Le trinôme hasardeux

Sur WIMS (`http://wims.auto.u-psud.fr/wims/faq/fr/program.html`), les enseignants peuvent automatiser la création d'exercices pour permettre à leurs élèves de s'entraîner.
Un enseignant automatise des exercices de résolution d'équations du second degré du type :

$$a\,x^2 + a\,x + c = 0$$

où a et c sont choisis au hasard par le logiciel dans l'intervalle $[-10; 10]$.
Un élève faible en calcul s'exerce longuement... Avec quelle probabilité a-t-il obtenu des équations sans racine ?

Vous tenterez de répondre expérimentalement à la question à l'aide du (ou des) logiciel(s) de votre choix.
Vous rédigerez ensuite une démonstration.

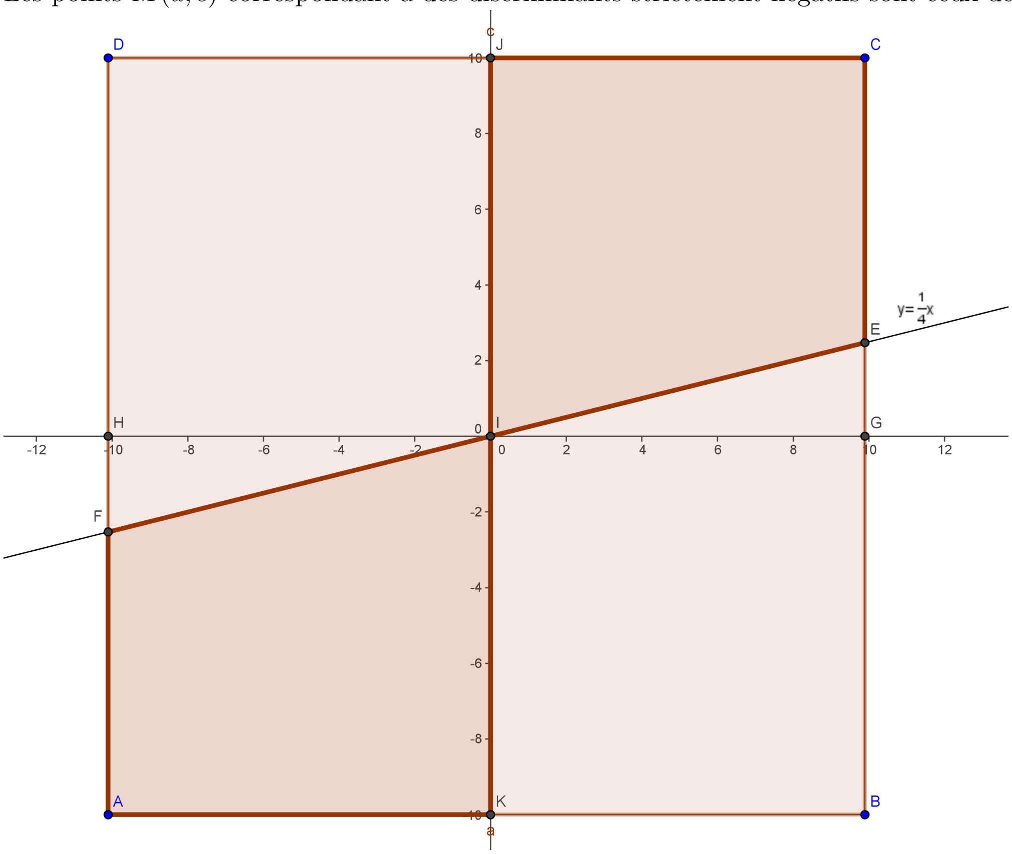
Corrigé, commentaires

1 Notions travaillées

1. probabilités
2. discriminant
3. équations de droites.

