Propriétés qualitatives de certaines équations différentielles

Introduction

Ce problème présente des techniques permettant d'étudier les solutions d'équations différentielles, en général non linéaires, sans connaître explicitement ces solutions. Par conséquent, on ne cherchera pas à résoudre les équations différentielles qui apparaîtront au fil de l'épreuve, sauf si cela est demandé. Rappelons que, dans le cas d'une équation différentielle non linéaire, l'intervalle de définition d'une solution est lui aussi inconnu.

Définitions et notations

Pour tout entier $m > 0$, on munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^m$ du produit scalaire usuel

$$< x, y >= \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i \, y_i \; ;$$

la norme associée est notée $\|x\|$; on note $\mathrm{B}_f(x_0, \mathrm{R})$ la boule fermée de centre $x_0 \in \mathbf{R}^m$ et de rayon R.

Soient U une partie ouverte de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$, et f une application de U dans $\mathbf{R}^m$. On dit que l'application $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^m$ est une solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x' = f(t, x)$$

si :

a) I est un intervalle non trivial (ni vide, ni réduit à un point) de la droite réelle $\mathbf{R}$,

b) u est une application dérivable de I dans $\mathbf{R}^m$,

c) pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a $(t, u(t)) \in \mathrm{U}$ et $u'(t) = f(t, u(t))$.

Soient $u_1 : \mathrm{I}_1 \to \mathbf{R}^m$ et $u_2 : \mathrm{I}_2 \to \mathbf{R}^m$ deux solutions de (E) ; on dit que u_1 est une *restriction* de u_2 si $\mathrm{I}_1 \subset \mathrm{I}_2$ et si, pour tout $t \in \mathrm{I}_1$, on a $u_1(t) = u_2(t)$. On dit aussi que u_2 est un *prolongement* de u_1, ou encore que u_2 *prolonge* u_1.

Une solution de (E) est dite *maximale* si elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.

De manière générale $\mathrm{C}^n(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ désigne l'ensemble des applications de X dans Y de classe C^n, lorsque cela a un sens.

On dit que l'application f est *localement lipschitzienne* en x si, pour tout point (t_0, x_0) de U, il existe deux nombres réels ε et k tous deux > 0 et tels que :

a) l'ensemble $\mathrm{C} = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \mathrm{B}_f(x_0, \varepsilon)$ soit inclus dans U,

b) si (t, x_1) et (t, x_2) sont deux points de C, on ait $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant k \, \|x_1 - x_2\|$.

On rappelle qu'une fonction $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U}, \mathbf{R}^m)$ est localement lipschitzienne en x.

Les deux premières parties n'utilisent pas le théorème de Cauchy-Lipschitz, contrairement aux autres parties. L'énoncé de ce théorème est donné au début de la troisième partie.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

Soit q un nombre réel $\geqslant 0$ et soit u une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$; pour $t \in \mathbf{R}$, on écrit $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. On suppose que la fonction u satisfait, sur $\mathbf{R}$, aux égalités

$$\begin{cases} u_1' &= u_2\,, \\ u_2' &= -u_1 \quad -qu_1^3\,. \end{cases}$$

L'existence d'une telle application u est admise ici.

1) Démontrer que u est solution d'une équation différentielle du type (E) en précisant bien quelle est l'application f.

2) Pour $q = 0$, déterminer l'application u et démontrer que l'image de l'arc $t \mapsto u(t)$ est un cercle. Représenter ceci sur un dessin, en n'oubliant pas de mentionner le sens de parcours.

3) Supposons $q > 0$

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel p tel que l'image de u soit incluse dans la courbe

$$\mathrm{C}_p = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + \frac{q}{2}x_1^4 + x_2^2 = p\}.$$

b) Démontrer que p est $\geqslant 0$. Que dire de u si $p = 0$?

On suppose désormais $p > 0$.

c) Représenter sommairement la courbe C_p dans un repère orthonormé du plan. Les tangentes aux points où la courbe C_p coupe les axes du repère doivent apparaître sur le dessin.

d) Démontrer qu'il existe deux fonctions $\rho, \theta \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, avec $\rho > 0$, telles que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on ait

$$u_1(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \qquad \text{et} \qquad u_2(t) = \rho(t)\sin\theta(t).$$

e) Calculer $\theta'(t)$ en fonction de ρ et θ, et en déduire que la trajectoire de u est exactement la courbe C_p.

Partie II : Barrières

Dans cette partie, on considère une partie ouverte U de $\mathbf{R}^2$ et une fonction $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{U}, \mathbf{R})$ localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

1) Soient a, b et K des nombres réels, avec $a < b$, et soit $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable satisfaisant à $h(a) = 0$ et $h' \leqslant \mathrm{K}h$. Démontrer que h est $\leqslant 0$ [on pourra par exemple chercher une fonction φ telle que $(h' - \mathrm{K}h)\varphi$ soit la dérivée d'une fonction simple].

2) *Lemme de la barrière inférieure* : On suppose que I est un intervalle réel non trivial et $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, le point $(t, \alpha(t))$ appartienne à U et que l'on ait l'inégalité

$$\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t))\,.$$

On dit alors que α est une *barrière inférieure* de l'équation (E) sur l'intervalle I.

Soit $u : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ une solution de (E) et $t_0 \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$. On suppose $\alpha(t_0) \leqslant u(t_0)$ et on veut démontrer que $\alpha(t) \leqslant u(t)$ pour $t \geqslant t_0$, $t \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$. On procède par l'absurde et on suppose que cela est faux.

a) Démontrer qu'il existe t^* et t_1 dans $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ tels que $t_0 \leqslant t_1 < t^*$ et que l'on ait

$$u(t_1) = \alpha(t_1) \;\text{ et }\; u(t) < \alpha(t) \;\text{ pour }\; t_1 < t \leqslant t^*.$$

Tournez la page S.V.P.

b) Etablir l'existence de $t_2 \in]t_1, t^*]$ et d'un nombre réel $\mathrm{C} \geqslant 0$ tels que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on ait

$$|f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t))| \leqslant \mathrm{C}\, |\alpha(t) - u(t)|.$$

c) En déduire que l'on a $\alpha' - u' \leqslant \mathrm{C}(\alpha - u)$ sur $[t_1, t_2]$. Trouver alors une contradiction et conclure.

3) *Exemple* : Prenons dans cette question $\mathrm{U} = \mathbf{R}^2$ et $f(t, x) = x^2 + (\sin tx)^2$.

a) Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, l'application α de $]-\infty, \lambda[$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\alpha(t) = 1/(\lambda - t)$ est une barrière inférieure de (E)

b) En déduire que, si $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ est une solution de (E) et s'il existe un nombre réel t_0 tel que $u(t_0) > 0$, alors l'intervalle I est majoré.

4) De façon analogue, énoncer et démontrer le lemme de la barrière supérieure.

5) *Unicité.*

a) Déduire des résultats précédents que, si $u_1 : \mathrm{J}_1 \to \mathbf{R}$ et $u_2 : \mathrm{J}_2 \to \mathbf{R}$ sont deux solutions de (E) et s'il existe un nombre réel $t_0 \in \mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in \mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2$.

b) Nous allons démontrer par un exemple que l'unicité est fausse lorsqu'on ne suppose plus la fonction f localement lipschitzienne en x. Posons $\mathrm{U} = \mathbf{R}^2$ et prenons pour f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(t, x) = \sqrt{|x|}$.

i) Prouver que la fonction f est continue. Est-elle localement lipschitzienne ?

ii) Décrire toutes les solutions strictement positives de (E).

iii) Raccorder de telles solutions avec la fonction nulle pour construire deux solutions de (E) qui coïncident en un point mais pas en tout point.

Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs

Dans la suite du problème, on admet le *théorème de Cauchy-Lipschitz* :

Soient U *une partie ouverte de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ *et* $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{U}, \mathbf{R}^m)$ *une fonction localement lipschitzienne en* x *. Soit* (t_0, x_0) *un point de* U *; alors*

a) l'équation différentielle (E) *admet une solution maximale unique* $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^m$ *satisfaisant à* $u(t_0) = x_0$ *;*

b) son ensemble de départ I *est un intervalle ouvert de* $\mathbf{R}$ *;*

c) toute solution v *de* (E) *telle que* $v(t_0) = x_0$ *est une restriction de* u *.*

Dans cette partie, on prend $m = 1$ et on prend pour U le produit $]a, b[\times]c, d[$, où a, b, c, d désignent des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et satisfont à $a < b$ et $c < d$. Soit $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{U}, \mathbf{R})$ une fonction localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

1) Soient p et q des nombres réels tels que $p < q$, et soit $g :]p, q[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est bornée. Démontrer que la fonction g admet une limite finie en q.

Tournez la page S.V.P.

