

1 Problème 1

La situation

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A et B sont deux points distincts dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tels que la droite (AB) ne passe pas par O .

C est un point de l'axe $(O; \vec{k})$.

On considère un point M mobile sur la droite (AB) et on aimerait savoir s'il existe une position du point M tel que l'angle \widehat{OMC} soit maximal.

Travail avec geospace

1. Construire la figure dans geospace.
2. Conjecturer une réponse au problème.

2 Problème 2

La situation

$ABCD$ est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont même longueur a .

M étant un point mobile de la droite (AB) , on aimerait savoir s'il existe une position de ce point M qui rende maximal l'angle \widehat{CMD} .

Travail sur geospace

1. Construire la figure dans un fichier geospace.
2. Quelle semble être la nature du triangle CMD ?
3. Conjecturer une réponse à la question de l'angle maximal.

3 Démonstration

Confirmer ou infirmer vos conjectures.

Pistes pour une résolution.

1. Pour le premier problème, on pourra penser à utiliser $\tan(\widehat{OMC})$.
2. Pour le second problème, on pensera à utiliser $\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{CMD}\right)$.

4 Corrigé

4.1 Problème 1

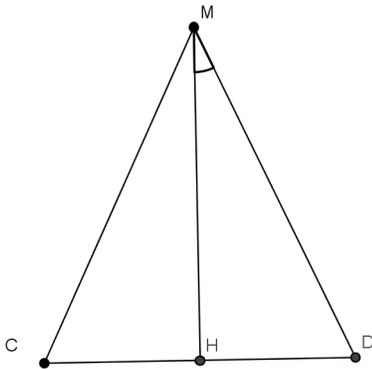
Dans le triangle MOC rectangle en O , on a :

$$\tan(\widehat{CMO}) = \frac{OC}{OM}$$

OC étant fixe, cette tangente (et donc l'angle) sera maximale lorsque OM sera minimale, c'est à dire lorsque M est en H projeté orthogonal de O sur la droite (AB) .

4.2 Problème 2

Le triangle CMD est isocèle en M . En effet, les égalités $AD = AC$ et $BC = BD$ montrent que la droite (AB) est contenue dans le plan médiateur de $[CD]$.



$$\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{CMD}\right) = \frac{DH}{MD} = \frac{CD}{2MD}$$

Comme CD est une constante, ce sinus est maximal lorsque MD est minimal, c'est à dire lorsque M est en I milieu de $[AB]$ (car I est aussi le projeté orthogonal de D sur $[AB]$: le triangle DAB est équilatéral).

Comme $\frac{1}{2}\widehat{CMD}$ est nécessairement aigu (grâce au facteur $\frac{1}{2}$), cet angle est maximal en même temps que son sinus.