iLM
INSTITUT LUMIÈRE MATIÈRE

introduction de la notion de mesure et d'incertitude en physique

Aspects Théoriques

Jérôme Morville (MC)
Institut Lumière matière
Groupe de Spectroscopie Moléculaire
UMR5306 - UCBL - CNRS
10 rue Ada Byron
69622 Villeurbanne CEDEX, France
jerome.morville@univ-lyon1.fr

UNIVERSITÉ DE LYON

cnrs
dépasser les frontières

UCLB

INSTITUT LUMIÈRE MATIÈRE

Objectifs

- En physique, la précision infinie ne peut exister
  - Même avec un dispositif de mesure théoriquement parfait
  - Même avec un expérimentateur parfait
- Toute mesure s’inscrit dans le temps!
  - Impact majeur sur la précision ultime

la précision infinie ne peut exister

- La grandeur mesurée fait appel
  aux lois de la physique quantique

- Le dispositif de mesure fait appel,
  parfois de façon ultime,
  aux lois de la physique quantique

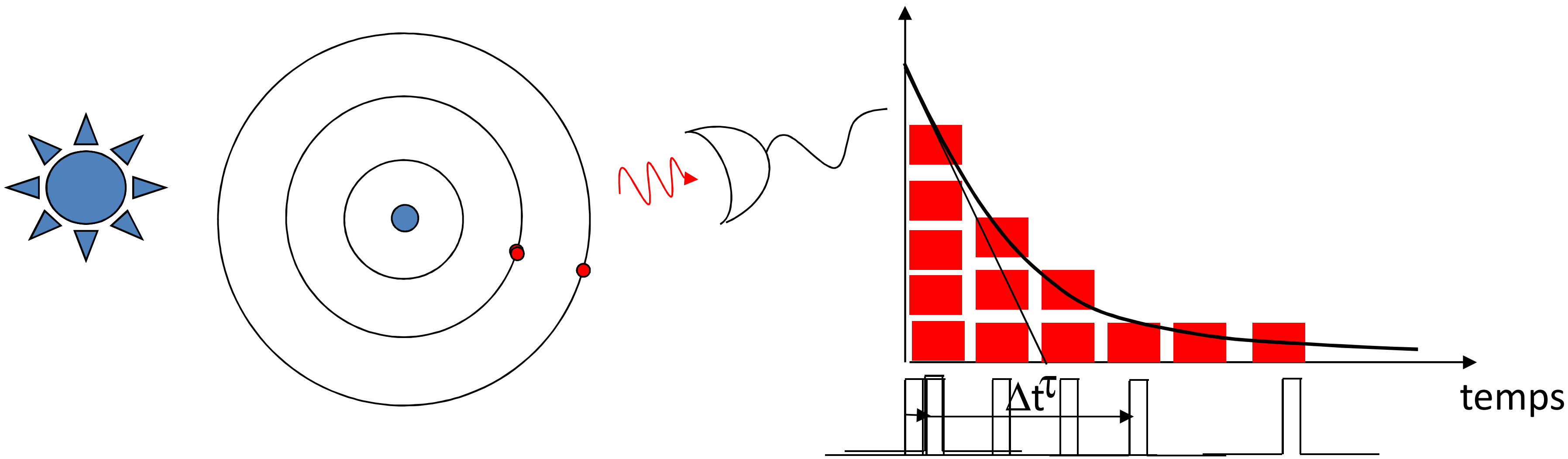
Physique quantique

résultats des interactions décrits par des probabilités

exemple

La désexcitation spontanée d'un atome excité

L'atome (simplifié !)