2) *Théorème de l'entonnoir.*

Soit $\mathrm{I} \subset]a,b[$ un intervalle non trivial et soient $\alpha, \beta : \mathrm{I} \to]c,d[$ des applications dérivables telles que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, on ait

$$\alpha(t) \leqslant \beta(t), \quad \alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)) \ \text{ et } \ f(t, \beta(t)) \leqslant \beta'(t).$$

Dans cette situation, on dit que l'ensemble $\Delta = \{(t,x) \mid t \in \mathrm{I} \text{ et } \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t)\}$ est un *entonnoir* de (E) sur l'intervalle I. Nous allons établir que les solutions qui entrent dans un entonnoir s'y trouvent piégées.

Soit $u : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ une solution *maximale* de (E) et soit t_0 un point de J tel que $(t_0, u(t_0))$ appartienne à l'ensemble Δ.

a) Démontrer que $(t, u(t))$ appartient à Δ pour tout $t \geqslant t_0$ appartenant à $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

b) Démontrer que l'intervalle $\mathrm{I} \cap [t_0, +\infty[$ est contenu dans J.

3) *Exemple* : On prend $\mathrm{U} = \mathbf{R}^2$. On pose

$$f(t,x) = t - x + g(t,x),$$

où $g \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U}, \mathbf{R})$ est une fonction qui satisfait à

$$\begin{cases} g(t,x) \geqslant 1 & \text{pour } x < t, \\ g(t,x) \leqslant 1 & \text{pour } t < x. \end{cases}$$

a) Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, les fonctions α et β définies par $\alpha(t) = t - \lambda e^{-t}$ et $\beta(t) = t + \lambda e^{-t}$, définissent un entonnoir sur $\mathbf{R}$.

b) En déduire que toute solution maximale de (E) est définie sur un intervalle non majoré et admet une asymptote en $+\infty$.

Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Analyse
Année 2013–2014

Épreuve sur table
23 novembre 2013

Au cours de ce problème, nous étudierons certaines propriétés de la fonction u lorsqu'elle est solution de l'équation différentielle ordinaire (parties II et III)

$$(1) \qquad \forall x \in [0,1], \quad -u''(x) + V(x)u(x) = f(x).$$

Dans tout le problème, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ donnée sur l'intervalle $[0,1]$ et V est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement positive donnée sur l'intervalle $[0,1]$.

I Préliminaires

I.1 Démontrer qu'il existe un nombre réel strictement positif V_0 tel que

$$\forall x \in [0,1], \qquad V(x) \geq V_0 > 0.$$

I.2 Soit u une solution de (1). Démontrer que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

I.3 Soit a, b, c trois nombres réels donnés. Discuter, selon les valeurs de a, b et c, le nombre de solutions de l'équation (1) satisfaisant les conditions initiales

$$u(0) = a, \quad u'(0) = b, \quad u''(0) = c.$$

I.4 Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il à l'équation (1) avec les conditions

$$(4) \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \ ?$$

I.5 Soit v une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[x_1, x_2]$. On suppose que v possède un minimum local en $x_0 \in]x_1, x_2[$.
I.5.1. Montrer que $v'(x_0) = 0$.
I.5.2. En appliquant une formule de Taylor bien choisie, montrer que $v''(x_0) \geq 0$.
I.5.3. Ces résultats restent-ils vrais si $x_0 \in \{x_1, x_2\}$?

II Existence et unicité de la solution de (1) satisfaisant (4)

II.1 On suppose que f est positive : $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit u une solution de (1).
II.1.1. Montrer que si u possède un minimum local en $x_0 \in]0,1[$, alors $u(x_0) \geq 0$.
II.1.2. Montrer que si u satisfait les conditions (4), alors

$$\forall x \in [0,1], \quad u(x) \geq 0.$$

II.2 On suppose que f est négative : $f(x) \leq 0$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit u une solution de (1).
II.2.1. Montrer que si u possède un maximum local en $x_0 \in]0,1[$, alors $u(x_0) \leq 0$.
II.2.2. Montrer que si u satisfait les conditions (4), alors

$$\forall x \in [0,1], \quad u(x) \leq 0.$$

II.3 On suppose que f est la fonction nulle. Montrer que si u est une solution de (1) et satisfait les conditions (4), alors u est la fonction nulle.

II.4 Soit b un nombre réel donné. Soit $u_b : x \mapsto u_b(x)$ la solution de l'équation (1) avec les conditions initiales $u_b(0) = 0$, $u_b'(0) = b$. On pose

$$\varphi(b) = u_b(1).$$

II.4.1. Calculer la dérivée seconde de la fonction : $y = (u_b - u_0) - b(u_1 - u_0)$, en déduire que c'est la fonction nulle.

