Le paragraphe 4 et la généralisation concernent les élèves suivant la spécialité.

Adaptation de l'exercice 95 page 91 du livre HYPERBOLE *spécialité TS (édition 2002).*

1 Le problème

On dispose de pièces de a € et de b € (où a et b sont des entiers premiers entre eux).
On aimerait savoir quelles sont les sommes payables à l'aide de ce type de pièces.

2 Conjecture sur tableur

On pose $a = 7$ et $b = 5$.
On dispose d'un nombre illimité de pièces de a € et de b €.
Comme $2 \times b + 3 \times a = 31$, on peut par exemple payer un article de 31 €.
On ne se préoccupe dans la suite que de sommes entières. On suppose qu'il ne peut y avoir de rendu de monnaie.

1. Construire une feuille de tableur qui permette de savoir pour les entiers de 1 à 500 quelles sommes on peut payer (et comment) et quelles sommes on ne peut pas payer.
2. Quelle semble être la plus grande somme qu'on ne peut pas payer ?

3 Démonstration

Démontrer votre conjecture sur la valeur de la plus grande somme non payable.

4 Amélioration d'une feuille de calcul

Pour chercher à résoudre le problème, on a défini une feuille de calcul comme suit :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	a=	7											
2	b=	5											
3													
4													
5													
6		Nombre de pièces de b euros											
7		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8	somme à payer												
9	1												
10	2												
11	3												
12	4		Chaque cellule de ce « tableau » affiche un entier x (s'il existe) tel que S=ax+by										
13	5		où S est la somme à payer (colonne A) et y le nombre de pièces de b euros utilisées (ligne 7).										
14	6		Si un tel entier x n'existe pas, la cellule n'affiche rien.										
15	7												
16	8												
17	9												
18	10												
19	11												
20	12												
21	13												
22	14												
23	15												
24	16												
25	17												
26	18												
27	19												
28	20												
29	21												
30	22												
31	23												
32	24												

Expliquer pourquoi on aurait pu limiter les colonnes « nombre de pièces de b € » aux colonnes B, C, D, E, F, G, H.

Corrigé.

1 Compétences TICE

1. Savoir gérer des références relatives et absolues : absolue sur ligne ou colonne seulement, absolue sur ligne et colonne.
2. Fonction SI().
3. Éventuellement (pour la lisibilité de la feuille) formatage conditionnel de cellules.

2 Apport TICE

1. Facilite la compréhension, l'appropriation du problème.
2. Permet une conjecture sans cela relativement difficile à émettre.

3 Prérequis mathématiques

1. Principe de la démonstration par récurrence.
2. Notion de division euclidienne (question 4).
3. Théorème de Gauss et Bezout pour le prolongement (généralisation).

4 Feuille de calcul

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	a=	7												
2	b=	5												
3														
4														
5														
6		Nombre de pièces de b euros												
7		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	somme à payer													
9	1				-2							-7		
10	2							-4						
11	3			-1							-6			
12	4						-3							-8
13	5		0							-5				
14	6					-2							-7	
15	7	1							-4					
16	8				-1							-6		
17	9							-3						
18	10			0							-5			
19	11						-2							-7
20	12		1							-4				
21	13					-1							-6	
22	14	2							-3					
23	15				0							-5		
24	16							-2						
25	17			1							-4			
26	18						-1							-6
27	19		2							-3				
28	20					0							-5	
29	21	3							-2					
30	22				1							-4		
31	23							-1						
32	24			2							-3			

Feuille1 Feuille2 Feuille3

	A	B	C	D
1	a=	7		
2	b=	5		
3				
4				
5				
6		Nombre de pièces de b euros		
7		0	=B7+1	=C7+1
8	somme à payer			
9	1	=SI(($A9-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A9-$B$2*B$7)/$B$1);($A9-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A9
10	2	=SI(($A10-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A10-$B$2*B$7)/$B$1);($A10-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A10
11	3	=SI(($A11-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A11-$B$2*B$7)/$B$1);($A11-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	###
12	4	=SI(($A12-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A12-$B$2*B$7)/$B$1);($A12-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A12
13	5	=SI(($A13-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A13-$B$2*B$7)/$B$1);($A13-$B$2*B$7)/$B$1;"")	###	=SI(($A13
14	6	=SI(($A14-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A14-$B$2*B$7)/$B$1);($A14-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A14
15	7	=SI(($A15-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A15-$B$2*B$7)/$B$1);($A15-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A15
16	8	=SI(($A16-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A16-$B$2*B$7)/$B$1);($A16-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A16
17	9	=SI(($A17-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A17-$B$2*B$7)/$B$1);($A17-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A17
18	10	=SI(($A18-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A18-$B$2*B$7)/$B$1);($A18-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	###
19	11	=SI(($A19-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A19-$B$2*B$7)/$B$1);($A19-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A19
20	12	=SI(($A20-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A20-$B$2*B$7)/$B$1);($A20-$B$2*B$7)/$B$1;"")	###	=SI(($A20
21	13	=SI(($A21-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A21-$B$2*B$7)/$B$1);($A21-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A21
22	14	=SI(($A22-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A22-$B$2*B$7)/$B$1);($A22-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A22
23	15	=SI(($A23-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A23-$B$2*B$7)/$B$1);($A23-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A23
24	16	=SI(($A24-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A24-$B$2*B$7)/$B$1);($A24-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A24
25	17	=SI(($A25-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A25-$B$2*B$7)/$B$1);($A25-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	###
26	18	=SI(($A26-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A26-$B$2*B$7)/$B$1);($A26-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A26
27	19	=SI(($A27-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A27-$B$2*B$7)/$B$1);($A27-$B$2*B$7)/$B$1;"")	###	=SI(($A27
28	20	=SI(($A28-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A28-$B$2*B$7)/$B$1);($A28-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A28
29	21	=SI(($A29-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A29-$B$2*B$7)/$B$1);($A29-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A29
30	22	=SI(($A30-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A30-$B$2*B$7)/$B$1);($A30-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A30
31	23	=SI(($A31-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A31-$B$2*B$7)/$B$1);($A31-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	=SI(($A31
32	24	=SI(($A32-$B$2*B$7)/$B$1=ENT(($A32-$B$2*B$7)/$B$1);($A32-$B$2*B$7)/$B$1;"")	=SI(($A	###

Feuille1 Feuille2 Feuille3

5 23 non payable.

