1 Problème 1

La situation

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

A et B sont deux points distincts dans le plan $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ tels que la droite (AB) ne passe pas par O.

C est un point de l'axe $\left(O; \vec{k}\right)$.

On considère un point M mobile sur la droite (AB) et on aimerait savoir s'il existe une position du point M tel que l'angle $\widehat{OMC}$ soit maximal.

Travail avec geospace

1. Construire la figure dans geospace.
2. Conjecturer une réponse au problème.

2 Problème 2

La situation

$ABCD$ est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont même longueur a.

M étant un point mobile de la droite (AB), on aimerait savoir s'il existe une position de ce point M qui rende maximal l'angle $\widehat{CMD}$.

Travail sur geospace

1. Construire la figure dans un fichier geospace.
2. Conjecturer une réponse.

3 Démonstration

Confirmer ou infirmer vos conjectures.

Pistes pour une résolution.

1. Pour le premier problème, on pourra penser à utiliser $\tan(\widehat{OMC})$.
2. Pour le second problème, I désignant le milieu de $[AB]$ et t désignant le réel défini par $\overrightarrow{IM} = t\,\overrightarrow{AB}$, on exprimera $\cos\left(\widehat{CMD}\right)$ en fonction de t et de a.

4 Corrigé

4.1 Problème 1

Dans le triangle MOC rectangle en O, on a :

$$\tan(\widehat{CMO}) = \frac{OC}{OM}$$

OC étant fixe, cette tangente (et donc l'angle) sera maximale lorsque OM sera minimale, c'est à dire lorsque M est en H projeté orthogonal de O sur la droite (AB).

4.2 Problème 2

1. $$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)$$

   Les faces étant des triangles équilatéraux, on a : $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{ID} = 0$ et $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{MI} = 0$. D'où :

   $$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = MI^2 + \overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}$$

   On a :

   $$\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\left(IC^2 + ID^2 - \left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}\right)^2\right)$$

   Comme $IC = ID = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ et $CD = a$, on obtient :

   $$\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID} = \frac{1}{4}a^2$$

   d'où

   $$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = a^2\,t^2 + \frac{1}{4}\,a^2$$

2. $$MC \times MD = MC^2$$

   Le triangle MIC est rectangle en I :

   $$MC \times MD = MI^2 + IC^2 = a^2\,t^2 + \frac{3}{4}a^2$$

3. $$\cos\left(\widehat{CMD}\right) = \frac{\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}}{MC \times MD} = \frac{t^2+\frac{1}{4}}{t^2+\frac{3}{4}}$$

4. L'étude des variations de la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^2+\frac{1}{4}}{t^2+\frac{3}{4}}$ montre que f admet un minimum en 0 qui vaut $\dfrac{1}{3}$.

   L'angle $\widehat{CMD}$ est donc maximal lorsque M est en I et on a : $\widehat{CID} \approx 70{,}5°$