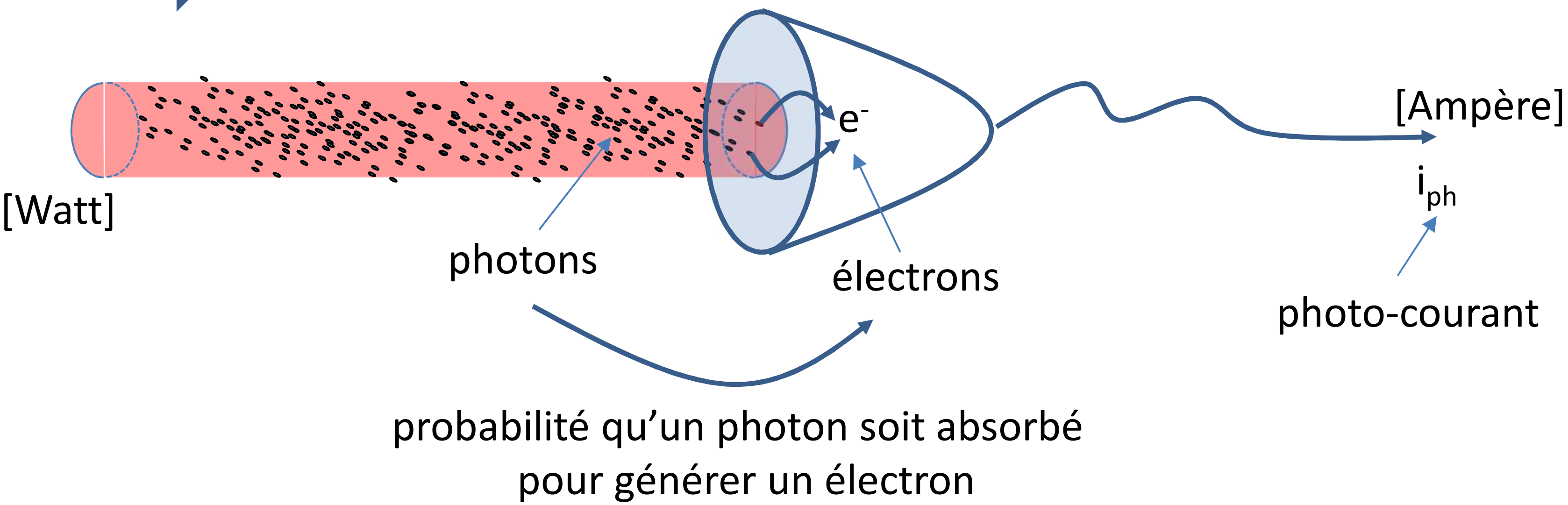


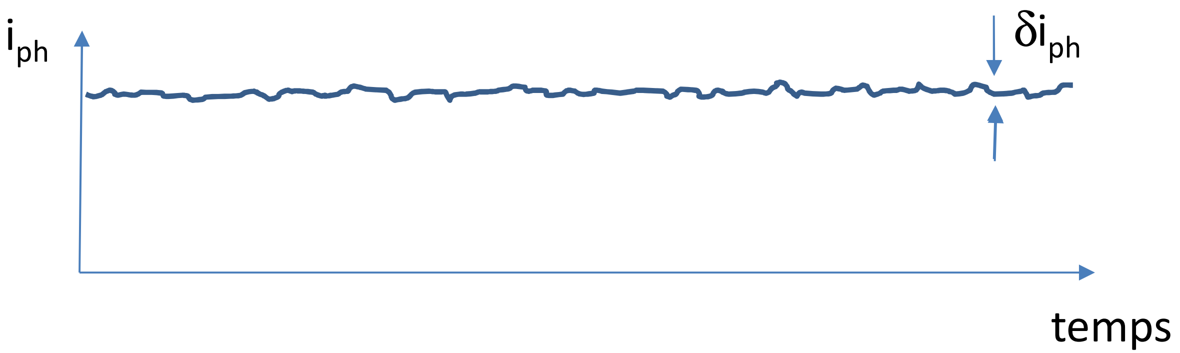
on réitère l'expérience…

durée de vie de l'état excité

exemple

Mesure d’un flux lumineux

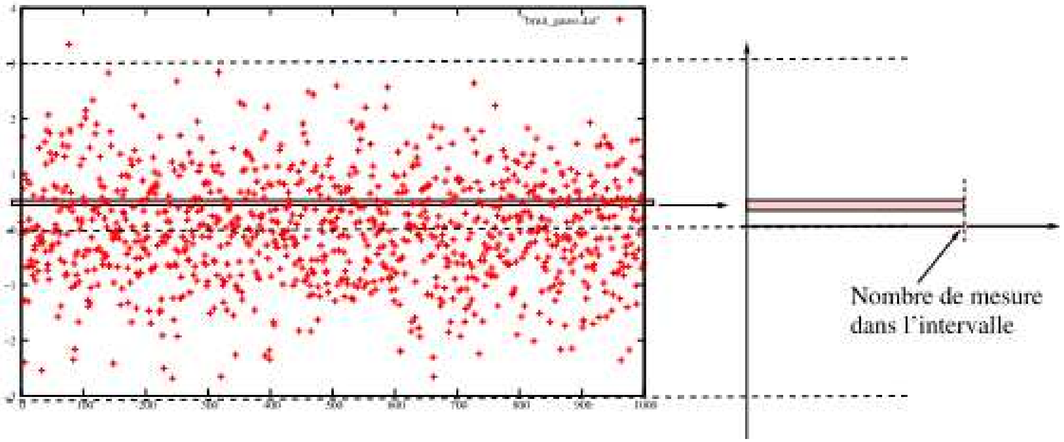


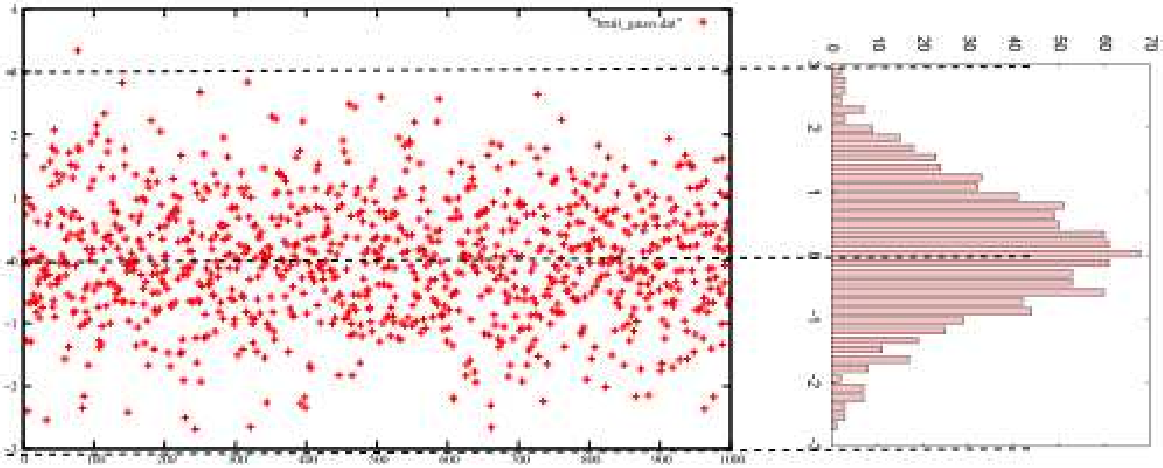


La précision de la mesure de i_{ph} se fait en évaluant l’amplitude des fluctuations δi_{ph}

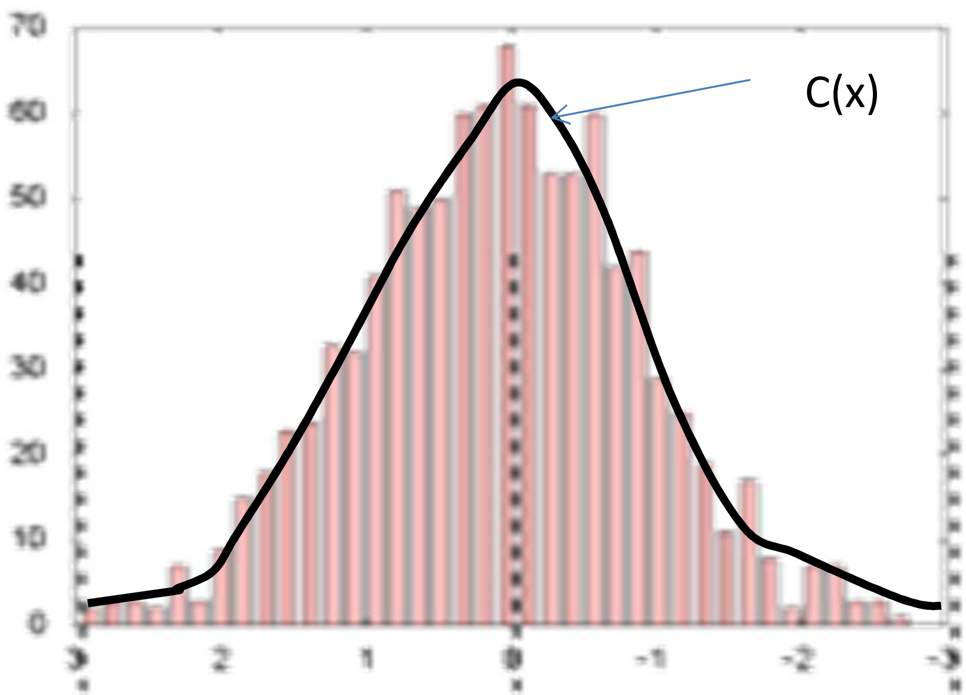
approche statistique

- Construction d'un histogramme :





approche statistique



La densité de probabilité : $p(x) = \frac{C(x)}{\int C(x)dx}$

donc $\int p(x)dx = 1$

La densité de probabilité :

p(x) d'obtenir une mesure entre x et x+dx

La valeur moyenne

$$< x > = \sum x p(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

La variance :

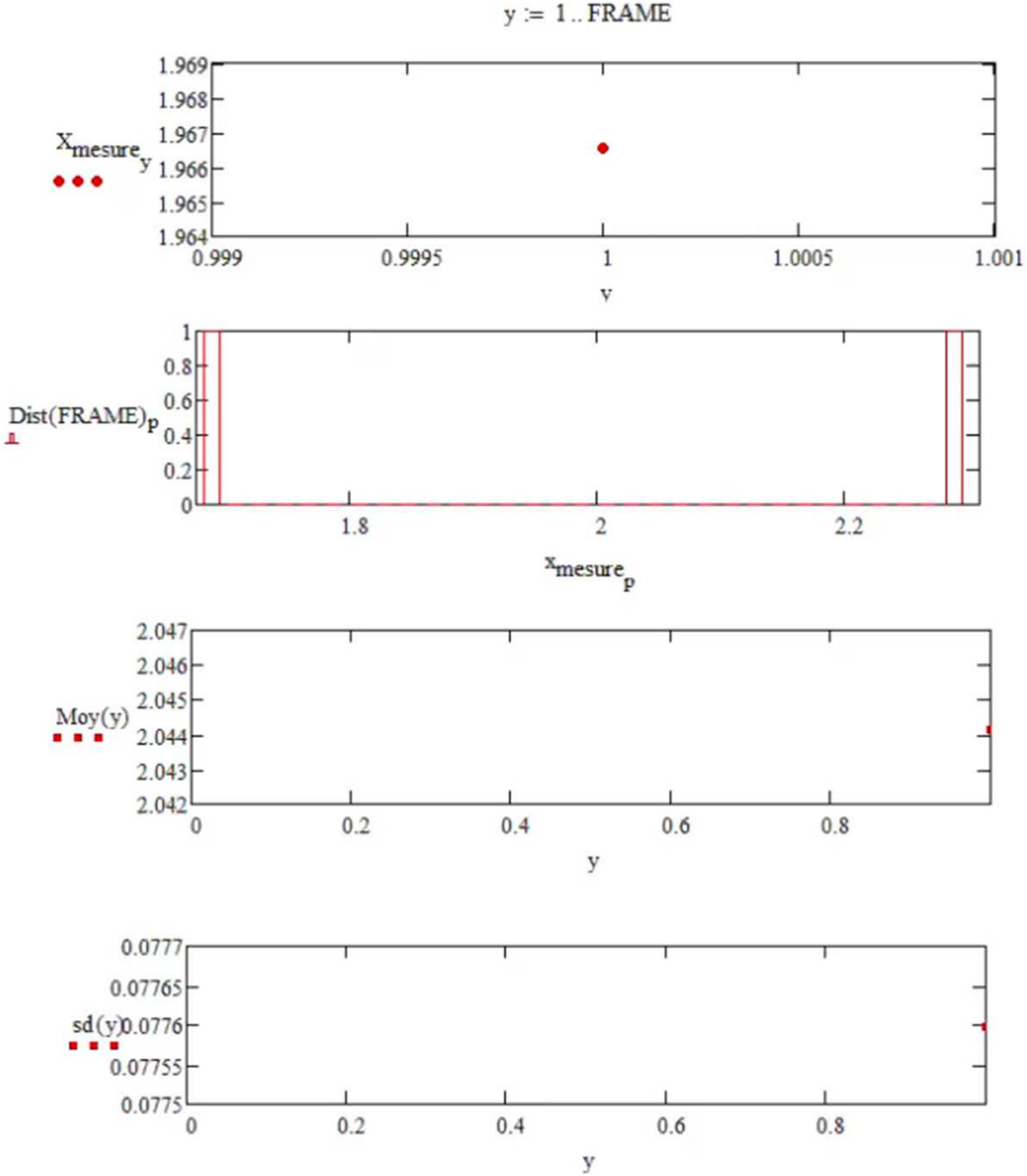
$$\sigma^2 = \sum (x - < x >)^2 p(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - < x >)^2$$

