Notions traitées : Distances. Continuité sur les espaces métriques. Espaces compacts. Espaces séparables. Espaces complets. Propriété de Baire. Théorème des contrations. Applications.

1 Distances

Exercice 1.1. Soit (X,d) un espace métrique, $A \subset X$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A \colon X \to \mathbb{R}$, définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1_A}(x) = 0$ si $x \notin A$, soit continue.

Exercice 1.2. Soit (X,d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $A \subset X$, avec $A \neq \emptyset$, on pose

$$d(x,A) := \inf\{d(x,y) : y \in A\}.$$

a) Montrer que la fonction
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}$$
est 1-lipschitzienne (c'-à-d qu'elle vérifie
$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y), \qquad \forall x,y \in X).$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in X : d(x,A) < d(x,B)\}$ est ouvert.

c) En déduire que si F et G sont deux fermés disjoints de X, il existe deux ouverts U et V tels que
$$F \subset U,\ G \subset V,\ U \cap V = \emptyset.$$

2 Utilisation de la compacité

Exercice 2.1.

1. Démontrer que si (X,d) est un espace métrique compact et $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ est une application bijective et continue, alors f est un homéomorphisme.
2. (Un contrexemple classique à la propriété précédente). Soit $f\colon [0,2\pi[\to \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ l'application définie par $f(t) = e^{it}$. Démontrer que f est bijective et continue, mais f n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 2.2. (Utilisation de la compacité)

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé non vide. Démontrer que $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe dans A un point de meilleure approximation pour x_0 : $\exists\, a_0 \in A$ tel que $d(x_0,a_0) = \inf_{a\in A} d(x_0,a)$.
2. (Un contrexemple à la propriété précédente, dans un espace de dimension infinie). Soit $X = C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la distance du sup : $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$. Vérifier que l'ensemble $A = \{f \in X \colon \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1\}$ est fermé. Calculer $d(0,A)$ et montrer qu'il n'y a pas de fonction $f \in A$ telle que $d(0,f) = d(0,A)$.

Exercice 2.3. (Un théorème de point fixe) Soient (K,d) un espace métrique compact et f : $K \to K$ une fonction telle que $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ si $x,y \in K$ et $x \neq y$.

1. Montrer que f a au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a,f(a)) \leq d(x,f(x))$ pour tout $x \in K$.
3. Montrer que a est le point fixe de f.
4. Pour $x_0 \in X$, on définit $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(d(x_n,a))_{n\geq 0}$ converge vers une limite $l \geq 0$.
5. Montrer que $l = 0$. Conclusion ?

3 Séparabilité

Exercice 3.1. Démontrer que tout espace m'etrique compact est séparable.

Exercice 3.2.

1. Soit (X, d) un espace métrique. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, un ensemble I infini non dénombrable et $(x_i)_{i\in I} \subset X$ tels que
$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon, \qquad \forall i, j \in I, i \neq j.$$
Montrer que (X, d) n'est pas séparable.
2. Soit ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Exercice 3.3.

1. Soit c_0 l'espace des suites réelles convergentes vers 0, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que c_0 est séparable.
2. Soit $1 \leq p < \infty$. Démontrer que l'espace $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est séparable.

4 Exemples d'espaces complets

Exercice 4.1. On considère sur $X =]0, +\infty[$ la distance euclidienne $d_e(x, y) = |x - y|$ et la distance d définie par $d(x, y) = |\ln x - \ln y|$.

1. Les distances d et d_e sont-elles métriquement équivalentes ? Sont-elles topologiquement équivalentes ?
2. L'espace (X, d_e) est-il complet ? Et l'espace (X, d) ?

Exercice 4.2. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Démontrer que si Y est complet, alors l'espace $C_b(X, Y)$ de toutes les fonctions continues et bornées de X dans Y est complet pour la distance $d(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$.

Retrouver que si $a < b$, alors l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$, muni de la norme du sup, est un espace de Banach.

5 Applications du théorème de Baire

Exercice 5.1. (Théorème de Baire) Soit (X, d) un espace métrique complet.

1. (Théorème de Baire). Démontrer que l'intersection dénombrable d'ouverts denses est dense dans X.
2. Montrer que toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide dans X.
3. Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés de X telle que $\cup_{n\geq 1} F_n = X$. Montrer que $\bigcup_{n\geq 1} \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense dans X.

