Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Oral 1
Année 2013–2014

Coordonnées barycentriques

Droite d'Euler par coordonnées barycentriques
On fixe un triangle non aplati ABC dans un plan affine euclidien. On suppose aussi que ABC n'est pas rectangle (s'il l'est, une des tangentes n'est pas définie) ; ce cas est « laissé au lecteur ».
Connus :
- les coordonnées barycentriques du centre de gravité G, de l'orthocentre H et du centre du cercle circonscrit O ;
- le critère d'alignement de trois points *via* l'annulation du déterminant 3×3 dont les lignes sont les (ou proportionnelles aux) coordonnées barycentriques des points dans un repère affine.

Pour prouver l'alignement de G, H et O, il s'agit donc de prouver que le déterminant suivant est nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan\widehat{A} & \tan\widehat{B} & \tan\widehat{C} \\ \sin 2\widehat{A} & \sin 2\widehat{B} & \sin 2\widehat{C} \end{vmatrix}.$$

En tenant compte de la relation $\sin(2x) = 2t/(1+t^2)$ lorsque $t = \tan x$, où x est un réel quelconque, il est habile de poser $a = \tan\widehat{A}$, etc. On voit alors :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{2b}{1+b^2} & \frac{2c}{1+c^2} \end{vmatrix}.$$

Si on considère a, b et c comme des indéterminées, Δ est une fraction rationnelle, quotient d'un polynôme par $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ (mais il pourrait y avoir des simplifications).

Remarque. On sait *a priori* que lorsque deux des angles sont égaux, le déterminant est nul. Algébriquement,deux colonnes du déterminant sont égales. Géométriquement, le triangle est isocèles et les trois points G, O et H sont sur l'axe de symétrie du triangle.
On en déduit que le numérateur de Δ est divisible par $(a-b)(a-c)(b-c)$. En effet, fixons deux variables, disons b et c, et considérons Δ comme une une fraction rationnelle en a à coefficients dans $\mathbb{R}(b,c)$ (ou bien, plus simplement, fixons b et c réels et considérons Δ comme une fraction rationnelle en a) : c'est le quotient d'un polynôme par $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ qui s'annule en b et c donc le numérateur est divisible par $(a-b)(a-c)$.

Calculons Δ. Pour exploiter la remarque précédente et faire apaparaître des zéros, on retranche la première colonne des deux suivantes :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{2b}{1+b^2} - \frac{2a}{1+a^2} & \frac{2c}{1+c^2} - \frac{2a}{1+a^2} \end{vmatrix}.$$

On factorise les 2. Puis on calcule en sachant qu'on peut factoriser $b-a$:

$$\frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2} = \frac{b - a + ba^2 - ab^2}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{(b-a)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}$$

Il vient :

$$\Delta = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{(b-a)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} & \frac{(c-a)(1-ac)}{(1+a^2)(1+c^2)} \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport à la première ligne :

$$\Delta = 4 \times \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ \frac{(b-a)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} & \frac{(c-a)(1-ac)}{(1+a^2)(1+c^2)} \end{vmatrix}.$$

On peut factoriser $(b-a)$ (en facteur de la première colonne) et $(c-a)$ (deuxième colonne) et, au passage, $1/(1+a^2)$ (deuxième ligne) :

$$\Delta = \frac{4(b-a)(c-a)}{1+a^2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{(1-ab)}{1+b^2} & \frac{(1-ac)}{1+c^2} \end{vmatrix} = \frac{4(b-a)(c-a)}{1+a^2}\left(\frac{1-ac}{1+c^2} - \frac{1-ab}{1+b^2}\right).$$

La fin du calcul va de soi si on se rappelle, une fois de plus, qu'il est bon de factoriser $c-b$:

$$\Delta = \frac{4(b-a)(c-a)}{1+a^2} \times \frac{b^2-c^2+ab-ac-ab^2c+abc^2}{(1+b^2)(1+c^2)} = \frac{4(b-a)(c-a)}{1+a^2} \times \frac{(b-c)(b+c+a-abc)}{(1+b^2)(1+c^2)}$$

