Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Écrit
Année 2013–2014

Barycentres

Préliminaire : mesure algébrique
Dans un espace affine $\mathscr{E}$, soit $\mathscr{D}$ une droite affine dirigée par une droite vectorielle D. Soit u une base de D et A, B deux points de $\mathscr{D}$. On note $\overline{AB}$ le scalaire tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot u$.
a) Soit O un point de $\mathscr{D}$ et x_A, x_B les abscisses de A et B dans le repère (O, u) de $\mathscr{D}$. Établir que l'on a : $x_B - x_A = \overline{AB}$.
b) Soit (O', u') un autre repère de $\mathscr{D}$. Quelle relation a-t-on entre les abscisses de A et B dans les repères (O, u) et (O', u') ? entre les mesures algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{AB}'$?
c) Soient M, N, P, Q quatre points, avec $P \neq Q$. Montrer que le rapport $\frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}}$ ne dépend pas du choix d'un repère de $\mathscr{D}$ ou d'une base de D.

I Barycentres

1° Reconstruire la théorie...

a) Démontrer les résultats énoncés dans le §4 du rappel de cours.

> Le point le plus délicat est caractérisation des applications affines par la préservation du barycentre. Il est facile de voir qu'une application affine préserve le barycentre.
> Soit $\mathscr{E}$ affine de dimension n, $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ un autre espace affine. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application qui préserve le barycentre (sens ?). On veut montrer que f est affine.
> Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels dont la somme n'est pas nulle et soit M le barycentre de $\{(A_i, \lambda_i)\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Calculer les coordonnées de M dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$.
> En utilisant les points $A'_i = f(A_i)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, montrer que f est affine.

b) Si M est le barycentre $\begin{bmatrix} A & B \\ \lambda & 1-\lambda \end{bmatrix}$, quelle relation entre λ et $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$? entre λ et $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$?

2° Fonctions de Leibniz et barycentres

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine dirigé par E. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \ldots, A_r)$ une famille de points, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ une famille de scalaires.
a) On considère l'application

$$f : \mathscr{E} \longrightarrow E, \quad M \longmapsto \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}.$$

Montrer que f est bijective si $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \neq 0$ et constante sinon. [Le barycentre est l'image réciproque du vecteur nul.]
b) On suppose que $\mathscr{E}$ est un espace euclidien, c'est-à-dire que E est muni d'un produit scalaire euclidien [1]. Décrire les lignes de niveau [2] de la fonction scalaire de Leibniz

$$g : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad M \longmapsto \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot MA_i^2.$$

1. Par exemple, $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard.
2. C'est-à-dire les images réciproques $g^{-1}(r)$ pour $r \in \mathbb{R}$.

3° Une situation classique

Soit ABC un triangle non aplati dans un plan affine. Soient M_0 un point de la droite (AB) et :
- M_1 le projeté de M_0 sur (AC) parallèlement à (BC) ;
- M_2 le projeté de M_1 sur (BC) parallèlement à (AB) ;
- M_3 le projeté de M_2 sur (AB) parallèlement à (AC) ;
- M_4 le projeté de M_3 sur (AC) parallèlement à (BC) ;
- M_5 le projeté de M_4 sur (BC) parallèlement à (AB) ;
- M_6 le projeté de M_5 sur (AB) parallèlement à (AC).

On veut montrer que $M_6 = M_0$ de deux façons différentes.

a) Calculer les coordonnées des points M_k dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, constater que $M_6 = M_0$.

b) Vérifier que M_0 peut s'écrire comme barycentre des points A et B. Exprimer M_1 comme barycentre de A et C, M_2 comme barycentre de B et C, etc. Montrer sans calcul que $M_6 = M_0$.

II Convexité

On rappelle que :
- le segment $[AB]$ défini par deux points A et B d'un espace affine $\mathscr{E}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de A et B ;
- une partie $\mathscr{C}$ d'un espace affine est *convexe* si, pour tous points $A, B \in \mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est tout entier inclus dans $\mathscr{C}$.

1°

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On rappelle que f est convexe si, pour tous $x, x' \in I$ et tout $t \in [0,1]$, on a : $f(tx + (1-t)x') \leqslant tf(x) + (1-t)f(x')$.

Montrer que f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe, c'est-à-dire si $\{(x,y) \in I \times \mathbb{R},\ y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

2° Théorème de Gauss-Lucas

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. On note α son coefficient dominant, $z_1, \ldots, z_r$ ses racines, $m_1, \ldots, m_r$ les multiplicités correspondantes, de sorte que $P = \prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{m_k}$.

a) Décomposer la fraction rationnelle $F = P'/P$ en éléments simples.

b) Montrer que toute racine w de P' est dans l'enveloppe convexe des z_k. [Si w n'est pas l'un des z_k, on partira de l'égalité $F(w) = 0$.]

