Erreurs des élèves à propos des décimaux et des fractions

La difficulté sous-évaluée de la notion de décimal et de son enseignement peut générer des erreurs persistantes chez les élèves. Les évaluations nationales ont montré chaque année que les connaissances concernant les nombres décimaux et les fractions ne sont pas stabilisées pour plus d'un tiers des élèves de fin de CM2 ou de 6e.

LES ERREURS CLASSIQUES LES PLUS RÉPANDUES SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX

Ces erreurs sont dues au fait qu'un décimal est conçu comme étant constitué de deux entiers accolés et séparés par une virgule. Ceci a des conséquences sur le rangement des décimaux, dans les opérations (dont la multiplication ou division par 10, 100, 1000) et dans les dénominations des chiffres (centaines, dizaines, unités, centièmes, dixièmes, millièmes).

Exemples
2,5 € c'est 2 € et 5 centimes.
3,5 < 3,47 car 47 > 5.
2,3 x 5,2 = 10,6 car 2 multiplié par 5 donne 10 et 3 multiplié par 2 donne 6.
7,2 + 2,9 = 11,11 ou 3,15 - 2,7 = 1,8.
28,5 x 100 = 28,500 ou 28,5 x 100 = 2800,5 ou 28,5 x 100 = 2800 :
- pour la première erreur l'élève ne tient pas compte de la virgule,
- pour la seconde il multiplie la partie entière par 100,
- pour la troisième il considère la partie décimale comme « un petit quelque chose » négligeable (comme les centimes).

20,05 : 100 = 0,25 au lieu de 0,2005 : pour cet élève les zéros de la partie décimale sont inutiles.
Dans 20,13 le chiffre 3 est le chiffre des dizaines ou des dixièmes : erreur de désignation entre « dixièmes » et « dizaines » ou entre « centièmes » et « centaines » mais aussi pseudo-symétrie par rapport à la virgule et non par rapport à l'unité.

DES ERREURS ENCORE FRÉQUENTES À L'ENTRÉE AU COLLÈGE

- Tout nombre possède un successeur ; après 3,5 il y a 3,6 et entre deux nombres décimaux « consécutifs » il n'y a rien. 0,1 devient « le plus petit » des décimaux.
- Il est impossible de multiplier par un décimal : « Un nombre de fois qui n'est pas entier, ce n'est pas un nombre de fois. »
- La valeur exacte d'un quotient, c'est une écriture décimale qui a beaucoup de chiffres à droite de la virgule, notamment si c'est la calculatrice qui l'affiche. Ainsi une valeur approchée peut aussi devenir une valeur exacte comme dans $\frac{1}{3}$ = 0,333.

L'élève considère les décimaux comme un prolongement des entiers et applique aux décimaux les règles valides sur les entiers.

DES RÈGLES-ÉLÈVES FAUSSES MAIS PERFORMANTES

Les travaux (1981) de Grivard (C.) et Léonard (F.) ont permis d'identifier trois règles-élèves pour ranger trois nombres : 4,3 ; 4,249 ; 4,06.

La première consiste à appliquer la règle de comparaison des entiers (4,3 < 4,06 < 4,249) aux parties décimales.

La deuxième consiste à considérer que le plus petit nombre est celui qui a le plus grand nombre de chiffres après la virgule (4,249 < 4,06 < 4,3).

La troisième consiste à considérer que le plus petit des nombres est celui dont le premier chiffre après la virgule est un zéro (4,06 < 4,3 < 4,249 application des règles 3 puis 1).

Ces conceptions fausses permettent pourtant à certains élèves d'avoir un taux de réussite important. L'application des règles 3 puis 2 permet de classer sans erreur les nombres suivants : 2,06 ; 2,19 ; 2,184.

DES ERREURS SUR LES FRACTIONS

Au cycle 3, l'erreur la plus fréquente consiste à considérer la barre de fraction comme un simple séparateur entre deux entiers. Cette conception de l'écriture fractionnaire a des conséquences sur la comparaison de fractions, sur le transcodage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale et réciproquement mais aussi sur le calcul avec des nombres en écriture fractionnaire.

Exemples

$\frac{3}{8} = \frac{8}{3}$ car les deux fractions comportent les nombres 3 et 8.

$\frac{3}{8} < \frac{6}{16}$ car 3 < 6 et 8 < 16.

$\frac{1}{4} = 1{,}4$ ou $0{,}38 = \frac{3}{38}$ car la barre de fraction sépare deux nombres entiers comme la virgule.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ car 1 + 1 = 2 et 3 + 3 = 6.

D'autres erreurs sont liées au fait qu'un rationnel possède une infinité d'écritures fractionnaires et qu'on transforme ces écritures par des opérations n'opérant pas sur ce nombre mais sur chacune des parties qui le composent : ainsi certains élèves écrivent que :

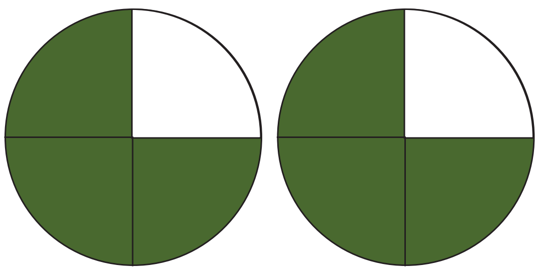
« $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ car $2 \times \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ou $\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{4}$ » [3].

Pour d'autres élèves, en fin de cycle 3 il est encore difficile de concevoir et de représenter une fraction plus grande que 1 ou d'identifier l'unité, la partie et le tout.

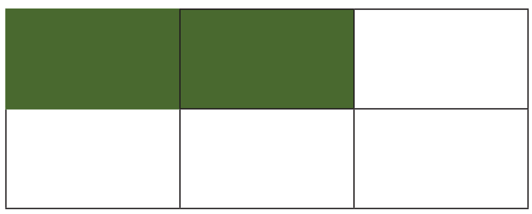
Exemples :

– l'élève pense qu'il n'est pas possible de dessiner $\frac{6}{4}$ d'une tarte, car on ne peut pas faire 6 quarts avec une seule tarte ; il associe le dessin ci-dessous (dessin n°1) à la fraction de tarte $\frac{6}{8}$ (alors qu'en fait ce sont $\frac{6}{8}$ de deux tartes qui sont coloriés).
– sur le dessin ci-dessous (dessin n°2), l'élève considère que $\frac{2}{4}$ de tablette sont coloriés ; il a écrit « le nombre de parts coloriées sur le nombre de parts non coloriées » et non pas « le nombre de parts coloriées sur le nombre total de parts qui constituent la tablette ».

DESSIN N°1



DESSIN N°2



[3] Alors que le calcul $2 \times \frac{3}{4}$ donne $\frac{6}{4}$ et que celui de $\frac{6}{8} : 2$ donne $\frac{3}{8}$.