2 Petite étude

Le discriminant est $\Delta = a^2 - 4\,a\,c = a(a-4c)$.
L'expérience consiste à tirer au hasard des points $M(a;c)$ dans le carré $ABCD$ où $A(-10;-10)$, $B(10;-10)$, $C(10;10)$, $D(-10;10)$ (c'est à dire à tirer deux nombres a et c suivant la loi uniforme dans l'intervalle $[-10;10]$ et de façon indépendante).
Les points $M(a;c)$ correspondant à des discriminants strictement négatifs sont ceux de la zone suivante :



d'où la probabilité cherchée :

$$p = \frac{2 \times \left(100 - \frac{100}{8}\right)}{20 \times 20}$$

soit

$$\boxed{p = \frac{7}{16}}$$

En d'autres termes :

1. si $a > 0$, on choisit c dans l'intervalle $\left]\frac{a}{4};10\right]$

2. si $a < 0$, on choisit c dans $\left[-10; \dfrac{a}{4}\right[$

On a donc une proba de :

$$\frac{1}{20}\int_{-10}^{0} \frac{\frac{a}{4}+10}{20}\,\mathrm{d}a \;+\; \frac{1}{20}\int_{0}^{10} \frac{10-\frac{a}{4}}{20}\,\mathrm{d}a = \frac{7}{16}$$

3 Stratégie avec un tableur

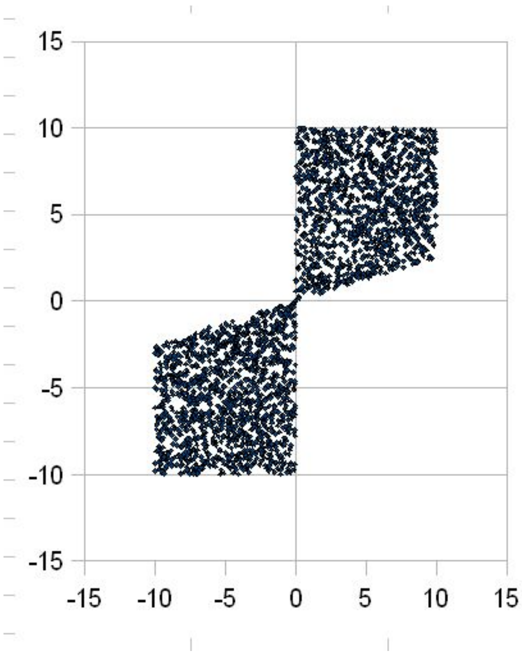
Dans un tableur :

	A	B	C	D	E
1	=20*ALEA()-10	=20*ALEA()-10	=A1*(A1-4*B1)	=SI(C1<0;1;0)	=SOMME(D1:D65536)
2	=20*ALEA()-10	=20*ALEA()-10	=A2*(A2-4*B2)	=SI(C2<0;1;0)	=E1/65536
3	=20*ALEA()-10	=20*ALEA()-10	=A3*(A3-4*B3)	=SI(C3<0;1;0)	
4	=20*ALEA()-10	=20*ALEA()-10	=A4*(A4-4*B4)	=SI(C4<0;1;0)	
5	=20*ALEA()-10	=20*ALEA()-10	=A5*(A5-4*B5)	=SI(C5<0;1;0)	
6	=20*ALEA()-10	=20*ALEA()-10	=A6*(A6-4*B6)	=SI(C6<0;1;0)	
7	=20*ALEA()-10	=20*ALEA()-10	=A7*(A7-4*B7)	=SI(C7<0;1;0)	
8	=20*ALEA()-10	=20*ALEA()-10	=A8*(A8-4*B8)	=SI(C8<0;1;0)	
9	=20*ALEA()-10	=20*ALEA()-10	=A9*(A9-4*B9)	=SI(C9<0;1;0)	