3° Points extrémaux d'un tétraèdre

Soit $\mathscr{C}$ une partie convexe d'un espace affine $\mathscr{E}$. On rappelle (ou pas) qu'un point M de $\mathscr{C}$ est un *extrémal* si, pour tout couple de points $(A,B) \in \mathscr{C}^2$ tel que M appartient au segment $[AB]$, on a : $M = A$ ou $M = B$.

a) Montrer que M est un point extrémal SSI $\mathscr{C} \setminus \{M\}$ est convexe.

b) Soit $\mathscr{T}$ un triangle du plan (resp. un tétraèdre de l'espace), c'est-à-dire l'enveloppe convexe de trois (resp. quatre) points non coplanaires A, B, C (resp. et D). Montrer que les points extrémaux de $\mathscr{T}$ sont A, B, C (resp. et D).

c) Soit f une bijection affine. Montrer que l'image d'un point extrémal de $\mathscr{C}$ est un point extrémal de $f(\mathscr{C})$.

d) Montrer qu'une partie convexe est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

4° Points extrémaux d'un tétraèdre, v. 2

Soit (z_0, z_1, z_2, z_3) un repère affine de $\mathbb{R}^3$, $[P] = [z_0, z_1, z_2, z_3]$ son enveloppe convexe et y_0, y_1, y_2, y_3 quatre points de $\mathbb{R}^3$.

a) On suppose que pour tout $j \in \{0,1,2,3\}$

$$y_j = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ b_{j,0} & b_{j,1} & b_{j,2} & b_{j,3} \end{bmatrix} \in [P] \setminus \{z_0\}.$$

1. Montrer que pour tout $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, l'un au moins des coefficients $b_{j,1}$, $b_{j,2}$, $b_{j,3}$ est non nul.
2. Montrer que $z_0 \notin [y_0, y_1, y_2, y_3]$.
   [On pourra procéder par l'absurde en supposant $z_0 \in [y_0, y_1, y_2, y_3]$ et en explicitant cette condition dans la base affine (z_0, z_1, z_2, z_3).]

b) Soit f une bijection affine de $\mathbb{R}^3$.

1. Quelle est l'image par f de l'enveloppe convexe $[P]$?
2. Avec la question 1, montrer l'équivalence :

$$f[P] = [P] \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\},\ f(z_i) \in \{z_0, z_1, z_2, z_3\}.$$

III Courbes de Bézier

1° Polynômes de Bernstein

Soient $n, k \in \mathbb{Z}$. On définit le *polynôme de Bernstein* : $B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$, $B_{k,n}(t) = 0$ sinon. En général, on prend $t \in [0, 1]$.

a) Démontrer les relations suivantes :
– partition de l'unité : $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) = 1$ pour tout t et tout $n \in \mathbb{N}$;
– positivité : pour $t \in [0, 1]$, $0 \leqslant B_{k,n}(t) \leqslant 1$;
– symétrie : $B_{k,n}(t) = B_{n-k,n}(t)$ pour tout t et tous n, k ;
– récurrence : $B_{k,n}(t) = (1-t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(B_{k,n})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de l'espace des polynômes de degré au plus n. [La famille est, en un sens, échelonnée...]

2° Courbes de Bézier

On fixe $n \geqslant 1$ et une famille de points du plan $(P_0, \ldots, P_n)$. On définit la *courbe de Bézier* sur les *points de contrôle* $(P_0, \ldots, P_n)$, notée $M_{[P_0,\ldots,P_n]}(t)$ ou plus simplement $M(t)$, par la formule suivante, indépendante du choix d'un point O du plan :

$$\forall t \in [0, 1], \quad M(t) = O + \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(t) \overrightarrow{OP_k}, \quad \text{ou bien } M(t) = \begin{bmatrix} P_0 & \cdots & P_n \\ B_{0,n}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix}.$$

a) ≪ Invariance affine ≫
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application affine. Montrer que l'image par f de la courbe de Bézier sur les points de contrôle $P_0, \ldots, P_n$ est la courbe de Bézier sur les points de contrôle $f(P_0), \ldots, f(P_n)$.

b) Enveloppe convexe
Montrer que la courbe est tout entière contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle.

c) Influence de l'ordre des points
Montrer sur un exemple (disons avec $n = 4$) que l'ordre des points de contrôle est important. Donner une permutation non triviale des points de contrôle qui ne modifie pas la courbe.