Où σ est l'écart type
ou encore déviation standard

Rq : ces définitions nécessitent
une infinité de mesure !

approche statistique

Convergence temporelle



En général, le bruit aléatoire résulte de plusieurs causes…

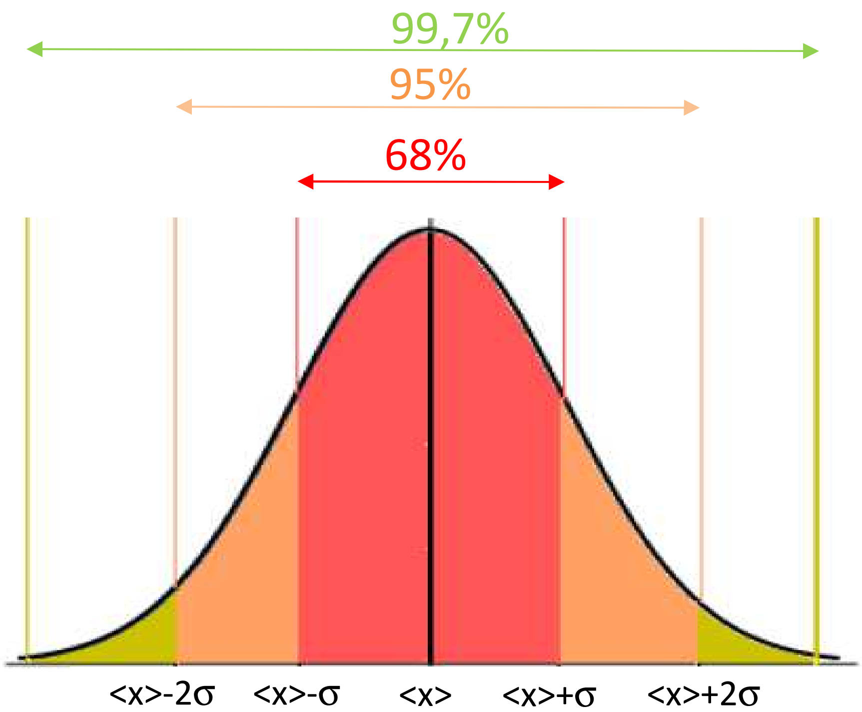
… de plusieurs variables aléatoires

Fluctuation d'électron de conduction, fluctuation de résistance, proba de conversion photon/electron etc…

Lorsqu'un bruit est issue d'un grand nombre de variables aléatoires :

Sa loi de probabilité est en général une **gaussienne** :

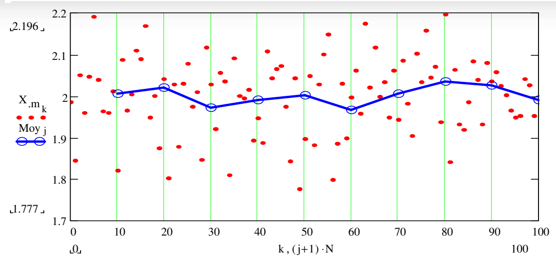
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-<x>)^2/2\sigma^2}$$

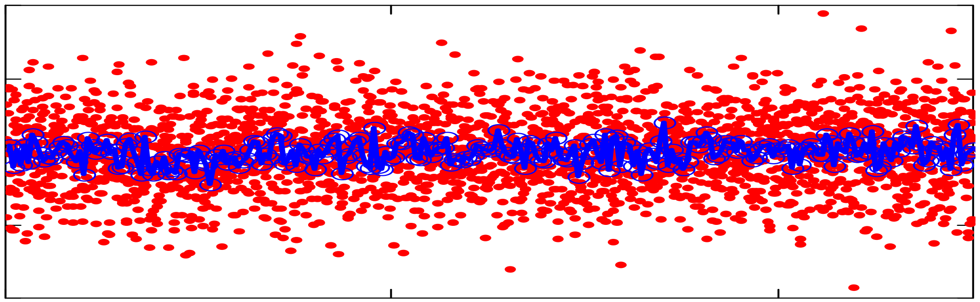


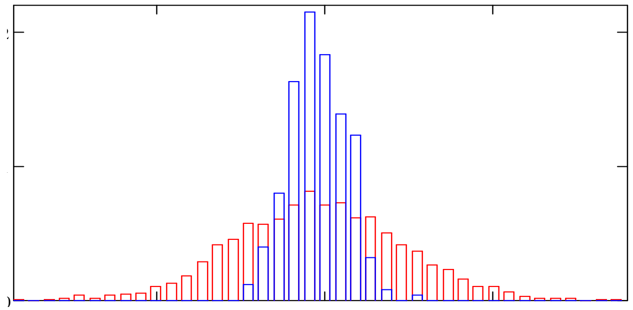
approche statistique

Loi de la moyenne pour les distributions gaussiennes :

Chaque valeur ● est issue de la moyenne de N valeurs ●

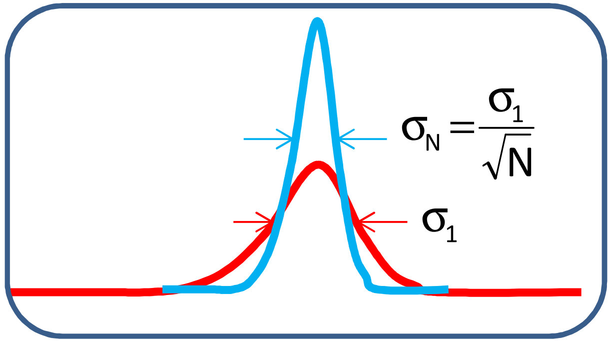






Rapport Signal / Bruit : S/B = <X>/σ

La précision relative : B/S = σ/<X>



augmentée par effet de moyenne : $S/B = \frac{<x>}{\sigma_N} = \frac{<x>}{\sigma_1}.\sqrt{N}$

