Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Écrit
Année 2013–2014

Équations différentielles

I Équations scalaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1° Équations linéaires d'ordre 1

a) Résoudre *proprement*[1] l'équation différentielle : $y' = 0$.
b) Résoudre *proprement*[2] l'équation différentielle $y' = ay$, où $a : I \to \mathbb{R}$ est continue.
On pourra ramener le problème à $\left(ye^{-A}\right)' = 0$ *pour* A *fonction bien choisie.*
c) Résoudre l'équation : $y' \ln x + \dfrac{y}{x} = 1$ sur $I =]0, +\infty[$.
Canonique : on résout l'équation homogène puis on fait varier la constante.

2° Théorème de Cauchy-Lipschitz

Qu'appelle-t-on solution ? solution maximale ? Rappeler la version du théorème de Cauchy-Lipschitz qui est au programme.

3° Une explosion en cours ou prévue

Décrire les solutions maximales de l'équation différentielle $y' = y^2$.

4° Premier exemple de recollement de solutions

On veut résoudre l'équation différentielle : ${y'}^2 = 4y$.
a) Résoudre l'équation au voisinage d'un point où la solution ne s'annule pas.
b) Montrer que toute solution maximale est de la forme suivante, pour $t_1, t_2 \in [-\infty, \infty]$ fixés :

$$f : t \mapsto \begin{cases} (t - t_1)^2 & \text{si } t < t_1, \\ 0 & \text{si } t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ (t - t_2)^2 & \text{si } t_2 < t. \end{cases}$$

5° Deuxième exemple de recollement

On considère l'équation $y'' + |y| = 0$. Anticipant un peu sur la suite, on admet que l'on sait résoudre $y'' \pm y = 0$.
a) Soit (I, f) est solution et $a \in \mathbb{R}$. On note $I_a = \{a + x, x \in I\}$ et $f_a : I_a \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t - a)$. Vérifier que $(I + a, f_a)$ est une solution.
b) Montrer que la seule solution positive définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.
c) « Déterminer » les solutions (I, f) pour lesquelles f est positive (resp. négative) sur I.
d) Soit (I, f) une solution qui s'annule en un point a de l'intérieur de I. Grâce à a), on peut supposer sans perte de généralité que $a = 0$. Décrire f sur I.
On distinguera les cas $y'(0) > 0$, $y'(0) = 0$, $y'(0) < 0$.
e) Décrire les solutions maximales.

6° Un exemple d'étude qualitative

Soit k un réel strictement positif et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto e^y - ky$.
a) Étudier les variations de f selon les valeurs de k et ébaucher le graphe.
On choisit désormais que k de sorte que f s'annule en a et b, $a < b$.
Soit $c \in \mathbb{R}^+$ et y la solution maximale du problème de Cauchy $y' = f(y)$, $y(0) = c$. Soit I son intervalle de définition et $T = \sup I$.

---

1. C'est-à-dire sans considérer le résultat comme évident, pour classique qu'il soit.
2. C'est-à-dire sans diviser par 0 ou risquer de le faire.

b) On suppose que $c \in \{a, b\}$. Déterminer y.
c) On suppose que $c \in \,]a, b[$.

1. Montrer que y est strictement monotone sur un voisinage de 0.
   Quel est le signe de $y'(0)$?
2. Montrer que y est minorée par a sur $I \cap \mathbb{R}^+$. En déduire qu'elle y est strictement monotone.
   Valeurs Intermédiaires, Cauchy et Lipschitz sont tes amis.
3. Déduire du point précédent que $\lim_{t \to T^-} y(t)$ existe et appartient à $[a, b]$.
4. On suppose que $T < +\infty$. Montrer que y se prolonge en une fonction dérivable à gauche en T. En déduire une contradiction.
   Cauchy et Lipschitz sont toujours tes amis.
5. Montrer que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = a$.
   En supposant que $\lim_{t \to +\infty} y(t) < a$, minorer y' par une constante strictement négative et aboutir à une contradiction.
6. (Plus difficile.) Soit $t \geqslant 0$. On définit $z(t)$ par : $y(t) = a + z(t)e^{At}$ où $A = f'(a)$. Montrer qu'il existe $\theta \in [a, c]$ tel que $z'(t) = z(t)^2 f''(\theta)e^{At}/2$.
   Taylor et Lagrange sont aussi tes amis.
   En déduire que z est monotone, que l'intégrale de z'/z^2 converge et que $1/z$ admet une limite non nulle en l'infini. Encadrer cette limite. Écrire enfin un développement asymptotique de y en l'infini.

