1 La situation

On considère un demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit I un point de $[AB] - \{A; B; O\}$.
M étant un point mobile du demi-cercle $\mathscr{C}$, on aimerait savoir :

1. s'il existe une position du point M sur $\mathscr{C}$ qui rende maximale l'aire du triangle OMI,
2. s'il existe une position de M sur $\mathscr{C}$ qui rende maximal l'angle $\widehat{OMI}$.

2 Travail sur geogebra

Construire la figure sur geogebra. Conjecturer des réponses aux questions.

3 Travail sur Xcas

Pour résoudre le problème de l'angle maximal, Marie décide d'introduire un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans lequel B a pour coordonnées $(1; 0)$. On note x l'abscisse de M et a l'abscisse du point I. Le repère est choisi tel que $y_M \geqslant 0$.
Marie cherche ensuite une expression du cosinus de l'angle $\widehat{OMI}$.
Dans le logiciel de calcul formel Xcas, elle définit alors la fonction f par :
```
f(x):=(1-a*x)/sqrt(1-x^2+(a-x)^2)
```
puis elle entre le calcul :
```
factoriser(deriver(simplifier(f(x)^2)))
```
Faire cette manipulation et noter le résultat.

4 DM

1. Rappeler l'énoncé de la loi des sinus dans un triangle ainsi qu'une démonstration de ce résultat.
2. Démontrer vos conjectures.
3. Marie affirme que le résultat annoncé par Xcas confirme sa conjecture. En admettant le résultat affiché par Xcas, justifier cette affirmation.

Corrigé, commentaires

1 Conjectures

1. L'aire du triangle OMI semble maximale lorsque (OM) est perpendiculaire à (AB).
2. L'angle $\widehat{OMI}$ semble maximal lorsque (IM) est perpendiculaire à (AB).

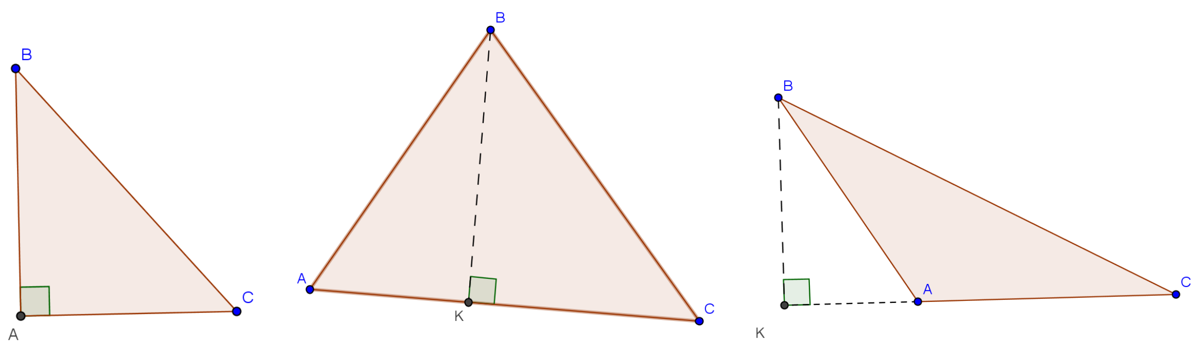
2 La loi des sinus

Théorème (loi des sinus dans un triangle).
Soit ABC un triangle quelconque, d'aire $\mathscr{S}$. On a les égalités suivantes :

$$\frac{2\mathscr{S}}{AB \times BC \times CA} = \frac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{BC} = \frac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{AC} = \frac{\sin\left(\widehat{C}\right)}{AB}$$

et

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \sin\left(\widehat{A}\right) = \frac{1}{2} \times BA \times BC \sin\left(\widehat{B}\right) = \frac{1}{2} \times CA \times CB \sin\left(\widehat{C}\right)$$



1. Soit K le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. On a : $KB = AB \times \sin\left(\widehat{A}\right)$.

   Cas 1. Lorsque le triangle ABC est rectangle en A, on a $KB = AB$ et $\sin\left(\widehat{A}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

   donc $KB = AB \times \sin\left(\widehat{A}\right)$.

   Cas 2. Lorsque K est un point de la demi-droite $]AC)$, dans le triangle ABK rectangle en A, on a :

   $$\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{KB}{AB}$$

   d'où $KB = AB \times \sin\left(\widehat{A}\right)$.