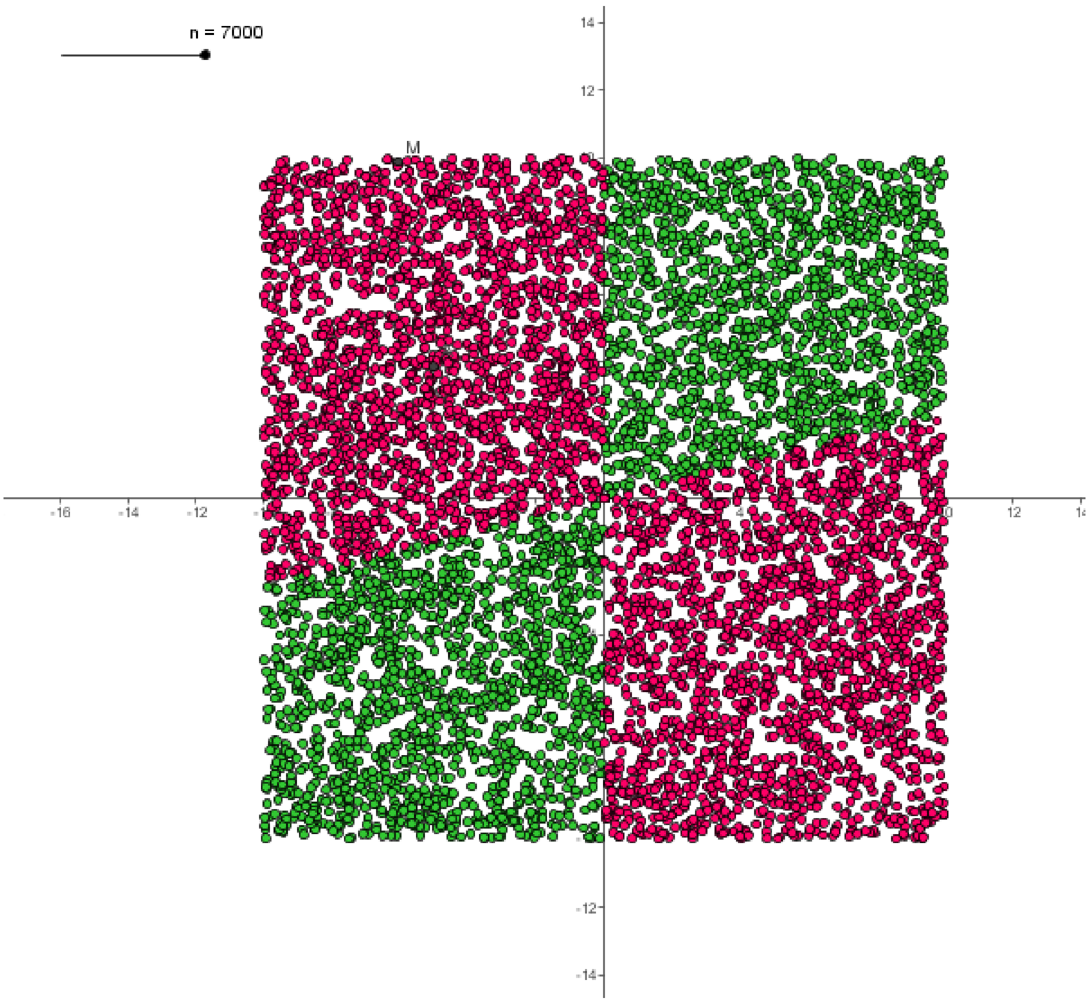
on obtient par exemple :

	A	B	C	D	E
1	0,03	-7,28	0,76	0	28799
2	-2,97	-7,23	-77,19	1	0,44
3	9,36	4,69	-88,11	1	
4	-1,42	-4,66	-24,49	1	
5	-7,13	-8,08	-179,64	1	
6	5,82	6,77	-123,72	1	
7	4,74	3,48	-43,55	1	
8	4,73	-7,86	170,98	0	
9	-8,68	7,71	343,16	0	
10	6,35	8,44	-174,24	1	

Si l'on veut une représentation graphique :
en colonne E et F, on définit les formules :
cellule E1 : =SI(D1=1;A1;0)
cellule F1 : =SI(D1=1;B1;0)
on garde ainsi uniquement les couples $(a;c)$ avec $\Delta = a^2 - 4ac < 0$ et on obtient un nuage de points de ce genre :


15
10
5
0
-5
-10
-15
-15 -10 -5 0 5 10 15

4 Stratégie avec geogebra



Protocole :

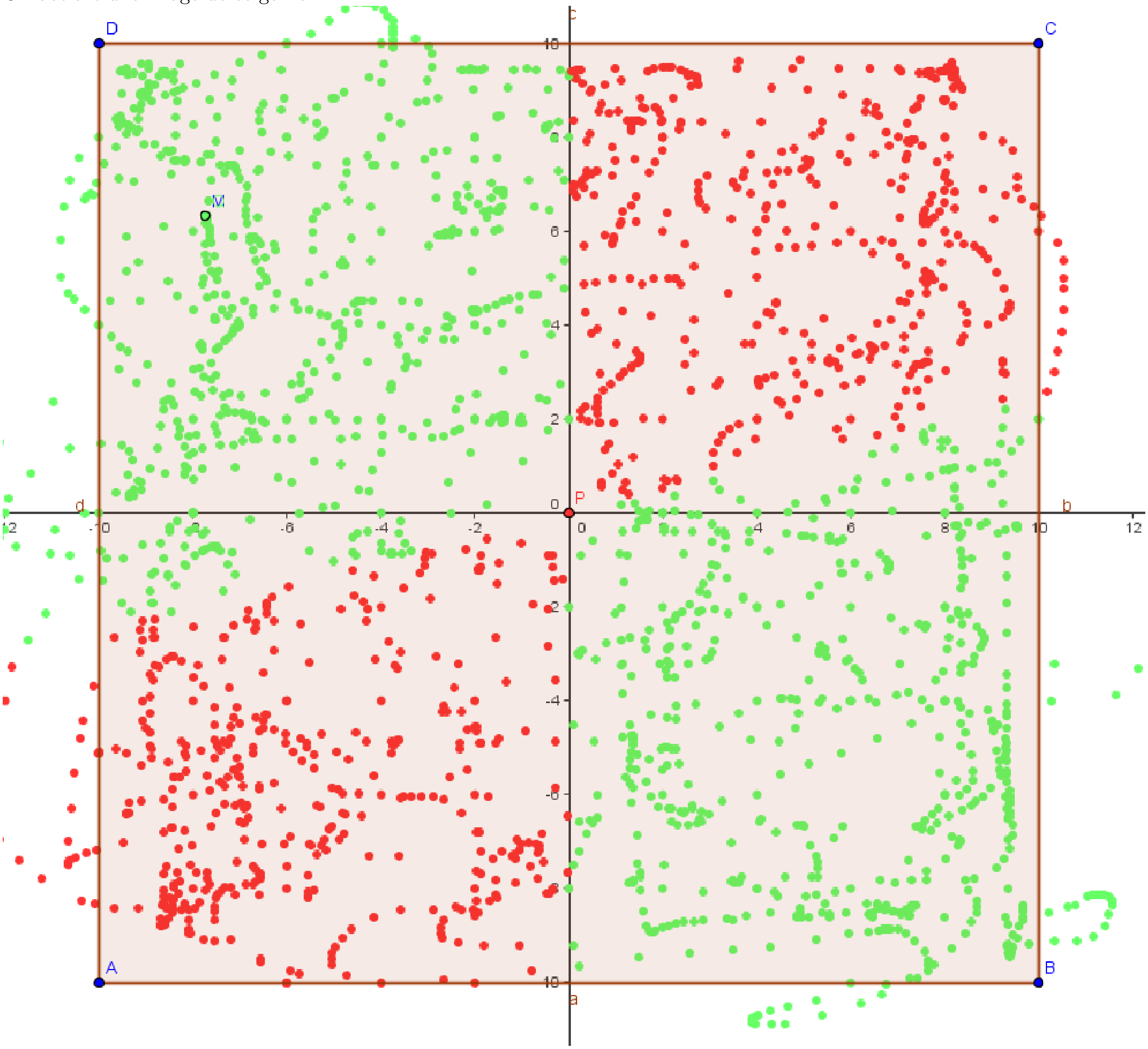
1. On crée un curseur n qui désignera le nombre de points $M(a;c)$ tirés au hasard.
2. On crée ensuite une liste L1 de points de la façon suivante :
   Séquence[(20 random()− 10, 20 random()− 10 + i ∗0), i, 1, n] (le i∗0 est une astuce pour que la liste soit effectivement créée (bug de geogebra ?))
3. On crée ensuite une liste L2 qui n'affichera que les points de L1 vérifiant $a^2 - 4ac < 0$:
   Séquence[Si[x(Elément[L1, i])ˆ2 < 4 x(Elément[L1, i]) y(Elément[L1, i]) , Elément[L1, i], (0, 0)], i, 1, n] et en cliquant droit sur cette liste, on choisit un affichage de couleur verte.
4. On peut alors créer une liste L3 qui n'affichera que les points de L1 vérifiant $a^2 - 4ac \geqslant 0$:
   Séquence[Si[x(Elément[L1, i])ˆ2 >= 4 x(Elément[L1, i]) y(Elément[L1, i]) , Elément[L1, i], (0, 0)], i, 1, n] et en cliquant droit sur cette liste, on choisit un affichage de couleur rouge.
5. Il ne reste plus qu'à jouer avec le curseur.

On peut construire un fichier beaucoup plus simple de la façon suivante (mais le hasard a disparu . . .) :

1. On définit un point M libre dans le plan.
2. On définit le carré $ABCD$ où $A(-10;-10)$, $B(10;-10)$, $C(10;10)$, $D(-10;10)$.
3. On définit le point P par P=Si[x(M)ˆ2 < 4∗x(M)∗y(M), M] , on demande un affichage de P en rouge et on active la trace de P.

4. On définit de même le point Q par Q=Si[x(M)^2 >= 4*x(M)*y(M), M] , on demande un affichage de Q en vert et on active la trace de Q.
5. On balade alors le point M à la souris.

On obtient une image de ce genre :



5 Stratégie avec un logiciel de calcul formel

Avec Xcas, on peut écrire le petit programme suivant :

```
trinomehasardeux(n):={
local a,c,CompteurTrinomeSansRacine,j;
CompteurTrinomeSansRacine:=0;
```

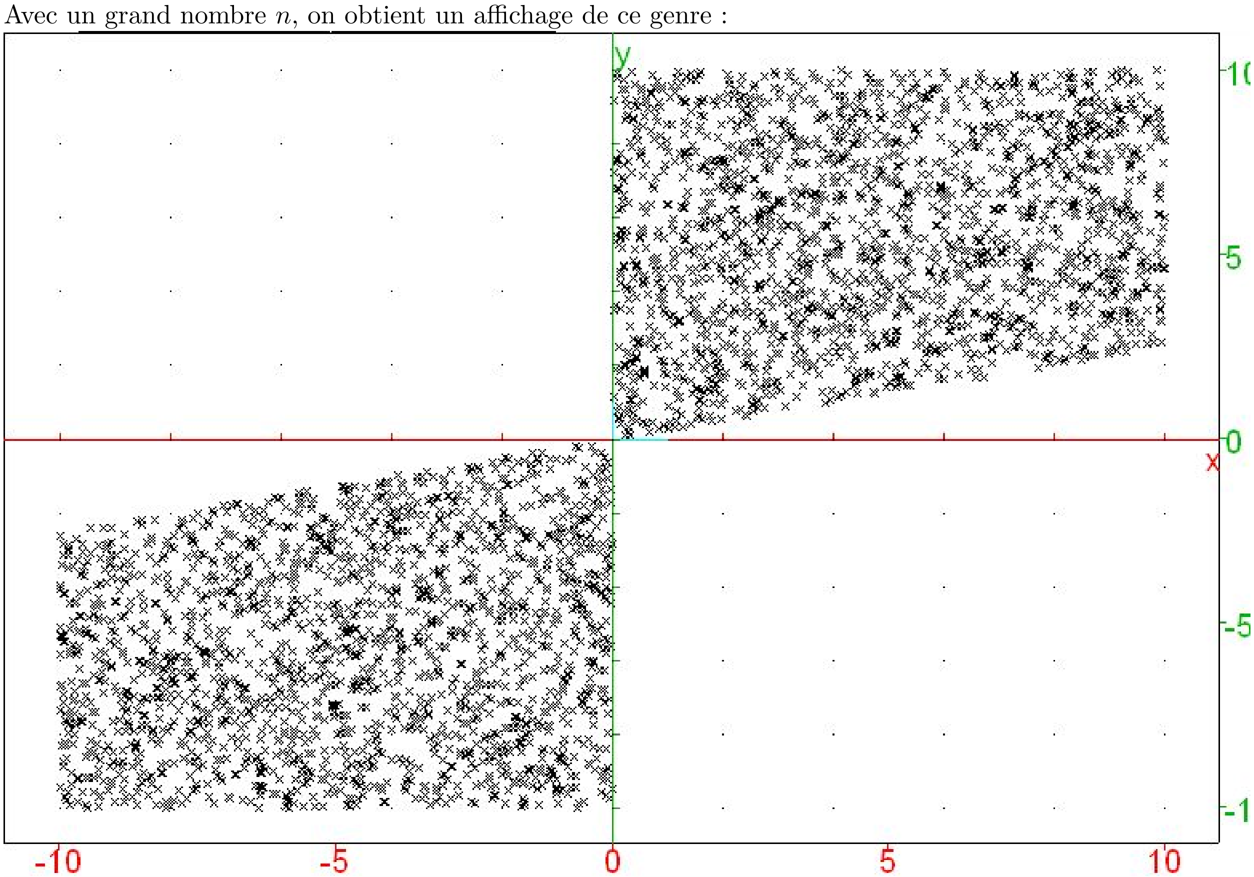
```
pour j de 1 jusque n faire
a:=hasard(-10,10);c:=hasard(-10,10);
si a^2-4*a*c<0
alors CompteurTrinomeSansRacine:=CompteurTrinomeSansRacine+1;
fsi;
fpour;
return evalf(CompteurTrinomeSansRacine/n);
}
```

trinomehasardeux(10000) donne 0.4375 ...