d) Étudier de même le cas où $c < a$.
Montrer que y croît vers a sur $[0, +\infty[$, estimer à quelle vitesse.
e) On suppose que $c > b$. Montrer que $y(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers T. (Vraiment délicat.) Montrer que $T < +\infty$.

7° Équation différentielle homogène (changement de fonction inconnue)

On considère une équation différentielle sur un intervalle $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}^{+*}$ de la forme :

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

a) Montrer que si $y_1(x) = f(x)$ est une solution, alors $y_2(x) = \lambda f(x/\lambda)$ en est une également pour tout $\lambda \neq 0$ (ou $\lambda > 0$). En déduire que la famille des courbes intégrales (courbes représentatives des solutions) est stable par homothéties de centre l'origine.
b) Soit $y(x)$ une fonction, on pose $u(x) = y(x)/x$ pour x non nul. Déterminer une équation différentielle dont u est solution exactement lorsque y est solution de l'équation précédente.
c) Exemple : $x^2y' = x^2 - y^2 + xy$. Vérifier que toutes les courbes intégrales passent par $(0, 0)$. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^*$. Étudier la pente à l'origine et les axymptotes. Montrer que tous les extrema sont sur une même droite.
On le fera de deux façons : directement avec l'équation – il s'agit d'ajouter la condition $y' = 0$ à l'équation initiale ; en utilisant a).

8° Changement de fonction inconnue (2)

Soit y une fonction définie sur un intervalle, soit $z = e^y$ et soit l'équation : $y'' + (y')^2 + 1 = 0$.
a) Multiplier l'équation par e^y et écrire une équation équivalente portant sur z. La résoudre.
b) Nettoyer le raisonnement sale qui précède pour montrer que l'équation a une solution (maximale) sur tout intervalle de longueur π, unique à scalaire près.

9° Une exemple de changement de variable

On cherche les fonctions $y(x)$ définies sur un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour toute abscisse x, la longueur TT' soit une constante a, où T et T' sont les intersections de la tangente à la courbe représentative avec les axes. (Exemple : une fonction affine, i.e. $y'' = 0$.)
a) Vérifier qu'un point (X, Y) appartient à la tangente à la courbe en $\gamma(t)$ si et seulement si $Y - y = y'(X - x)$. Calculer les coordonnées des intersections T et T' de cette droite avec les axes et la distance TT'.
b) En déduire que la condition ci-dessus est équivalente à l'équation : $(xy' - y)^2(1 + y'^2) = a^2 y'^2$.
c) On définit $\theta(x)$ par : $y' = \tan\theta$, avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Injecter dans l'équation ci-dessus et simplifier.
d) Dériver l'équation obtenue par rapport à x et constater que cela donne une expression de x en fonction de $\theta(x)$.
e) Calculer alors $y(x)$ en fonction de $\theta(x)$ et reconnaître la courbe solution.

10° Variante de la variation de la constante

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2) - 7f(x+1) + 10f(x) = 0.$$

a) En introduisant l'opérateur D sur l'espace des fonctions défini par : $(Df)(x) = f(x+1)$ pour tout x, écrire l'équation comme le noyau d'un polynôme en D.
b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Trouver une fonction telle que $Df = \lambda f$. Avec l'idée de la variation de la constante, décrire toutes les fonctions telles que $Df = \lambda f$.
c) Appliquer le lemme des noyaux et résoudre le problème.