On conjecture que $M = 23$.
Soient x et y entiers positifs. On a $7x + 5y \geqslant 25$ pour $y \geqslant 5$. Donc si la somme 23 est payable c'est avec moins de 5 pièces de b €. La feuille de calcul montre donc que cette somme n'est pas payable.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	a=	7								
2	b=	5								
3										
4										
5										
6		Nombre de pièces de b euros								
7		0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	somme à payer									
31	23							-1		

6 À partir de la somme 24, on peut tout payer

Si l'on peut payer la somme S par $S = 7x + 5y$ alors on peut payer la somme $S + 7$ par $7(x + 1) + 5y$.
Comme la feuille de calcul montre que les sept sommes consécutives de 24 à 30 sont payables, on montre ainsi par récurrence que toutes les sommes au-delà de 24 sont payables.

7 Réduction du nombre de colonnes de calcul

Supposons qu'une somme S soit payable, c'est à dire qu'il existe un couple d'entiers positifs $(x; y)$ tel que $S = 7x + 5y$.
Divisons y par 7 : $y = 7q + r$ avec $q \geqslant 0$ et $0 \leqslant r \leqslant 6$.
Alors $S = 7\,(x + 5q) + 5r$. Donc la somme S est payable avec un nombre de pièces de b € d'au plus 6.
On pouvait donc dans la feuille de calcul présentée réduire le nombre de colonnes aux colonnes 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

8 Généralisation

8.1 Généralisation

Avec des pièces de a € et de b € (où a et b sont des entiers naturels premiers entre eux), faire une conjecture sur la valeur de la plus grande somme non payable.

8.2 Réduction du problème

1. Comme a et b sont premiers entre eux, il existe u et v entiers tels que $au + bv = 1$ (Bezout). Pour un entier S nous avons alors $a(Su) + b(Sv) = S$.
2. Soit $S > 0$ un entier, S peut s'écrire sous la forme $S = ax + by$ avec x et y entiers (d'après ce qui précède).
   Divisons y par a : $y = aq + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant a - 1$.
   On a alors : $S = a\,(x + bq) + br$
   Ainsi tout entier > 0 peut s'écrire comme une combinaison linéaire de a et b avec un coefficient de b compris entre 0 et $a - 1$.
3. Si un entier $S > 0$ peut s'écrire sous la forme $S = ax + by$ avec x et y entiers positifs alors S peut s'écrire ainsi avec de plus $0 \leqslant y \leqslant a - 1$ (en effet $y = aq + r$ avec $q \geqslant 0$ et $0 \leqslant r \leqslant a - 1$ et $S = a\,(x + bq) + br$).
4. On se limite donc au problème : « Quels sont les entiers strictement positifs S pour lesquels il existe un couple d'entiers $(x; y)$ positifs avec $y \leqslant a - 1$ tel que $S = ax + by$? »

8.3 Unicité de la décomposition avec $0 \leqslant y \leqslant a - 1$

On observe sur la feuille de tableur un seul entier par ligne correspondant aux colonnes 0 ; 1 ; 2 ; . . . ; $a - 1$.
Cela suggère la propriété suivante :

$$\text{Pour tout entier } S, \text{ il existe un unique couple } (x; y) \text{ tel que } \begin{cases} S = ax + by \\ 0 \leqslant y \leqslant a - 1 \end{cases}$$

Démonstration.
Soient $(x; y)$ et $(u; v)$ deux couples d'entiers tels que $0 \leqslant y \leqslant a - 1$, $0 \leqslant v \leqslant a - 1$ et $ax + by = au + bv$.
On a en particulier $by \equiv bv \pmod a$.
Or a est premier avec b, donc (Gauss) $y \equiv v \pmod a$.
On a ainsi $y \equiv v \pmod a$ avec $0 \leqslant y \leqslant a - 1$ et $0 \leqslant v \leqslant a - 1$, donc $y = v$.
On en déduit aisément $x = u$. D'où l'unicité voulue.

8.4 $x < 0$

Dans une combinaison $ax + by$ où $0 \leqslant y \leqslant a - 1$, que peut-on dire des cas $x < 0$?
Si $x < 0$, c'est à dire si $x \leqslant -1$, on a $ax + by \leqslant -a + by \leqslant -a + b(a - 1)$.
Ainsi si $ax + by > ab - a - b$ avec $0 \leqslant y \leqslant a - 1$, on a nécessairement $x \geqslant 0$.
Ce qui montre que tout entier $S > ab - a - b$ est une somme payable avec des pièces de a € et des pièces de b €.

8.5 $ab - a - b$ non payable

On a :

$$ab - a - b = -a + b(a-1)$$

Or l'écriture de $ab - a - b$ sous la forme $ax + by$ où $0 \leqslant y \leqslant a-1$ est unique (cf ci-dessus). Donc $ab - a - b$ est non payable avec $0 \leqslant y \leqslant a-1$ et l'on a vu que cela impliquait que cette somme est non payable.

8.6 Réponse

La plus grande somme non payable est $ab - a - b$. En d'autres termes, la plus petite somme à partir de laquelle on peut toujours payer est $(a-1)(b-1)$.