Soient X un espace métrique complet, et A une partie de X. On dit que A est ***Baire-négligeable*** *(ou "maigre") si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés de X d'intérieurs vides. Si une propriété est satisfaite en tout point de X sauf éventuellement dans un ensemble Baire-négligeable, on dit qu'elle est valable* ***Baire-presque partout.***

Exercice 5.2. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer sur des exemples qu'en général f n'est pas continue.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : \forall p \geq n,\ |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}.$$

   Montrer que $\Omega_\varepsilon = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser l'exercice précédent) et que

$$\forall x_0 \in \Omega_\varepsilon, \exists V \text{ voisinage de } x_0 \text{ tel que } |f(x_0) - f(x)| \leq 3\varepsilon \text{ dans } V.$$

3. Démontrer que f est continue Baire-presque partout.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

6 Applications contractantes

Exercice 6.1. Soient (X, d) un espace métrique complet, $f \colon X \to X$ et $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (k fois) est contractante. Montrer que f a exactement un point fixe.

Exercice 6.2. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n$, $n \geq 0$. On veut montrer le résultat suivant : *il existe un unique choix de* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $(x_n) \subset [10, 11]$

1. Montrer que $Y = \{(y_n) \in \ell^\infty \colon (y_n) \subset [10, 11]\}$, muni de la distance $d\big((y_n), (y_n')\big) = \sup_n |y_n - y_n'|$ est complet.
2. Soit $F((y_n)) = (z_n)$, où $z_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n}$. Montrer que $F \colon Y \to Y$ est bien définie et contractante.
3. Conclure.

exercice 1.1

(X,d) espace métrique, $A \subset X$

$\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

$\mathbb{1}_A$ continue $\iff$ A ouverte et fermé dans X.

" $\Rightarrow$ " $\mathbb{1}_A$ continue $\Rightarrow$ $\begin{cases} A = \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) \text{ est fermé} \\ A^c = \mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}) \text{ est fermé} \end{cases}$

" $\Leftarrow$ " Soit $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}$.

On a : $\mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{U}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0, 1 \notin \mathcal{U} \\ A & \text{si } 0 \notin \mathcal{U},\ 1 \in \mathcal{U} \\ A^c & \text{si } 1 \notin \mathcal{U},\ 0 \in \mathcal{U} \\ X & \text{si } 0, 1 \in \mathcal{U}. \end{cases}$

dans tous les cas $\mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{U})$ est ouvert $\Rightarrow$ $\mathbb{1}_A$ continue.

exercice 1.2

$A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Soit $x \in X$, $y \in X$.

$\forall a \in A$:

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a).$$

(par pass. à l'inf) $\Rightarrow$

$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,a)$$

$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y).$$

En échangeant les rôles de x et y, on trouve :

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

Ceci prouve que l'appl. $d(\cdot,A) : X \to \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.

En particulier, $d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$ est continue.

(b) $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$.

$\{x \in X : d(x,A) < d(x,B)\} = f^{-1}(]-\infty, 0[)$, où

$f : X \to \mathbb{R}$ est la fonction $f(x) = d(x,A) - d(x,B)$

et cette fonction est continue

Cet ensemble est donc ouvert dans X.

(c) Soit $F, G \subset X$, F, G fermés, $F \cap G = \emptyset$.

Soit $U = \{x \in X : d(x,F) < d(x,G)\}$

$V = \{x \in X : d(x,G) < d(x,F)\}$.

On a $F \subset U$, car $x \in F \Rightarrow d(x,F) = 0$ et $d(x,G) > 0$

(sinon $d(x,G) = 0 \Rightarrow x \in \bar{G} = G \Rightarrow F \cap G \neq \emptyset$, absurde).

De même, $G \subset V$.

U et V sont ouverts (question (b)) et clairement disjoints.

exercice 2.1

2.1.1 (X,d) espace métrique compact

(Y,d') espace métrique.

$f : X \to Y$ bijective et continue. Mq $f^{-1} : Y \to X$ est continue.

En effet : $\forall F$ fermé de X, $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est compact de Y,

car $F \subset X$, F fermé, X compact $\Rightarrow$ F compact $\Rightarrow f(F)$ compact

Mais alors $f(F)$ est fermé de Y.

L'image réciproque par f^{-1} de tout fermé est alors un fermé : ceci implique la continuité de f^{-1}. Alors f est un homéomorphisme.

