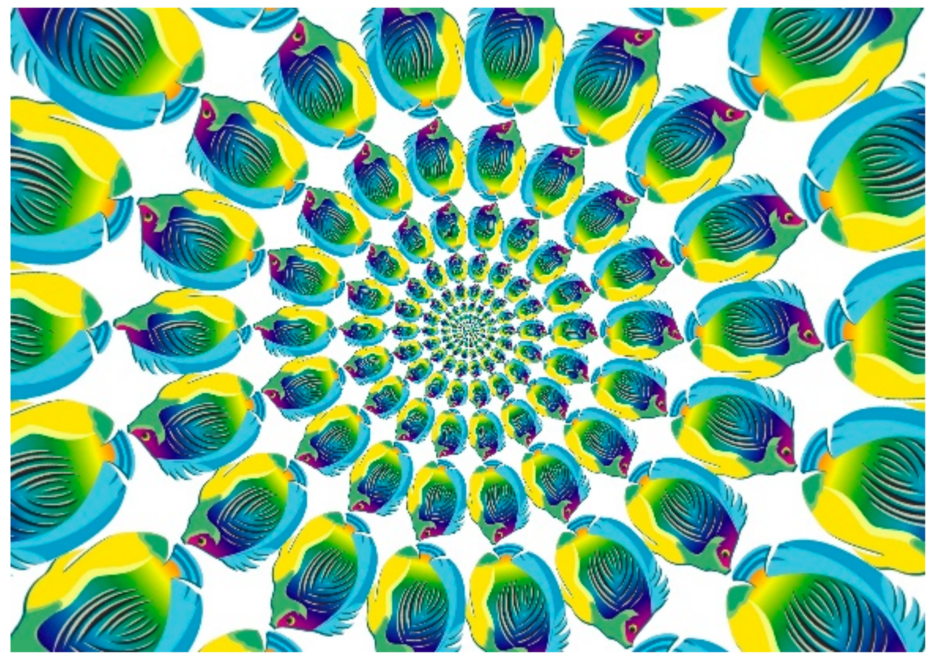
Cette fonction admet un point critique en 0.

L'inversion $f(z)=1/z$



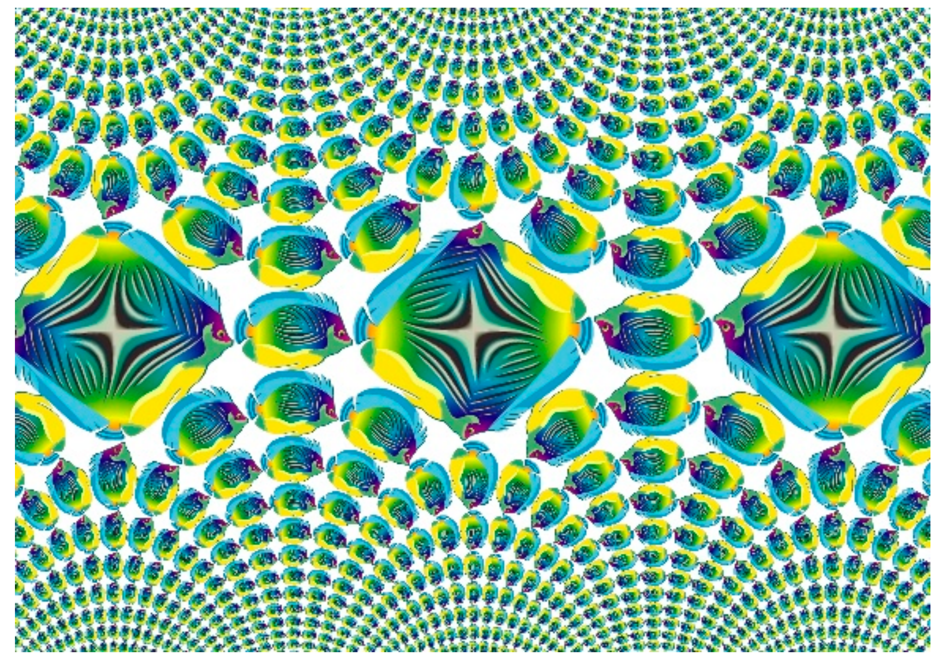
L'inversion laisse invariant le cercle de centre 0 et de rayon 1. Elle envoie le centre à l'infini et échange l'intérieur et l'extérieur du cercle. Ici on voit que le poisson a été "retourné sur lui-même"...