Xcas présentant également un module de géométrie, on peut donner une image géométrique de ce programme (on crée une liste TrinomeSansRacine des points $M(a;c)$ correspondants à des discriminants strictement négatifs) :

```
trinomehasardeuxgeom(n):={
local a,c,TrinomeSansRacine,j;
TrinomeSansRacine:=[];
pour j de 1 jusque n faire
a:=hasard(-10,10);c:=hasard(-10,10);
si a^2-4*a*c<0
alors TrinomeSansRacine:=append(TrinomeSansRacine,point((a,c)));
fsi;
fpour;
return (TrinomeSansRacine);
}
```

Avec un grand nombre n, on obtient un affichage de ce genre :



On peut enjoliver un peu avec de la couleur :

```
trinomehasardeuxgeom(n):={
local a,c,TrinomeSansRacine,TrinomeAvecRacine,j;
```

```
TrinomeSansRacine:=[];TrinomeAvecRacine:=[];
pour j de 1 jusque n faire
a:=hasard(-10,10);c:=hasard(-10,10);
si a^2-4*a*c<0
alors TrinomeSansRacine:=append(TrinomeSansRacine,couleur(point((a,c)),rouge));
sinon TrinomeAvecRacine:=append(TrinomeAvecRacine,couleur(point((a,c)),bleu));
fsi;
fpour;
return (TrinomeSansRacine,TrinomeAvecRacine);
}
```

ce qui donne (avec environ 7000 points) :