Faire une moyenne de N échantillons au cours du temps

⇔ intégrer le signal sur τ_{int} où τ_{int} = N x τ_{acq}

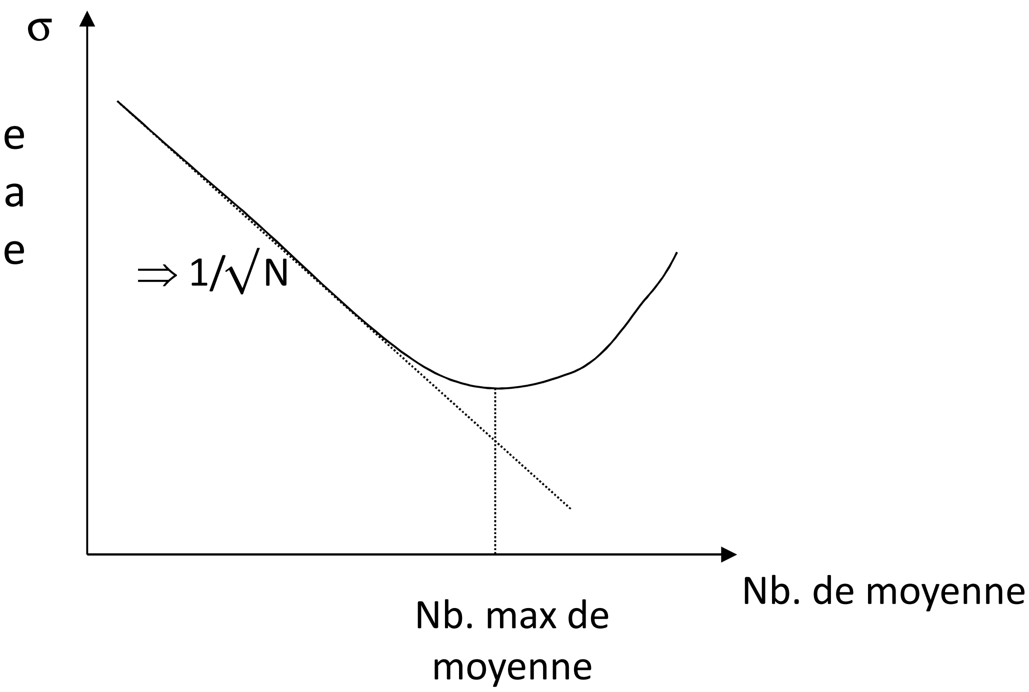
Temps pour l'acquisition d'un échantillon

Donc : $\boxed{S/B \propto \sqrt{\tau_{int}}}$ ou encore $\boxed{B/S \propto 1/\sqrt{\tau_{int}}}$

approche statistique - limites

- la loi en $\sqrt{N}$ s'applique tant que les sources de bruit ont une statistique gaussienne.
- elles doivent l'être sur toute la durée de la mesure τ_{int}
- il existe toujours un temps au bout duquel les conditions de la mesure changent (température en générale et tout les effets induits & oscillations propres du système)

- Il existe donc un nombre de moyenne au-delà duquel la déviation standard cesse de diminuer pour remonter.



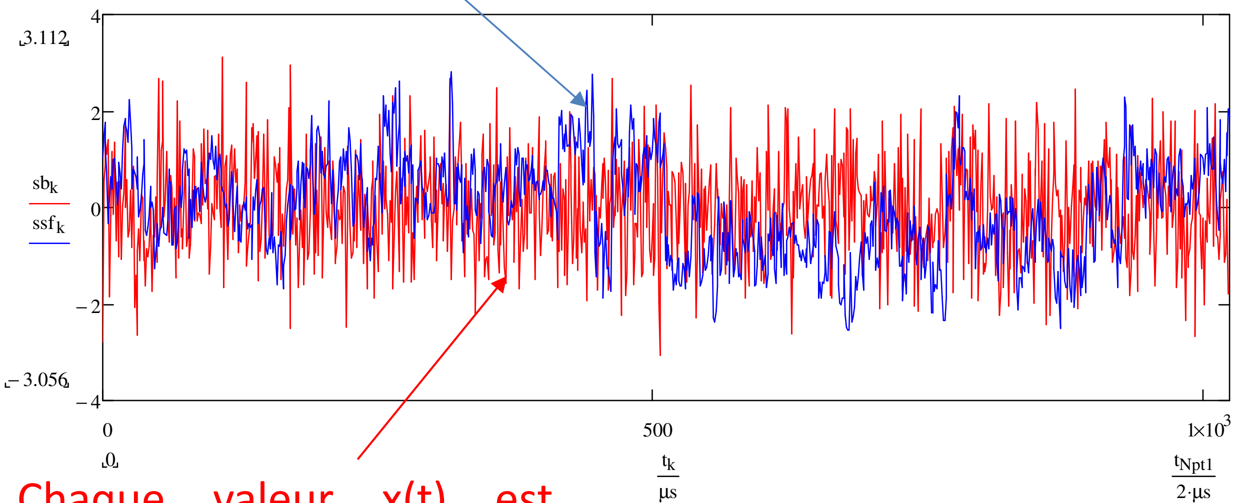
- Le S/B maximum que l'on peut obtenir est donc déterminé par Nmax, soit un temps d'intégration maximum

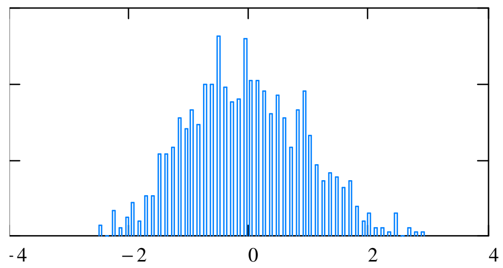
approche statistique - limites

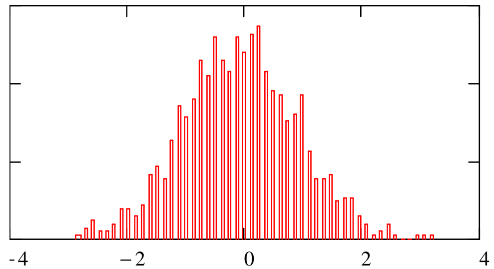
Bruit stationnaire / non stationnaire

Une valeur x(t) est corrélée aux valeurs des instants précédents

<x>(t) et σ(t)







Chaque valeur x(t) est indépendante des valeurs aux instants précédents

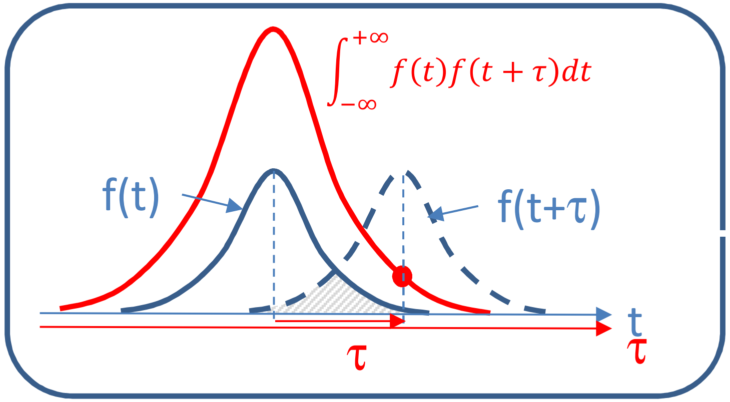
<x> et σ sont cte

Nécessité d'analyser les fluctuations au cours du temps

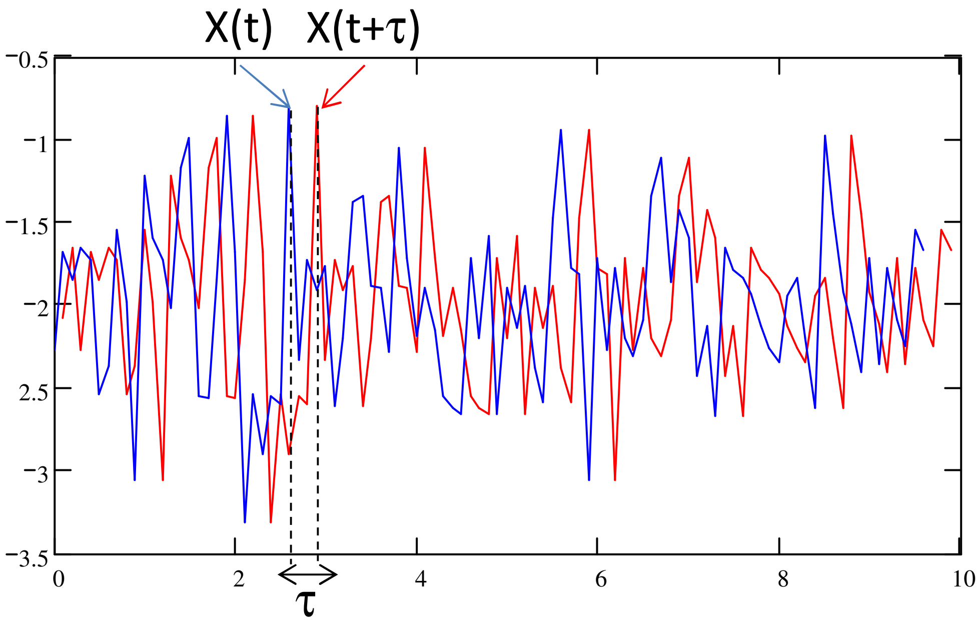
Description temporelle

Fonction d'autocorrélation

principe



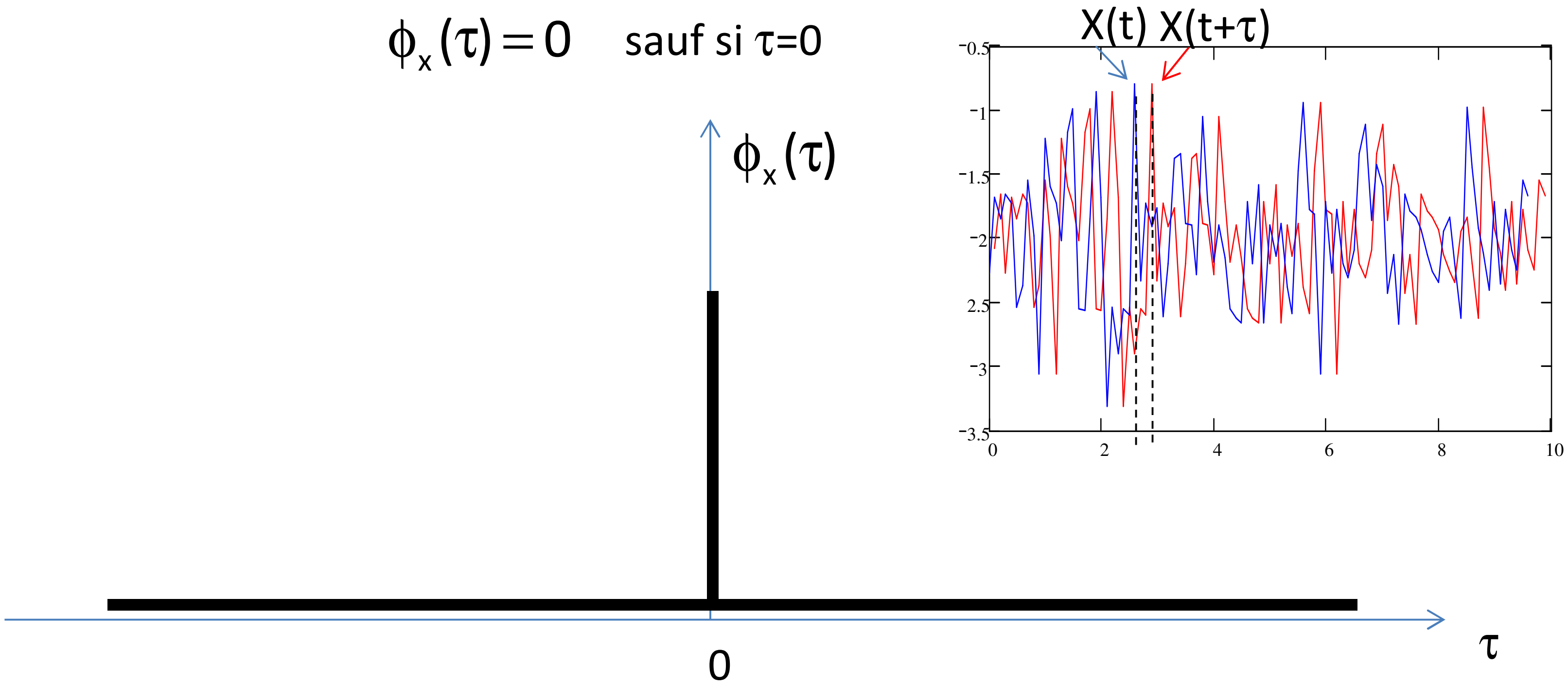
$$\phi_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$



Description temporelle

Si le bruit est non corrélé, représenté par une statistique gaussienne :

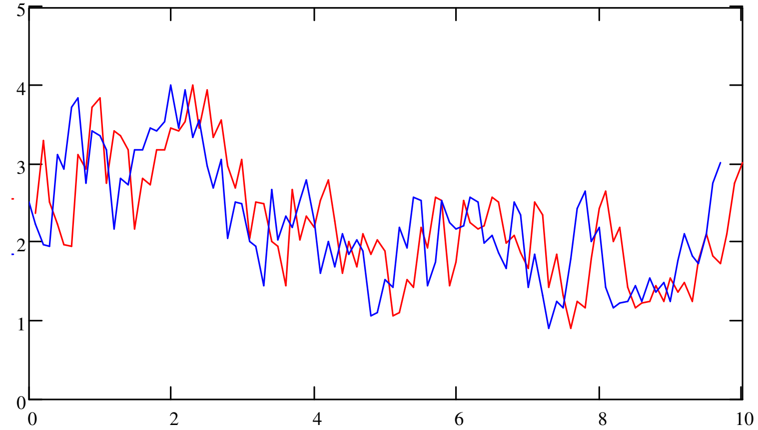
$$\phi_x(\tau) = 0 \quad \text{sauf si } \tau=0$$