Le logarithme

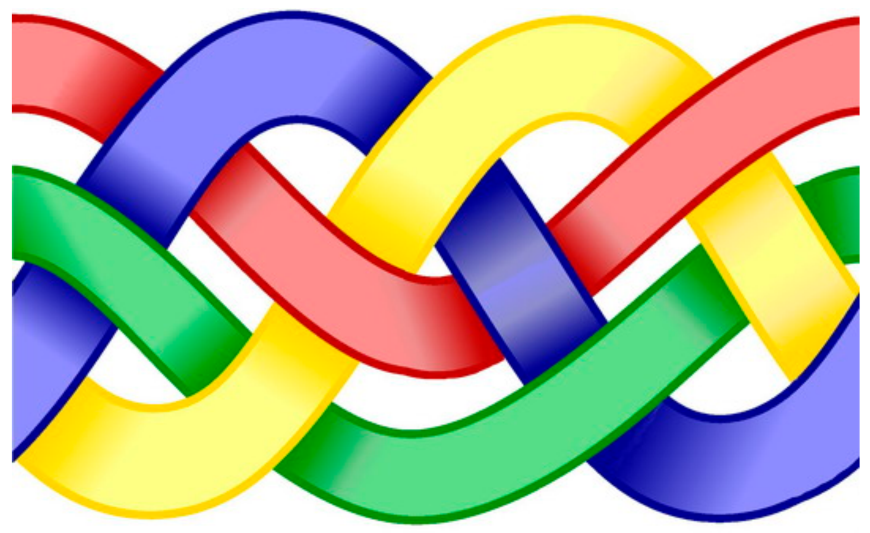


Le logarithme et sa réciproque l'exponentielle sont les applications de changement de repère cartésien/polaire.

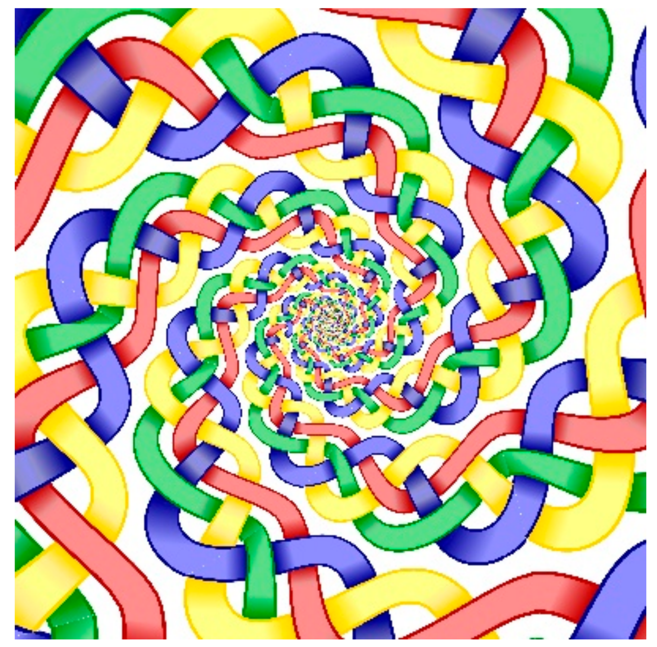
Le cosinus



On peut aussi transformer une frise comme celle-ci :



... pour obtenir une spirale.



IREM
Lyon
CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1

Institut Camille Jordan UMR 5208 - Université Claude Bernard Lyon 1
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques