La chaînette qui voulait se faire aussi belle qu'une parabole

1 Version recherche

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

Vous chercherez à répondre à la question : « la courbe de la fonction f est-elle une parabole ? » par expérimentation avec le logiciel geogebra. Vous chercherez ensuite à démontrer.

2 Version avec guide

2.1 Travail sur geogebra

1. Le logiciel geogebra dispose d'une fonction nommée « cosh ». Tracer une représentation de cette fonction dans une feuille geogebra sur l'intervalle $[-2; 2]$.
2. On cherche à répondre à la question « la courbe obtenue est-elle une parabole ? » de façon expérimentale. Pour cela, tracer la courbe d'une fonction $x \longmapsto a\,x^2 + b\,x + c$ et faire varier les valeurs de a, b et c en tentant de superposer les deux courbes. Quelle réponse semble-t-on devoir apporter ?
3. Le logiciel geogebra est capable d'évaluer également la dérivée d'une fonction (commande "Dérivée[]"). Tracer la dérivée de la fonction cosh. En quoi cela vous permet-il de répondre à la question précédente ?

2.2 Travail de démonstration

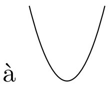
On nomme g la fonction cosh et f la fonction $x \longmapsto a\,x^2 + b\,x + c$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que $f(0) = g(0); f(-2) = g(-2); f(2) = g(2)$ en remplaçant $g(0)$; $g(-2)$; $g(2)$ par des valeurs approchées données par le logiciel.
2. Comparer alors les images de 1 par f et g. Que peut-on en conclure au sujet de la question « la courbe obtenue est-elle une parabole ? ».
3. La fonction cosh est en fait définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right)$$

   Reprendre les deux questions précédentes en prenant les valeurs exactes des images de 0 ; -2 et 2 par la fonction g.
4. Déterminer la dérivée de la fonction cosh à l'aide de l'expression précédente.
5. Déterminer alors trois points de la courbe repésentative de g' qui ne soient pas alignés. Répondre alors à la question : « la fonction g peut-elle s'écrire sous la forme $x \longmapsto a\,x^2 + b\,x + c$? »

3 Objectifs

- Faire comprendre qu'une parabole n'est pas seulement quelque chose qui « ressemble » à  mais qu'il y a quelques « contraintes mathématiques » plus fortes. . .
- Faire comprendre aux élèves se contentant de graphiques très approximatifs tracés à la hâte la nécessité d'un peu plus de précision.
- Comprendre qu'une dérivée donne certaines informations sur la nature d'une courbe. Les changements de repère et travaux sur les équations de coniques étant actuellement tout à fait hors programme, on pourrait par exemple amener les élèves à la caractérisation de la parabole (d'axe parallèle à (Oy)) par la représentation graphique de la dérivée (plus "concret" qu'un travail sur les expressions algébriques).

4 Notions travaillées

1. Fonctions polynômes du second degré.
2. Équations, calculs.
3. Dérivations.