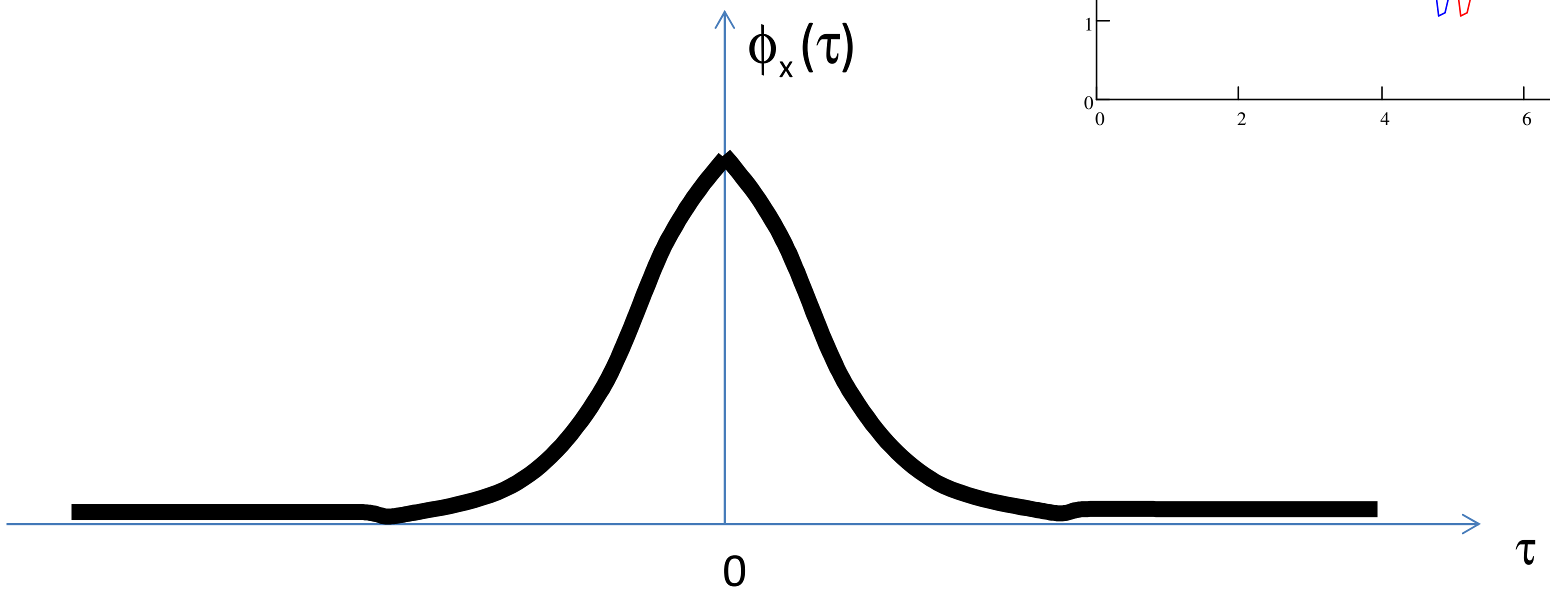


La fonction d’autocorrélation est une fonction de Dirac

Description temporelle

➡ Si le bruit présente des corrélations :





➡ La fonction d'autocorrélation a une certaine forme et une largeur qui caractérise le temps pendant lequel subsiste les corrélations

Description Spectrale

Identifier les fréquences qui composent un bruit

⇔ Faire une analyse spectrale du bruit

La densité spectrale de puissance DSP de bruit :

$$DSP(\nu) = TF[\phi_x(\tau)] = \int < x(t)x(t+\tau) > e^{i2\pi\nu\tau} d\tau$$

V^2/Hz

Propriété remarquable : $\sigma^2 = \int_{f_{min}}^{f_{max}} DSP(\nu) d\nu$ Ou encore $\sigma = \sqrt{\int_{f_{min}}^{f_{max}} DSP(\nu) d\nu}$

Souvent on représente la densité spectral de bruit du signal : DSB

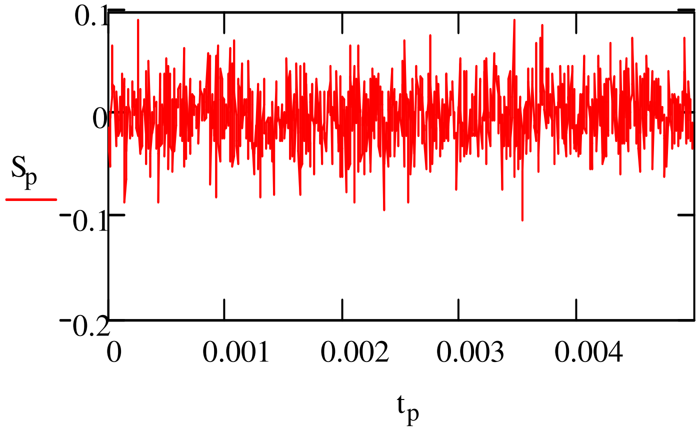
$$DSB(\nu) = \sqrt{DSP(\nu)}$$

Unité $V/\sqrt{Hz}$

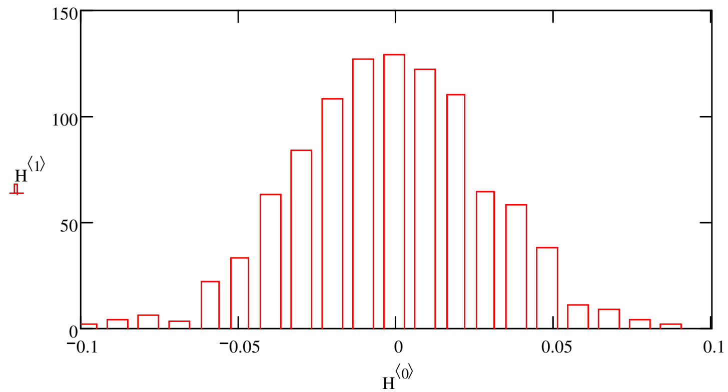
Description Spectrale

Bruit blanc

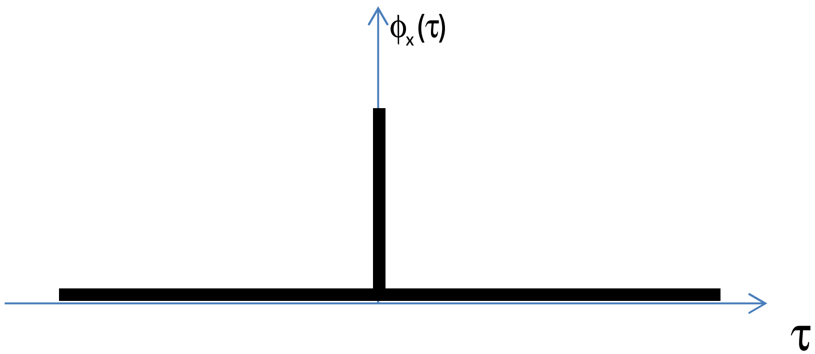
Soit un signal :



dont la distribution statistique correspond à une gaussienne

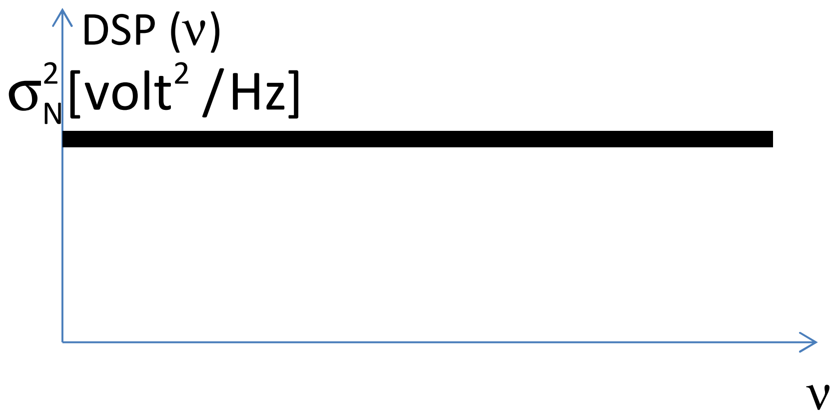


Sa fonction d'autocorrélation est alors un Dirac



TF[δ]=cte

et sa densité spectrale est constante (blanche)