En définitive :

$$\Delta = 4\,\frac{(b-a)(c-a)(c-b)(abc-a-b-c)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

Pour conclure, il s'agit de montrer que même lorsque le triangle n'est pas isocèle, Δ est nul. En effet, on sait que la somme des angles d'un triangle est un angle plat. Quitte à changer le nom des points, on peut supposer que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ ne sont pas complémentaires ($\widehat{A}+\widehat{B} \neq \pi/2$; sinon, la somme des trois angles serait $3\pi/4$). Par suite :

$$c = \tan(\pi - \widehat{A} - \widehat{B}) = -\tan(\widehat{A}+\widehat{B}) = -\frac{a+b}{1-ab},$$

si bien que le numérateur de Δ s'annule.

Plus de précision

Il serait bon de démontrer directement que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ à l'aide des coordonnées barycentriques. C'est possible.

À moins que le triangle ABC ne soit équilatéral, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont distincts : en effet, les hauteurs et les médiatrices des côtés sont parallèles entre elles ; or, lorsque la hauteur issue d'un sommet est aussi médiatrice du côté opposé, le triangle est isocèle de sommet principal le sommet en question. On exclut désormais ce cas sans intérêt (pour le problème du jour...).

Par suite, G est barycentre de $\{(O,p),(H,q)\}$ pour p et q réels uniquement déterminés dont la somme vaut 1. Il s'agit de calculer p et q.

On a supposé que l'angle $\widehat{C}$ n'est pas droit, si bien que les angles en A et B ne sont pas complémentaires, c'est-à-dire que $ab-1 \neq 0$. Alors on a :

$$c = \frac{a+b}{ab-1}, \quad \text{d'où notamment : } 1+c^2 = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(ab-1)^2}.$$

Les coordonnées barycentriques de O sont

$$\left(\frac{1}{s}\,\frac{2a}{1+a^2}, \frac{1}{s}\,\frac{2b}{1+b^2}, \frac{1}{s}\,\frac{2c}{1+c^2}\right),$$

où

$$s = \frac{2a}{1+a^2} + \frac{2b}{1+b^2} + \frac{2c}{1+c^2} = \frac{2a(1+b^2)+2b(1+a^2)+2(a+b)(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{4ab(a+b)}{(1+a^2)(1+b^2)}.$$

Celles de H sont $(a/t, b/t, c/t)$ où

$$t = a + b + c = a + b + \frac{a+b}{ab-1} = \frac{ab(a+b)}{ab-1}.$$

Mais, par associativité du barycentre (vérifier !), on sait que p et q sont solutions du système suivant à *trois équations* :

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{s(1+a^2)}\, p + \dfrac{a}{t}\, q = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2b}{s(1+b^2)}\, p + \dfrac{b}{t}\, q = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2c}{s(1+c^2)}\, p + \dfrac{c}{t}\, q = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

dont on peut oublier la troisième équation (sous réserve que $a \neq b$; pourquoi ?) et qui devient :

$$\begin{cases} \dfrac{1+b^2}{2b(a+b)}\, p + \dfrac{ab-1}{b(a+b)}\, q = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1+a^2}{2a(a+b)}\, p + \dfrac{ab-1}{a(a+b)}\, q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} (b^2+1)\, \dfrac{p}{2} + (ab-1)\, q = \dfrac{1}{3}(b^2+ab) \\ (a^2+1)\, \dfrac{p}{2} + (ab-1)\, q = \dfrac{1}{3}(a^2+ab) \end{cases}$$

dont la solution, miraculeusement, est : $p = 2/3$, $q = 1/3$. Cela traduit exactement que

$$2\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{0}.$$

Variante

On peut essayer d'avoir une démonstration plus symétrique en a, b et c. Un logiciel de calcul formel sera ton ami pour cette quête !