2.1.1

$$f : [0, 2\pi[\longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$
$$t \xmapsto[f]{} e^{it}.$$

On a bien f continue (On munit ici $[0, 2\pi[$ de la top. induite de $\mathbb{R}$ et $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ de la top. induite de $\mathbb{C}$),

car $t_n \to t \Rightarrow e^{it_n} \to e^{it}$

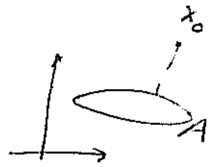
De plus f est bien surjective.

Mais f^{-1} est discontinue (sinon f serait un homéomorphisme, ce qui est absurde car $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est compact et $[0, 2\pi[$ ne l'est pas.

On pourrait aussi observer que $e^{i(2\pi - \frac{1}{k})} \longrightarrow 1$ mais $\underbrace{f^{-1}(e^{i(2\pi - \frac{1}{k})})}_{= 2\pi - \frac{1}{k}} \not\to \underbrace{f^{-1}(1)}_{= 0}$.

$\boxed{\text{exercice 2.2}}$

$\boxed{2.2.1}$ $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, A fermé ; Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$.



Soit $I = \inf \{ d(x_0, a) : a \in A \}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists a_n \in A$ t.q. $I \leq d(a_n, x_0) < I + \frac{1}{n}$.

Donc $(a_n) \subset A \cap \overline{B(x_0, I+1)} \underset{\text{déf}}{=} K$.

K est compact de $\mathbb{R}^n$ (car il est fermé et borné).

Donc $\exists (a_{n_k})$ extraite de (a_n) telle que $\exists a \in K : a_{n_k} \to a$.

Mais $d(a_{n_k}, x_0) \to d(a, x_0)$, (car $x \mapsto d(x, x_0)$ est continue).

et $d(a_{n_k}, x_0) \to I$.

Donc $d(a, x_0) = I$ et $a \in A$.

$\boxed{2.2.2}$. $X = C([0,1], \mathbb{R})$, $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$ $\forall f, g \in X$.

$A = \left\{ f \in X : \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt = 1 \right\}$.

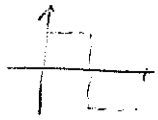
Si $(f_n) \subset A$, $f \in X$ et $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f \Rightarrow f_n$ c.v. unif. vers f dans $[0,1]$

$\Rightarrow \int_0^{1/2} f_n \to \int_0^{1/2} f$ et $\int_{1/2}^1 f_n \to \int_{1/2}^1 f \Rightarrow \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f = 1$ et $f \in A$.

Ceci prouve que A est fermé.

$d(0,A) = 1.$ en effet si ~~dlf~~

$f \in A \Rightarrow \int_0^{1/2} f \geq \frac{1}{2}$ ou $\int_{1/2}^{1} f \leq -\frac{1}{2}$



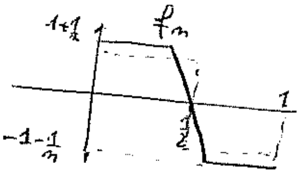
$\Rightarrow \exists\, x_0 \in [0,\frac{1}{2}]$ tq. $f(x_0) > \frac{1}{2}$ ou $\exists\, x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ tq. $f(x_0) < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \|f\|_\infty > 1.$

$\Rightarrow d(0,A) \geq 1.$

d'autre part, il est facile de construire une suite de fonctions (f_n) continues tq. $(f_n) \subset A$ et $\|f_n\|_\infty \to 1.$

Donc $d(0,A) \leq 1.$



On alors $d(0,A) = 1$

et $\nexists\, f \in A$ tq. $d(0,f) = 1.$

$\boxed{\text{Exercice 2.3}}$ (K,d) espace métrique compact $f : K \to K$ telle que

$\forall x,y \in K$: $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, si $x,y \in K$ et $x \neq y$

$\boxed{2.3.1}$ Soient x, x' tq. $\begin{cases} f(x) = x \\ f(x') = x' \end{cases} \Rightarrow d(f(x), f(x')) \underset{\text{si } x \neq x'}{<} d(x,x') = d(f(x), f(x'))$

absurde. Donc il y a au plus un point fixe pour f.

$\boxed{2.3.2}$ l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est continue

(en effet $(x_n, y_n) \to (x,y) \Rightarrow d(x_n, y_n) \to d(x,y)$)

et par ~~p~~ composition de fonctions continues, l'application

$x \overset{\phi}{\longmapsto} d(x, f(x))$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & X \times X & \longrightarrow & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x,x) & \xrightarrow{(Id, f)} & (x, f(x)) & \xrightarrow{d} & d(x, f(x)) \\ & (Id, Id) & & & & & \end{array}$$

est continue : $X \to \mathbb{R}$.

(l'hypothèse sur f implique que f est 1-lipschitzienne, donc f est continue : $X \to X$).

Mais (X,d) est compact, donc $\phi : X \to \mathbb{R}$ possède un point de min. absolu sur X : $\exists\, a \in X$ tq. $d(a, f(a)) = \phi(a) \leq \phi(x) = d(x, f(x))$ $\forall x \in X$.

$\boxed{2.3.3.}$ si $f(a) \neq a \Rightarrow d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a))$, absurde.

$\boxed{2.3.4}$ $x_0 \in X$. $x_{n+1} = f(x_n)$ $n \geq 0$.

$$0 \leq d(x_{n+1}, a) = d(f(x_n), a) = d(f(x_n), f(a)) \leq d(x_n, a)$$

si $x_n \neq a$ inég. stricte sinon égalité

$$\Rightarrow d(x_n, a) \to l = \inf \{ d(x_n, a) : n \in \mathbb{N} \} \geq 0$$

$\boxed{2.3.5}$ $\exists\, (x_{n_k})$ extraite et $\exists\, x \in X$ tq. $x_{n_k} \to x$.

$$d(f(x), a) = d(f(x), f(a)) \underset{(*)}{\leq} d(x,a) = \lim_k d(x_{n_k}, a) = l$$

et $$d(f(x), a) = \lim_k d(f(x_{n_k}), a) = \lim_k \underbrace{d(x_{n_k+1}, a)}_{\geq l} \geq l$$

$\Rightarrow l = d(f(x), a) = d(f(x), f(a))$ et en particulier dans $(*)$ on a l'égalité

$\Rightarrow x = a \Rightarrow l = 0$

Conclusion : les itérées de f convergent vers l'unique point fixe de f.

Exercice 3.1 Soit (K,d) espace métrique compact.

$\forall m \in \mathbb{N}^*$: $\{B(x,\frac{1}{m}) : x \in K\}$ est un recouvrement ouvert de K,

à partir duquel on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$\left\{ B(x_{1,m}, \tfrac{1}{m}), \dots B(x_{n_m,m}, \tfrac{1}{m}) \right\}.$$

Soit $A = \{ x_{i,m} : i = 1, \dots n_m, \; m \in \mathbb{N}^* \}$.

A est une partie dénombrable de K (Réunion dénombrable d'ensembles finis) dense dans K : en effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in K$, $\exists m \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\frac{1}{m} < \varepsilon$ et $\exists x_{i,m} \in A$ t.q. $x \in B(x_{i,m})$ donc $d(x, x_{i,m}) < \varepsilon$ et A est alors dense dans K.

Exercice 3.2 Soit $A \subset X$ A dense dans X.
Soit $i \in I$. $\exists a_i \in A$ tel que $d(x_i, a_i) < \varepsilon/2$

On peut alors définir une application $\phi : I \to A$, $i \mapsto a_i$

où $d(x_i, a_i) < \varepsilon/2$ $\forall i \in I$.

Si $\phi(i) = \phi(j) \Rightarrow d(a_i, a_j) = 0 \Rightarrow d(x_i, x_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \underset{\text{Hyp.}}{\leq} \varepsilon \Rightarrow x_i = x_j \Rightarrow i = j$

donc $\phi : I \to A$ est injective.

Mais I est infini non dén. $\Rightarrow$ A infini non dén $\Rightarrow$ X non séparable

3.2.2 $X = (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ Soit $E = \{ \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) \in \ell^\infty : \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1 \}$.

Si $\vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon}' \in E$ et $\vec{\varepsilon} \neq \vec{\varepsilon}' \Rightarrow d(\vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon}') = \|\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}'\|_\infty = 1$.

E est non dénombrable (C'est bien connu).

$\Rightarrow (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable

Exercice 3.3.

3.3.1 Soit $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$,

où $A_n = \{(q_1, \dots q_n, 0, 0, \dots) : q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}\}$

A_n est en bijection avec $\underbrace{\mathbb{Q}_1 \times \dots \times \mathbb{Q}_n}_{n \text{ fois}}$ qui est dénombrable

A est donc dénombrable.