II Équations différentielles linéaires

1° Structure de l'espace des solutions

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ continues ; on forme le système différentiel $X' = AX + B$.
a) Rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz dans ce cadre.
b) Montrer que si B est la fonction nulle, l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.
Il est facile de voir que c'est un espace vectoriel. Pour $x_0 \in I$ fixé, montrer que l'application $\mathscr{S}_0 \to \mathbb{K}^n$, $Y \mapsto Y(x_0)$ est un isomorphisme.
c) Montrer que l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_B$ est un espace affine dirigé par $\mathscr{S}_0$.
Solution générale avec second membre = solution particulière avec second membre + solution générale sans second membre !

2° Un « théorème-chapeau » pour les équations à coefficients constants

Voici un théorème sous lequel s'abriter les jours de grandes précipitations ou de grandes chaleurs.
a) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer qu'il est équivalent de dire :

- (i) la fonction y est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0$, où $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont des complexes fixés ;
- (ii) le sous-espace engendré par y, y',..., $y^{(n)}$,... est de dimension finie ;
- (iii) la fonction y est combinaison linéaire d'une famille finie de fonctions $f_1, \dots, f_s$ de la forme $f_j : x \mapsto x^{k_j} e^{\alpha_j x}$, avec $k_j \in \mathbb{N}$ et $\alpha_j \in \mathbb{C}$.

b) Dans l'équivalence précédente, établir une relation entre $\sum_j (k_j + 1)$ et n.
c) Rappeler la forme d'une solution particulière d'une équation $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = x^k e^{\alpha x}$, en discutant selon α.

3° **Un exemple un peu exotique**

Trouver toutes les fonctions deux fois dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $y''(x) + y(-x) = x \cos x$ pour tout x.

Une fonction s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Cela permet de ramener cette équation à deux équations différentielles.

4° **Un deuxième exemple exotique**

Soient k, λ deux réels, on cherche les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = kf(\lambda - x).$$

a) Vérifier que $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda - x$ est une involution.
b) Montrer que f est deux fois dérivable.
c) Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2, la résoudre.
d) Donner une expression pour f.

5° **Wronskien**

a) Soient $Y_1, Y_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions d'un système différentiel homogène $X' = AX + B$, où A (resp. B) est une fonction continue de I dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{R}^2$). On pose $W = \det(Y_1, Y_2)$ (sens ?). Montrer que W est uniformément nul ou que W ne s'annule jamais.
Trouver une équation différentielle dont W est solution !
b) Application : en supposant connaître une solution y_1 d'une équation linéaire d'ordre 2, $y'' + by' + cy = 0$ (b, c fonctions continues), compléter y_1 en une base de l'espace des solutions.
C'est la méthode de variations de la constante : il faut trouver « la bonne équation »...
c) Étendre le résultat de a) à un système linéaire d'ordre quelconque.

6° **Variation de la constante pour les équations d'ordre** 2

Soient b, c et d des fonctions continues définies sur un intervalle I contenant un réel x_0, soient y_0 et y'_0 deux réels, et soit le problème de Cauchy : $y'' + by' + cy = d$, $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.
a) Construire un système différentiel « équivalent » à l'équation différentielle : $X' = AX + B$ (où A est une fonction continue à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et X et B sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}^2$ (X inconnue).
b) On suppose que y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de $y'' + by' + cy = 0$. Appliquer la méthode de variation de la constante pour le système et résoudre le problème de Cauchy initial.

