Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Géométrie
Année 2013–2014

Points remarquables du triangle
Coordonnées barycentriques

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien (sens ?) et ABC un triangle non aplati. Dans ce problème, on s'intéresse aux coordonnées barycentriques des points remarquables du triangle dans le repère affine (A, B, C) de $\mathscr{P}$.

Ici, on appelle « coordonnées barycentriques » d'un point M de $\mathscr{P}$ tout triplet de réels (a, b, c) dont la somme n'est pas nulle tel que M soit le barycentre de $\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$. Vérifier que :

– il existe au moins un tel triplet ;
– deux tels triplets sont nécessairement proportionnels.

Pour rendre uniques les coordonnées barycentriques, la convention habituelle est d'exiger que leur somme vaille 1.

Exemple simple : Des coordonnées barycentriques du centre de gravité G du triangle sont :

$$G : \quad (1, 1, 1).$$

On note par ailleurs O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.
On supposera partout que $O \notin (BC)$.

I Résultats préliminaires

1° Lien entre coordonnées barycentriques et certains angles

Soit P un point de la droite (BC). On note les angles suivants :

$$\gamma = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}), \qquad \beta = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OC}).$$

(a) Exprimer $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ dans une base orthonormée (i, j), où $i = \overrightarrow{OP}/OP$.

(b) Vérifier que les vecteurs $\sin(\beta)\,\overrightarrow{OB} + \sin(\gamma)\,\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont colinéaires.

(c) En déduire que P est le barycentre de $\begin{pmatrix} B & C \\ \sin\beta & \sin\gamma \end{pmatrix}$.

(d) Donner une deuxième preuve en utilisant la loi des sinus dans les triangles BOP et COP.

2° Barycentres et barycentres partiels

Soit M un point et (a, b, c) des coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C).
(a) Montrer que M n'est pas sur la parallèle à (BC) contenant A si et seulement si $b + c \neq 0$.
On suppose que ces conditions sont remplies, et on note P l'intersection de (AM) et (BC) et (b', c') des coordonnées barycentriques de P dans le repère affine (B, C) de la droite (BC).
(b) Quel lien y a-t-il entre (a, b, c) et (b', c') ?

II Points classiques

1° Centre du cercle circonscrit

(a) Soit P l'intersection des droites (AO) et (BC) (lorsqu'elle existe). Exprimer en fonction de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les angles β et γ de I 1°.
(b) En déduire les coordonnées barycentriques de P dans le repère affine (B, C).
(c) En déduire que les coordonnées barycentriques de O dans le repère (A, B, C) sont :

$$O : \quad (\sin 2\widehat{A}, \sin 2\widehat{B}, \sin 2\widehat{C}).$$

2° **Orthocentre**

(a) Supposons que $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ soient aigus. On note A' la projection orthogonale de A sur (BC). Calculer les longueurs BA' et CA' en fonction de AA', $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. En déduire des coordonnées barycentriques de A' dans le repère affine (B, C).
(b) Traiter le cas où $\widehat{B}$ est obtus.
(c) Montrer enfin que des coordonnées barycentriques de l'orthocentre H dans le repère (A, B, C) sont :

$$H : \quad (\tan\widehat{A}, \tan\widehat{B}, \tan\widehat{C}).$$

3° **Une preuve calculatoire d'un résultat classique**

Puisqu'on y est, démontrer que l'on a : $\overrightarrow{OH} - 3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{0}$.
On pourra partir de $\overrightarrow{OH} - 3\,\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\tan\widehat{A}}{\tan\widehat{A}+\tan\widehat{B}+\tan\widehat{C}} - 1\right)\overrightarrow{OA} + \cdots$ *et utiliser* $\widehat{A} = \pi - \widehat{B} - \widehat{C}$.
Autre méthode : s'inspirer de IV en remplaçant $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ *par* $\frac{2x}{1+x^2}$.