De plus $A \subset c_0$ et A est dense dans c_0, en effet si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \in c_0$

et $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$ $|x_n| < \varepsilon$ (car $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$)

et $\exists\, q_1, \dots, q_{n_0} \in \mathbb{Q}$ tels que $|q_j - x_j| < \varepsilon$ $(j = 1, \dots, n_0)$.

Soit $\vec{q} = (q_1, \dots, q_{n_0}, 0, 0, \dots)$

Par construction, $\vec{q} \in A$ et $\|\vec{x} - \vec{q}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |x_n - q_n| < \varepsilon$.

Donc A est dense dans c_0 et $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ est alors séparable

3.3.2 Soit $1 \leq p < +\infty$

$\ell^p = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots)$ t.q. $x_j \in \mathbb{R}$ et $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} < +\infty\}$.

On considère le même ensemble A qu'avant.

On a A dénombrable et $A \subset \ell^p$

De plus, si $\vec{x} \in \ell^p$ et $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |x_k|^p < \varepsilon^p$.

et $\exists\, q_1, \dots, q_{n_0} \in \mathbb{Q}$ t.q. $|x_j - q_j|^p < \varepsilon^p / n_0$ $(j = 1, \dots, n_0)$

Soit $\vec{q} = (q_1, \dots, q_{n_0}, 0, 0, \dots)$

Alors $\|\vec{x} - \vec{q}\|_p^p = \sum_{j=1}^{n_0} |x_j - q_j|^p + \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |x_j|^p < \varepsilon^p + \varepsilon^p = 2\varepsilon^p$

$\Rightarrow \|\vec{x} - \vec{q}\|_p < 2^{1/p}\varepsilon < 2\varepsilon$

Ceci prouve que A est dense dans $(\ell^p, \|\cdot\|_p) \Rightarrow (\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est séparable

$\boxed{\text{exercice 4.1}}$ $X =]0,+\infty[$ $\qquad d(x,y) = |\ln x - \ln y|$

$d_e(x,y) = |x-y|$.

Soit $x_n = n$
$y_n = 2n$

$$\frac{d(x_n,y_n)}{d_e(x_n,y_n)} = \frac{\ln 2n - \ln n}{n} = \frac{\ln 2}{n} \to 0.$$

donc $\nexists\, c > 0$ tq. $\forall x,y \in X$. $c\, d_e(x_n,y_n) \le d(x_n,y_n)$.

et d, d_e ne sont pas métriquement équivalents.

Cependant : si $(x_n) \subset X$ et $x \in X$, alors.

$x_n \xrightarrow[d_e]{} x \Rightarrow |x_n - x| \to 0 \Rightarrow |\ln x_n - \ln x| \to 0$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow[d]{} x$. (car $x \mapsto \ln x$ est continue de $(\mathbb{R},|\,|) \to (\mathbb{R},|\,|)$)

et réciproquement, si $x_n \xrightarrow[d]{} x \Rightarrow |\ln x_n - \ln x| \to 0$

$\Rightarrow |x_n - x| \to 0$ (car $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue)

$\Rightarrow x_n \xrightarrow[d_e]{} x$

Cela implique que les ouverts de (X,d_e) sont exactement les ouverts de (X,d),
les topologies sont alors les même.

$\boxed{4.1.2}$ (X,d_e) non complet, car $\left(\frac{1}{n}\right)$ est une suite de Cauchy dans (X,d_e),
non convergente dans (X,d_e).

Démontrons que (X,d) est complet.

Soit $(x_n) \subset X$ de Cauchy dans (X,d).

$\Rightarrow \exists\, n_0$ tq. $\forall n,m \geq n_0$ $\quad |\ln x_n - \ln x_m| \le 1$.

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |\ln x_n| \le 1 + |\ln x_{n_0}| \Rightarrow e^{-1-|\ln x_{n_0}|} \le x_n \le e^{1+|\ln x_{n_0}|}$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \exists\ a,b>0$ t.q. $\forall n$: $a \leq x_n \leq b$.

Mais dans $[a,b]$, les distances d et d_e sont métriquement équivalentes en effet.