d) Contrôle pseudo-local
Vérifier que si on bouge un et un seul des points de contrôle P_j, la courbe entière est modifiée (sauf ses extrémités si $j \notin \{0, n\}$). Justifier qualitativement que si l'on bouge le point P_j, la courbe est modifiée ≪ surtout ≫ pour les valeurs de t au voisinage de j/n.

e) Interpolation aux extrémités
Vérifier que $M(0) = P_0$, que $M(1) = P_n$.
Montrer que la courbe admet un vecteur tangent en $t = 0$ et que ce vecteur dirige la demi-droite $[P_0P_1)$; montrer la courbe admet un vecteur tangent en $t = 1$ et que ce vecteur dirige la demi-droite $[P_nP_{n-1})$. [Faire un développement limité à l'ordre 1 !]

3° **Algorithme de Casteljau**

À $t \in [0,1]$ fixé, on définit $M_{j,0} = P_j$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$ puis, à l'étape $\ell \in \{1, \ldots, n\}$:

$$M_{j,\ell} = M_{j,\ell}(t) = \begin{bmatrix} M_{j,\ell-1}(t) & M_{j+1,\ell-1}(t) \\ 1-t & t \end{bmatrix} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-\ell).$$

a) Relation fondamentale : Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et t quelconques, on a :

$$\begin{bmatrix} P_0 & \cdots & P_{n+1} \\ B_{0,n+1}(t) & \cdots & B_{n+1,n+1}(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} P_0 & \cdots & P_n \\ B_{0,n}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} \\ 1-t \end{matrix} \quad \begin{matrix} \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_{n+1} \\ B_{0,n}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} \\ t \end{matrix} \right].$$

b) Validité de l'algorithme de Casteljau : Montrer que $M_{0,n}(t) = M(t)$ pour tout t.

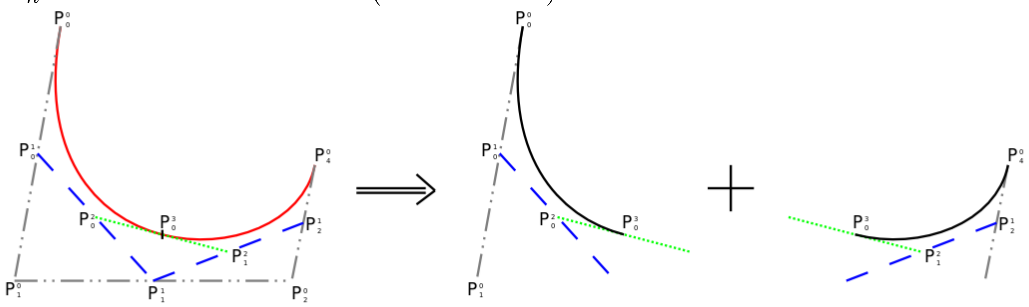
c) Construction effective

Observer le tableau suivant, le commenter, l'implémenter (par exemple avec Geogebra)...

$$\begin{array}{ccccccccc} M_{0,0} & & M_{1,0} & & \cdots & & M_{n-1,0} & & M_{n,0} \\ & M_{0,1} & & M_{1,1} & \cdots & M_{n-2,1} & & M_{n-1,1} & \\ & & M_{0,2} & & & & M_{n-2,2} & & \\ & & & \ddots & & \iddots & & & \\ & & & & M_{0,n} & & & & \end{array}$$

d) Recollement

Suivant la figure i-dessous (tirée de wikipedia), la courbe de Bézier de points de contrôle $P_0, \ldots, P_n$ s'obtient en concaténant (« recollant ») deux courbes de Bézier.



On veut le prouver. Pour $u \in [0,1]$, on note $N(u)$ le point courant de la courbe de Bézier associée à $M_{0,0}(t), M_{0,1}(t), \ldots, M_{0,n}(t)$, c'est-à-dire :

$$N(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-u)^{n-k} u^k M_{0,k}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-u)^{n-k} u^k \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (1-t)^{k-\ell} t^\ell P_\ell.$$

Il s'agit de montrer que l'on a :

$$N(u) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (ut)^\ell (1-ut)^{n-\ell} P_\ell.$$

e) Application : La tangente en $M(t)$ est la droite passant par $M_{0,n-1}(t)$ et $M_{1,n-1}(t)$).

4° **Points de contrôle pour une courbe polynômiale**

On se donne une courbe polynomiale $M(t) = (x(t), y(t))$ $(t \in [0,1])$, où x et y sont deux polynômes de degré inférieurs ou égaux à un entier x donné. Montrer que M est une courbe de Bézier pour un unique choix de points de contrôle $P_0 = M(0)$, $P_1, \ldots, P_n = M(1)$.