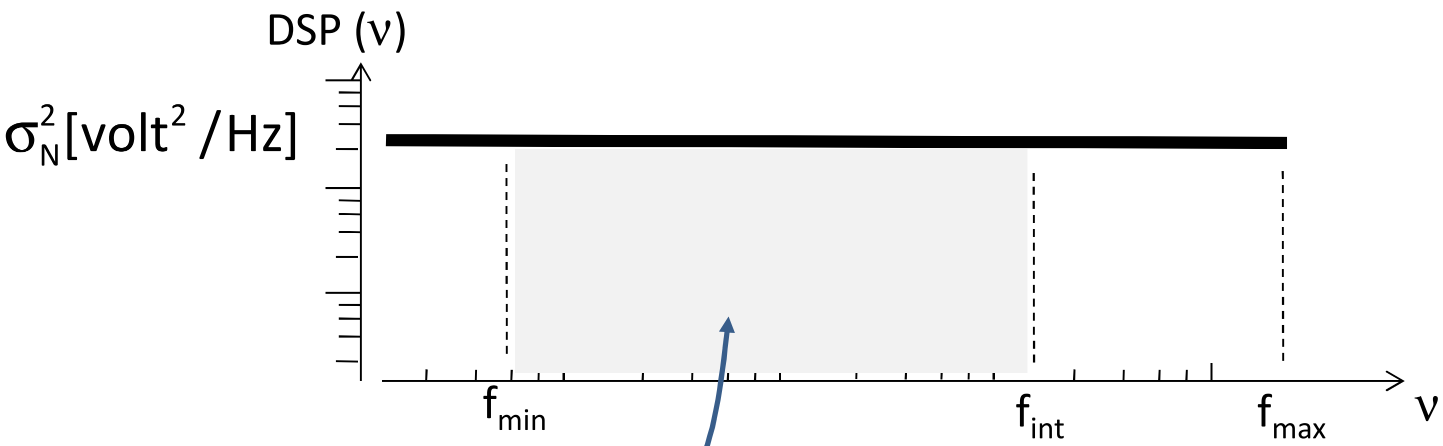


Description Spectrale

Bruit blanc

En pratique la mesure possède un temps d'acquisition minimum Tacq = $1/(2xf_{max})$ mais peut être intégrée (⇔moyennée) sur un temps d'intégration $\tau_{int}=1/f_{int}$

Cette mesure intégrée peut être répétée pendant un temps long $T=1/f_{min}$



La variance : $\sigma^2 = \int_{f_{min}}^{f_{int}} DSP(\nu)d\nu = \sigma_N^2.(f_{int} - f_{min}) = \sigma_N^2.f_{int}$

Et donc la déviation standard : $\boxed{\sigma = \sigma_N.\sqrt{f_{int}}}$

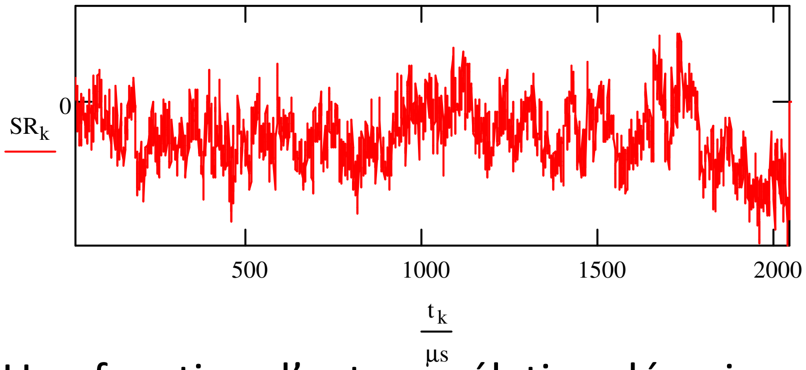
On retrouve le résultat : $B/S \propto 1/\sqrt{\tau_{int}}$

Et σ_N correspond à la déviation standard obtenue sur un temps d'intégration de 1 sec!

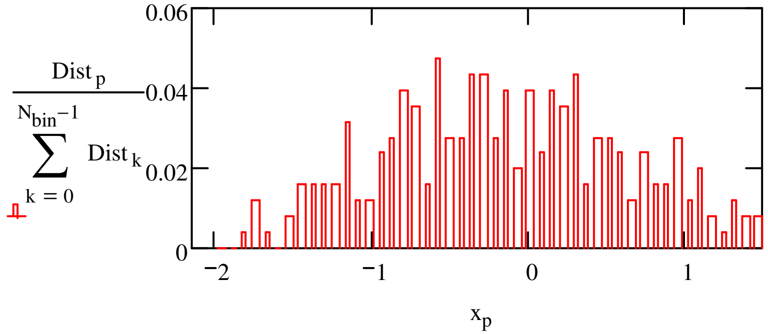
Description Spectrale

Bruit rose - Bruit 1/f

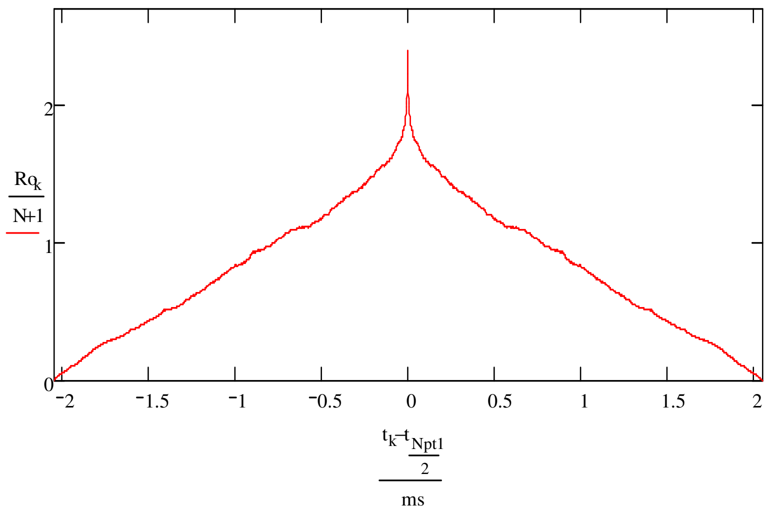
Soit un signal avec corrélation :



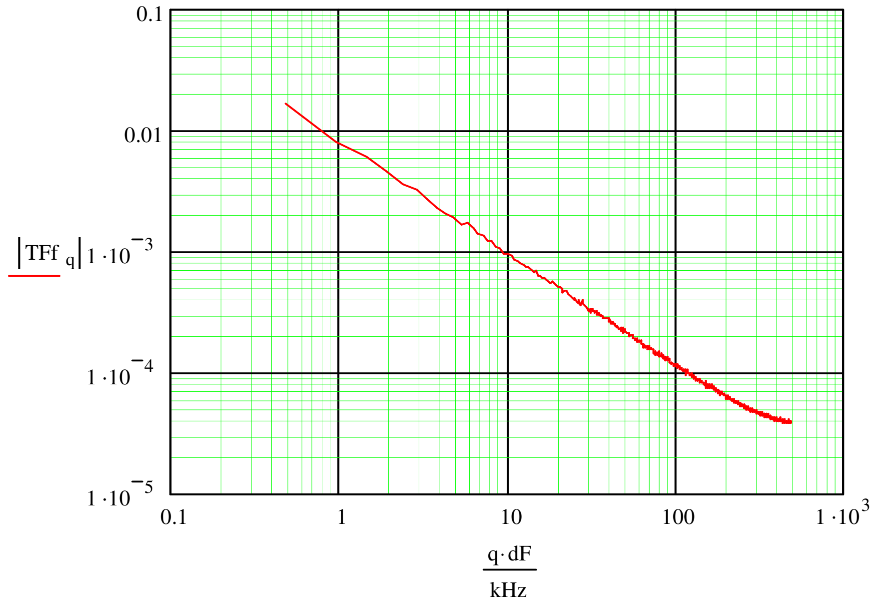
Distribution non gaussienne



Une fonction d'autocorrélation décroissante



Une DSB qui décroit en 1/f



Description Spectrale

- **Bruit rose - Bruit 1/f**

! L'unité de σ_N est le $VxHz^{1/2}$

La variance : $\sigma^2 = \int_{f_{min}}^{f_{int}} DSP(\nu)d\nu = \int_{f_{min}}^{f_{int}} \frac{\sigma_N^2}{\nu^2} d\nu$

La plus petite fréquence qui peut être considérée dans le signal : 1/T

Le temps total d'acquisition

Soit : $\sigma^2 = \sigma_N^2 \cdot \left(\frac{1}{f_{min}} - \frac{1}{f_{int}}\right)$

Comme $f_{int} >> f_{min}$ $\sigma^2 = \frac{\sigma_N^2}{f_{min}}$

La déviation standard est donc : $\boxed{\sigma = \frac{\sigma_N}{\sqrt{f_{min}}}}$

La bande passante du dispositif n'affecte pas la précision

Elle se dégrade avec la durée de l'enregistrement!