$\forall x,y \in [a,b]$:

$$\begin{cases} d_e(x,y) = |x-y| = |e^{\ln x} - e^{\ln y}| \leq e^b |\ln x - \ln y| = e^b d(x,y) \\ d(x,y) = |\ln x - \ln y| \leq \frac{1}{a}|x-y| \end{cases}$$

(On a utilisé ici l'inégalité des accroissements finis)

Or, $(x_n) \subset [a,b]$ est alors de Cauchy dans $([a,b], d_e)$, qui est complet (car sous-ensemble fermé de $(\mathbb{R}, d_e)$ qui est complet)

Donc $\exists\ x \in [a,b] \subset X$ t.q. $x_n \xrightarrow[d_e]{} x \Rightarrow x_n \xrightarrow[d]{} x$

Donc (X,d) est complet.

Exercice 5.1 Soit $U_1, U_2, \dots$ des ouverts denses dans X, (X,d) complet.

Soit V ouvert non vide de X. Mq. $V \cap \left(\bigcap_n U_n\right) \neq \phi$.

U_1 dense $\Rightarrow \exists\ x_1 \in V \cap U_1$

$V \cap U_1$ ouvert $\Rightarrow \exists\ 0 < r_1 < 1$ tq $\overline{B}(x_1, r_1) \subset V \cap U_1$.

U_2 dense $\Rightarrow \exists\ x_2 \in B(x_1, r_1) \cap U_2$

$B(x_1, r_1) \cap U_2$ ouvert $\Rightarrow \exists\ 0 < r_2 < \frac{1}{2}$ tq. $\overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap U_2$

$\vdots$

par récurrence. $\exists (x_n)$, $\exists\ 0 < r_n < \frac{1}{n}$ tq. $\overline{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$

$\forall\ p \geq n$: $d(x_p, x_n) < r_n < \frac{1}{n}$ (Parce que les boules sont contenues l'une dans l'autre)

$\Rightarrow (x_n)$ de Cauchy.

$\Rightarrow \exists\ x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Mais $(x_p)_{p \geq n} \subset \overline{B}(x_n, r_n) \Rightarrow x \in \overline{B}(x_n, r_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \in \bigcap_n \overline{B}(x_n, r_n) \subset \bigcap_n U_n$

et comme $x \in \overline{B}(x_1, r_1) \subset V$, on trouve $V \cap \left(\bigcap_n U_n\right) \neq \phi$

5.2.2

On a U ouvert dense dans $X \Leftrightarrow \overline{U} = X \Leftrightarrow (\overline{U})^c = \phi$

Mais $(\overline{U})^c = (U^c)^\circ$

Donc U ouvert dense dans $X \Leftrightarrow \begin{cases} \overset{\circ}{F} = \phi \\ F \text{ fermé} \end{cases}$, (où $F = U^c$).

Il suffit donc de passer au complémentaire dans l'assertion du théorème de Baire

$\boxed{5.33}$ Soit $\mathcal{U} = \bigcup_n \mathring{F}_n$: il s'agit d'un ouvert.

$G_n = F_n \cap \mathcal{U}^c$ est fermé.

$\mathring{G}_n \subset \mathring{F}_n \cap \mathcal{U}^c = \phi$.

$\underset{5.3.2}{\Longrightarrow}$ $\left(\bigcup_n G_n\right)^\circ = \phi$. Mais $\bigcup_n F_n = X \Rightarrow \bigcup_n G_n = \mathcal{U}^c$

$\Longrightarrow (\mathcal{U}^c)^\circ = \phi \Longrightarrow \overline{\mathcal{U}} = X$.

$\boxed{5.34}$

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f_n continue, $n \in \mathbb{N}$.

tq. $f_n \to f$ simplement

1) la limite simple n'est pas toujours continue

Contrexemple: $f_n(x) = e^{-nx} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

et f est discontinue en 0.

2) $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$:

$F_{n,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : \forall p \geq n : |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}$

$= \bigcap_{p \geq n} \underbrace{|f_n - f_p|}_{\text{continue } \mathbb{R} \to \mathbb{R}}{}^{-1}(\underbrace{[0, \varepsilon]}_{\text{fermé de } \mathbb{R}})$ $\Rightarrow F_{n,\varepsilon}$ est fermé de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists n_0$ tq $\forall p \geq n_0$ $|f_p(x) - f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow x \in F_{n_0,\varepsilon}$.

Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \mathbb{R}$. $\underset{5.3.3}{\Longrightarrow}$ $\Omega_\varepsilon = \bigcup_n \mathring{F}_{n,\varepsilon}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \Omega_\varepsilon \Rightarrow \exists n_0$ tq. $x_0 \in \mathring{F}_{n_0 \varepsilon}$.

f_{n_0} est continue en $x_0 \Rightarrow \exists V$ voisinage de x_0 tq. $\forall x \in V$ $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$
et on peut supposer que $V \subset F_{n_0 \varepsilon}$.

m. $\forall x \in V$,

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)|$$
$$\leq 3\varepsilon.$$

3) d'après 2) $\forall x_0 \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \Omega_\varepsilon$, f est continue en x_0.

$\Rightarrow f$ est continue dans $\bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \Omega_{1/m}$.

$\Omega_{1/m}$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f est continue sur une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$.

Les points de discontinuité de f sont alors contenus dans une réunion dénombrable de fermé d'intérieur vide de $\mathbb{R}$

Autrement dit, f ~~est~~ est continue presque partout au sens de Baire

4) Soit f dérivable dans $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$, où $f_n(x) = \dfrac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}$

$\Rightarrow f'$ est limite simple d'une suite de fonctions continues.

Il s'agit alors d'une fonction continue presque partout au sens de Baire.

$\boxed{\text{exercice 6.1}}$ (X,d) esp. métrique complet.

$f : X \to X$ t.q. $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.q. $f^k = f \circ \dots \circ f : X \to X$ est contractante.

Mq f possède un et un seul point fixe.

Le théorème de point fixe, appliqué à f^k, montre qu'il y a un et un seul $x \in X$ tel que $f^k(x) = x$.

Donc $f^k(f(x)) = f(f^k(x)) = f(x)$ et $f(x)$ est un point fixe pour f^k.

L'unicité implique alors que $f(x) = x$

f possède alors un point fixe

Celui-ci est unique, car tout point fixe de f est aussi un point fixe pour f^k.

$\boxed{\text{exercice 6.2}}$

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1) $Y = \{ (y_n) \in \ell^\infty : (y_n) \in [10,11] \}$ est complet pour la distance $d(\vec{y}, \vec{z}) = \| \vec{y} - \vec{z} \|_\infty$.

En supposant connu que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach ($\Rightarrow$ complet)

On voit que Y est complet, car Y est une partie fermée de ℓ^∞

(en effet $(\vec{y}_k) \in Y$ et $\|\vec{y}_k - \vec{y}\|_\infty \to 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$. $\underset{\underset{[10,11]}{\cap}}{y_{k,n}} \to y_n$

$\Rightarrow y_n \in [10,11]\ \forall n \Rightarrow \vec{y} \in Y$).

Soit $F : Y \longrightarrow Y$.

$F(\vec{y}) = \vec{z}$, où $\vec{z}(z_n)$ et $z_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n}$

F bien défini, en effet. $\forall \vec{y} \in Y$, $10 \leq y_n \leq 11$.

$z_n \geq 0$ $\quad z_n^2 = 100 + y_{n+1} - \sin n$

$\Rightarrow$

$$109 \leq z_n^2 \leq 112$$

$\Rightarrow$ $\quad , z_n \geq 0$

$$10 \leq \sqrt{109} \leq z_n \leq \leq \sqrt{112} \leq 11.$$

F contractante. en effet. $\forall \vec{y}, \vec{y}' \in Y$ soit $\vec{z} = F(\vec{y})$, $\vec{z}' = F(\vec{y}')$

$$|z_n - z_n'| = \left| \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n} - \sqrt{100 + y'_{n+1} - \sin n} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{100 - \sin n + 10}} |y_{n+1} - y'_{n+1}| \leq \frac{\|\vec{y} - \vec{y}'\|_\infty}{2\sqrt{109}}$$

$f(x) = \sqrt{100 - \sin n + x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{100 - \sin n + x}}$

$\forall x \in [10,11]$ $\quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{100 - \sin n + 10}}$

$$\Rightarrow \|\vec{z} - \vec{z}'\|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{109}} \|y - \vec{y}'\|_\infty \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{2\sqrt{109}} < 1$$

$\Rightarrow$ F est contractante.

$\Rightarrow \exists! \ \vec{x} \in Y$ tq. $\vec{x} = F(\vec{x})$.

$\Rightarrow \exists! \ \vec{x} \in Y$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad x_n = \sqrt{100 + x_{n+1} - \sin n}$

$\Rightarrow \exists! \ \vec{x} \in Y$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad \boxed{x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n}$ $(*)$

$\Rightarrow \exists! \ a \in [10,11]$ tq. la suite définie par récurrence par $(*)$ est contenue dans Y.