   Cas 3. Lorsque K est un point de $(AC) - [AC)$, dans le triangle ABK rectangle en K, on a :

   $$\sin\left(\widehat{KAB}\right) = \frac{KB}{AB}$$

   Or :

   $$\widehat{KAB} = \pi - \widehat{BAC}$$

et
$$\sin\left(\pi - \widehat{BAC}\right) = \sin\left(\widehat{BAC}\right)$$

D'où là encore : $KB = AB \times \sin\left(\widehat{A}\right)$.

2. On a, avec ce qui précède :
$$\mathscr{S} = \frac{1}{2} \times AC \times KB = \frac{1}{2} \times AC \times AB \times \sin\left(\widehat{A}\right)$$
3. On établirait de même :
$$\mathscr{S} = \frac{1}{2} \times BC \times BA \times \sin\left(\widehat{B}\right)$$
et
$$\mathscr{S} = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin\left(\widehat{C}\right)$$
4. En divisant chaque membre de l'égalité :
$$2\,\mathscr{S} = AC \times AB \times \sin\left(\widehat{A}\right) = BC \times BA \times \sin\left(\widehat{B}\right) = CA \times CB \times \sin\left(\widehat{C}\right)$$
par le produit $AB \times BC \times CA$, on obtient l'égalité intitulée « loi des sinus ». □

3 Aire maximale

L'aire $\mathcal{S}$ du triangle OMI est :
$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \times OM \times OI \times \sin\left(\widehat{MOI}\right)$$
Comme OM et OI ne dépendent pas de la position du point M, l'aire du triangle est maximale lorsque $\sin\left(\widehat{MOI}\right)$ est maximal, c'est à dire lorsque $\sin\left(\widehat{MOI}\right) = 1$, en d'autres termes lorsque la droite (OM) est perpendiculaire à la droite (AB).

4 Angle en M maximal

D'après la loi des sinus, on a :
$$\frac{\sin\left(\widehat{OMI}\right)}{OI} = \frac{\sin\left(\widehat{OIM}\right)}{OM}$$
c'est à dire
$$\sin\left(\widehat{OMI}\right) = \frac{OI}{OA}\sin\left(\widehat{OIM}\right)$$
Comme le rapport $\dfrac{OI}{OA}$ est une constante (c'est à dire ne dépend pas de la position du point M sur $\mathscr{C}$) , on en déduit que $\sin\left(\widehat{OMI}\right)$ est maximal lorsque $\sin\left(\widehat{OIM}\right)$ l'est.
Or $\sin\left(\widehat{OIM}\right)$ est maximal lorsqu'il vaut 1, c'est à dire lorsque la droite (IM) est perpendiculaire à la droite (AB).
Il reste à justifier que l'angle $\widehat{OMI}$ est maximal lorsque son sinus est maximal. Pour cela il suffit de remarquer que cet angle est nécessairement aigu : l'angle $\widehat{OMI}$ est en effet clairement toujours inférieur à l'angle $\widehat{AMB}$ qui est un angle droit.

5 Avec le cosinus

La relation :

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MO} = MI \times MO \cos\left(\widehat{OMI}\right)$$

s'écrit aussi :

$$\cos\left(\widehat{OMI}\right) = \frac{\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MO}}{MI \times MO}$$

Avec $M\left(x; \sqrt{1-x^2}\right)$, $O(0;0)$, $I(a;0)$, cela s'écrit aussi :

$$\cos\left(\widehat{OMI}\right) = \frac{1 - x\,a}{\sqrt{1 - x^2 + (a-x)^2}}$$

Comme $|a| < 1$ et $|x| < 1$, on a $|ax| < 1$. La fonction f est donc une fonction à valeurs positives et rechercher le minimum de f sur $[-1;1]$ revient donc à chercher le minimum de $h = f^2$ sur $[-1;1]$.
La dérivée de f^2 est (on admet le résultat machine) :

$$h'(x) = \frac{(-2\,a^2)\,(x-a)\,(x\,a-1)}{(2\,x\,a - a^2 - 1)^2}$$

Le signe de cette dérivée est celui de $-(x-a)(xa-1)$, c'est à dire celui de $(x-a)(1-xa)$.
On a déjà justifié que $1 - xa > 0$, donc h' a le signe de $x - a$ sur $[-1;1]$. h admet donc un minimum en a. Comme un angle géométrique est maximal lorsque son cosinus est minimal, on a ainsi à nouveau confirmé le résultat.