II.4.2. Montrer que φ est une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II.5 Soit b, b' deux réels tels que $\varphi(b) = \varphi(b')$.

II.5.1. Que peut-on dire de $z = u_b - u_{b'}$?

II.5.2. Montrer que $b = b'$.

II.6 Montrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$(5) \quad \begin{cases} -u''(x) + V(x)u(x) = f(x), & \forall x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

III Approximation numérique de la solution u de (5)

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et on considère un vecteur $\bar{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Les composantes de $\overline{u}$ seront notées $u_i = (\overline{u})_i$, $i = 0, \ldots, n$. On pose $h = \frac{1}{n}$, $V_i = V(ih)$, $f_i = f(ih)$. On considère le système linéaire

$$(6) \quad \begin{cases} u_0 = 0, \\ \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} + V_i u_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ u_n = 0. \end{cases}$$

III.1 On suppose que $f_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. On fait l'hypothèse que $\overline{u}$ est solution du système (6).

III.1.1. Soit i_0 un indice tel que $u_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n-1}(u_i)$. Montrer que $u_{i_0} \geq 0$.

III.1.2. En déduire que $u_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$.

III.2 On suppose que $f_i \leq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. On fait l'hypothèse que $\overline{u}$ est solution du système (6). Montrer que $u_i \leq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$.

III.3 Solution unique de (6)

III.3.1. On suppose que $f_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. Montrer que le vecteur nul est l'unique solution de (6).

III.3.2. Démontrer qu'en toute généralité, le système (6) possède une unique solution.

III.4 Soit u la solution de (5) et $\overline{u}$ la solution de (6). On pose

$$v_i = u_i - u(ih) \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = \frac{-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}}{h^2} + V_i v_i, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

III.4.1. Montrer que

$$\varepsilon_i = -u''(ih) - \frac{-u((i-1)h) + 2u(ih) - u((i+1)h)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

III.4.2. A l'aide de deux formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 (entre ih et $(i \pm 1)h$), en déduire l'inégalité

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{h^2}{12} \times \left(\max_{x \in [(i-1)h, (i+1)h]} |u^{(4)}(x)| \right), \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

III.5 On pose

$$E = \max_{1 \leq i \leq n-1} |\varepsilon_i|.$$

Soit, pour $i = 0, \ldots, n$,

$$x_i = \frac{i(n-i)}{2n^2}, \qquad w_i = v_i - E\,\frac{i(n-i)}{2n^2}.$$

III.5.1. Calculer

$$\frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

III.5.2. Montrer que $\overline{w} = (w_i)_{i=0,\ldots,n}$ est solution d'un système analogue à (6), où l'on remplace f_i par $-E + \varepsilon_i - V_i E x_i$.

III.5.3. En utilisant III.2, montrer finalement que pour $i = 0, \ldots, n$,

$$w_i \leq 0.$$

III.6 Soit, pour $i = 0, \ldots, n$,

$$z_i = v_i + E\,\frac{i(n-i)}{2n^2}.$$

Montrer que pour $i = 0, \ldots, n$,

$$z_i \geq 0.$$

III.7 Estimation de l'erreur sur u

III.7.1. Déterminer $\max_{t \in [0,1]} t(1-t)$, en déduire un majorant de $\max_{0 \leq i \leq n} x_i$.

III.7.2. En déduire que

$$|u_i - u(ih)| \leq \frac{h^2}{96}\left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|\right), \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

III.7.3. Que peut-on dire lorsque $n \to +\infty$?

III.8 On pose $l_i = V_i u_i - f_i$ pour $i = 0, \ldots, n$. Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$|l_i - u''(ih)| \leq A\left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|\right) h^2 \quad 0 \leq i \leq n.$$

III.9 Estimation de l'erreur sur u''

Soit la fonction ℓ définie sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$\ell(ih) = l_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

et

$$\ell(x) = l_i + \frac{x - ih}{h}(l_{i+1} - l_i) \quad \text{pour } x \in\,]ih, (i+1)h[\,, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

III.9.1. Vérifier que ℓ est continue.

III.9.2. Montrer qu'il existe une constante $B > 0$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad |\ell(x) - u''(x)| \leq B\left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|\right) h^2.$$

III.10 Approximation de $u'(0)$

III.10.1. Montrer que pour la solution u de (5),

$$u'(0) = -\int_0^1 \left(\int_0^y u''(t)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}y.$$

III.10.2. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$, ainsi qu'une combinaison linéaire des l_i, que l'on notera M, telle que

$$|M - u'(0)| \leq C\left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|\right) h^2.$$