4° **Centre du cercle inscrit**

On note I le centre du cercle inscrit à ABC.
(a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\overrightarrow{AI} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right).$$

(b) Montrer que des coordonnées barycentriques de I dans le repère (A, B, C) sont :

$$I : \quad (BC, AC, AB).$$

(c) En déduire que des coordonnées barycentriques de I dans le repère (A, B, C) sont :

$$I : \quad (\sin\widehat{A}, \sin\widehat{B}, \sin\widehat{C}).$$

III Un point semi-classique : le point de Gergonne

1° **Point de Gergonne**

On note A', B' et C' les points d'intersection respectifs du cercle inscrit à ABC et des droites (BC), (AC), (CA).
(a) A l'aide du théorème de Céva, montrer que les droits (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes. On note Γ leur intersection (point de Gergonne).
(b) Montrer que des coordonnées barycentriques de Γ dans le repère (A, B, C) sont :

$$\Gamma : \quad \left(\tan\frac{\widehat{A}}{2}, \tan\frac{\widehat{B}}{2}, \tan\frac{\widehat{C}}{2}\right).$$

2° **Droite de Gergonne**

On note A'', B'' et C'' les points d'intersection respectifs :

$$(AI) \cap (BC), \quad (BI) \cap (AC), \quad (CI) \cap (AB),$$

et P, Q et R les intersections respectives, supposées exister :

$$(BC) \cap (B''C''), \quad (AC) \cap (A''C''), \quad (AB) \cap (A''B'').$$

Montrer à l'aide du théorème de Desargues que les points P, Q, R sont alignés. La droite qui les contient est appelée droite de Gergonne du triangle ABC.

IV Le Savant Cosinus

On suit l'article de François Rideau, *Bulletin de l'APMEP*, n° 457, p. 249-261 (fiche Publimath).
On définit le Savant Cosinus Ω comme le point de coordonnées barycentriques

$$\Omega : \ (\cos\widehat{A}, \cos\widehat{B}, \cos\widehat{C}).$$

1° Construction géométrique de Ω : voir l'article

2° Alignement de G, Γ, Ω

On pose

$$a = \tan\frac{\widehat{A}}{2}, \quad b = \tan\frac{\widehat{B}}{2}, \quad c = \tan\frac{\widehat{C}}{2}.$$

(a) Démontrer que les points G, Γ, Ω sont alignés si, et seulement si on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan\frac{\widehat{A}}{2} & \tan\frac{\widehat{B}}{2} & \tan\frac{\widehat{C}}{2} \\ \cos\widehat{A} & \cos\widehat{B} & \cos\widehat{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{1-b^2}{1+b^2} & \frac{1-c^2}{1+c^2} \end{vmatrix} = 0.$$

On note alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère d'un plan affine. On note R, S, T les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a, b, c.

(b) Montrer que G, Γ, Ω sont alignés, si et seulement si P, Q et R le sont.

On suppose que ABC n'est ni équilatéral, ni isocèle, de sorte que a, b et c sont distincts (pourquoi ?). Une droite qui contient P, Q, R a donc une équation de la forme

$$y = ux + v,$$

où (x, y) sont les coordonnées du point courant et u, v des réels fixés et $u \neq 0$ (pourquoi ?).

(c) Montrer que si P, Q et R sont alignés, alors a, b et c sont les trois racines d'un polynôme de degré trois, dont on écrira les coefficients en fonction de u et v.

(d) Sous l'hypothèse que P, Q et R sont alignés, en déduire une relation satisfaite par a, b, c, qui ne dépend pas de u et v.

(e) Démontrer que cette relation est en effet satisfaite.

(f) Démontrer alors que G, Γ, Ω sont alignés.

(On pourra exhiber un polynôme de degré 3 dont a, b, c sont solutions, puis montrer que les points P, Q et R sont alignés).

Récapitulatif

point	nom	coordonnées barycentriques
centre de gravité	G	$(1, 1, 1)$
centre du cercle circonscrit	O	$(\sin 2\widehat{A}, \sin 2\widehat{B}, \sin 2\widehat{C})$
orthocentre	H	$(\tan\widehat{A}, \tan\widehat{B}, \tan\widehat{C})$
centre du cercle inscrit	I	$(\sin\widehat{A}, \sin\widehat{B}, \sin\widehat{C})$
point de Gergonne	Γ	$\left(\tan\frac{\widehat{A}}{2}, \tan\frac{\widehat{B}}{2}, \tan\frac{\widehat{C}}{2}\right)$
Savant Cosinus	Ω	$(\cos\widehat{A}, \cos\widehat{B}, \cos\widehat{C})$