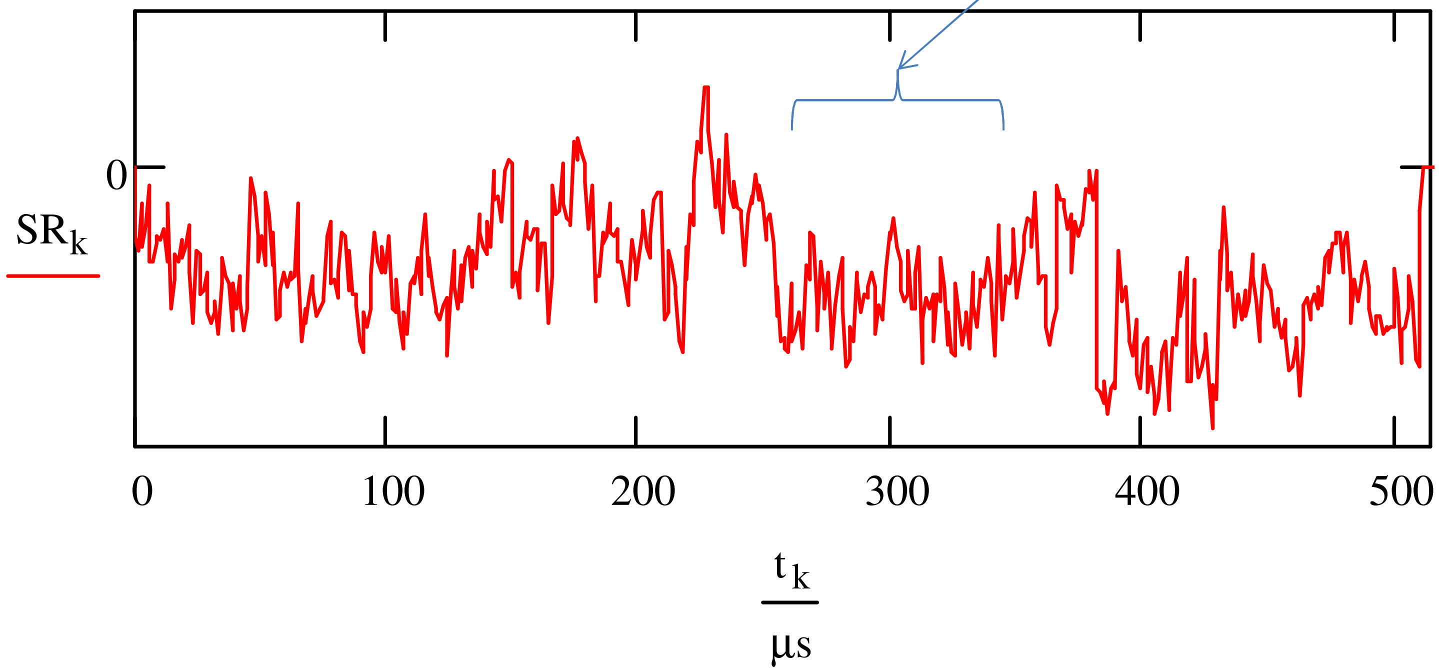
Description Spectrale

Bruit rose - Bruit 1/f

Le bruit 1/f est présent dans tout les dispositifs

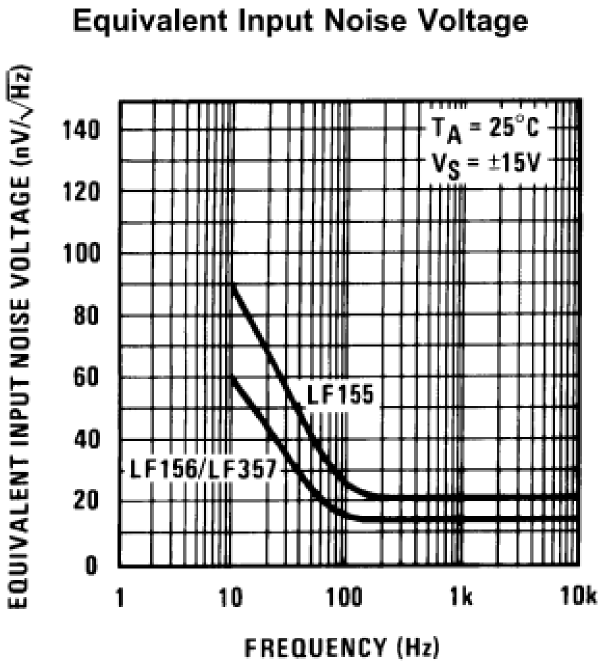
Cependant, il peut se manifester qu'a partir de durées suffisamment longues.
Pour les temps plus court le bruit blanc est dominant

à cette échelle de temps,
le bruit est blanc

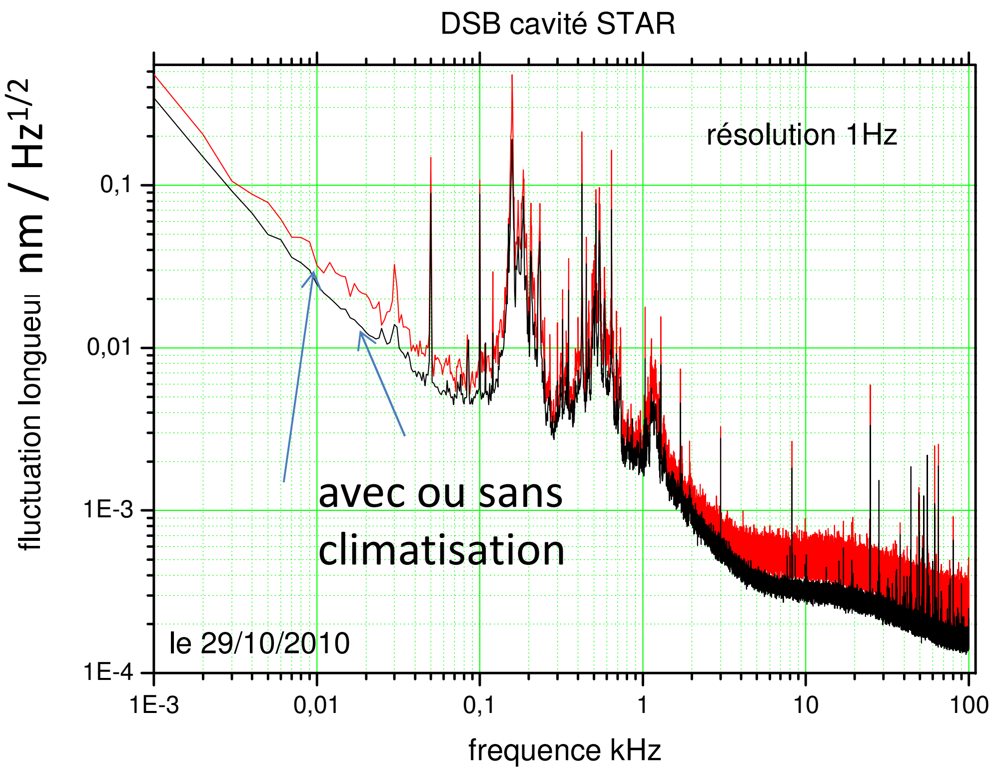


Spectre de bruit en général

Spectre de bruit d'un AOP :



Spectre de bruit d'une distance entre deux miroirs « fixes » montés sur une table optique.



Conclusion

- Discours uniquement dédié à la notion de précision et non d'exactitude

  ⇨ introduire dans le système de mesure une référence stabilisée

- La précision ultime est obtenue lorsqu'elle est gouvernée par les fluctuations quantiques

- La temporalité de la mesure est un facteur dominant de la précision

  ⇨ Les paramètres du système doivent être stables (sans dérive) pendant le temps de mesure