7° **Phénomène de résonnance pour les équations d'ordre** 2

Soit une équation différentielle à coefficients constants : $y'' = -ay' - by + c$. Ici, $a > 0$ est un coefficient de frottement, $b \geqslant 0$ est une constante et $c(x) = Fe^{i\omega x}$ pour tout x, avec $F \in \mathbb{C}$ et $\omega > 0$. [Source : circuits RLC, ressorts amortis.]
a) On suppose que $F = 0$. Montrer que les solutions peuvent s'écrire sous la forme $y(x) = C \cos(\omega_0 x + \varphi) e^{\rho x}$. Quel est le signe de ρ ?
b) De nouveau, F est quelconque. On cherche une solution particulière de la forme : $y(x) = He^{i\omega x}$. Déterminer H en fonction de F et étudier le rapport $|H|/F$ en fonction de ω en discutant selon la valeur de a ($a = 0$, a « grand », a « pas trop grand »).
c) Justifier le titre de ce numéro.

8° **Méthode de la transformée de Laplace**

Voir le livre (lequel ?) de J.-M. Monier, problème 5.1 p. 345.

9° **Théorie de Sturm-Liouville**

Voir par exemple : A. Dufetel, *Analyse : séries de Fourier et équations différentielles*, chapitre 2, problème 5. Voir aussi, pour l'entrelacement des zéros : J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, chap. XIV, § 7.

Dans la fin de cette partie, on relie équations différentielles linéaires et séries entières.

10° **Équation de Bessel**

Soit $\mu \in \mathbb{C}$, considérons l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \mu)y = 0.$$

Montrer que l'équation admet une solution y non nulle et développable en série entière sur un voisinage de l'origine si et seulement si μ est le carré d'un entier.
Soit $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *le développement en série éventuel. [Pourquoi « le » ?] Montrer que* $a_0 = (1-\mu)a_1 = 0$ *et que* $(n^2 - \mu)a_n = a_{n-2}$ *pour tout* n.

11° **Équations linéaires d'ordre 2 et polynômes orthogonaux**

Voir : A. Yger et J.-A. Weil (dir.), *L3 Mathématiques appliquées*, Pearson Education, § II.6.

12° **Involutions**

Une involution est une permutation dont le carré est l'identité. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le nombre d'involutions dans le groupe symétrique sur n lettres, avec par convention $c_0 = 1$.
a) Vérifier que dans la décomposition en cycles d'une involution, on ne trouve que des cycles de longueur 1 (points fixes) et 2.
b) Montrer que $c_{n+1} = c_n + nc_{n-1}$.
Pour toute involution s *de* $\{1, \ldots, n+1\}$*, l'élément* $n+1$ *est fixe ou est dans un cycle de longueur* 2*. Dans le premier cas,* s *est caractérisée par sa restriction à* $\{1, \ldots, n\}$ *; sinon, il y a* n *façons pour choisir son image et* s *est caractérisée par cette image et sa restriction à* $\{1, \ldots, n-1\}$.
c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = c_n/n!$. Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (Vérifier et utiliser : $a_n \leq 1$).
On note f la somme de cette série.
d) Montrer que f est solution de l'équation : $y' = (1+x)y$. En déduire la valeur de $f(x)$.
NB : On peut montrer que : $c_n \sim \dfrac{e^{-1/4}}{\sqrt{2}} n^{n/2} e^{-n/2+\sqrt{n}}$. C'est plus dur.

13° **Dérangements**

Un dérangement est une permutation sans point fixe, c'est-à-dire dont la décomposition en cycles disjoints ne comporte que des cycles de longueur ≥ 2. On note d_n le nombre de dérangements dans le groupe symétrique sur n lettres.
a) Montrer que pour tout n on a : $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.
Considérer la décomposition d'un dérangement t *en cycles : si* $n+1$ *apparaît dans un cycle de longueur* 2*, on a* n *façons de choisir son image et* d_{n-1} *façons de déranger les* $n-1$ *autres lettres ; sinon, on a* n *façons de choisir son image et on obtient un dérangement de* n *lettres en effaçant* $n+1$.
b) On pose $b_n = d_n/n!$. Minorer le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ et montrer que sa somme $g(x)$ est solution de : $(1-x)y' - xy = 0$. En déduire une expression de $g(x)$.