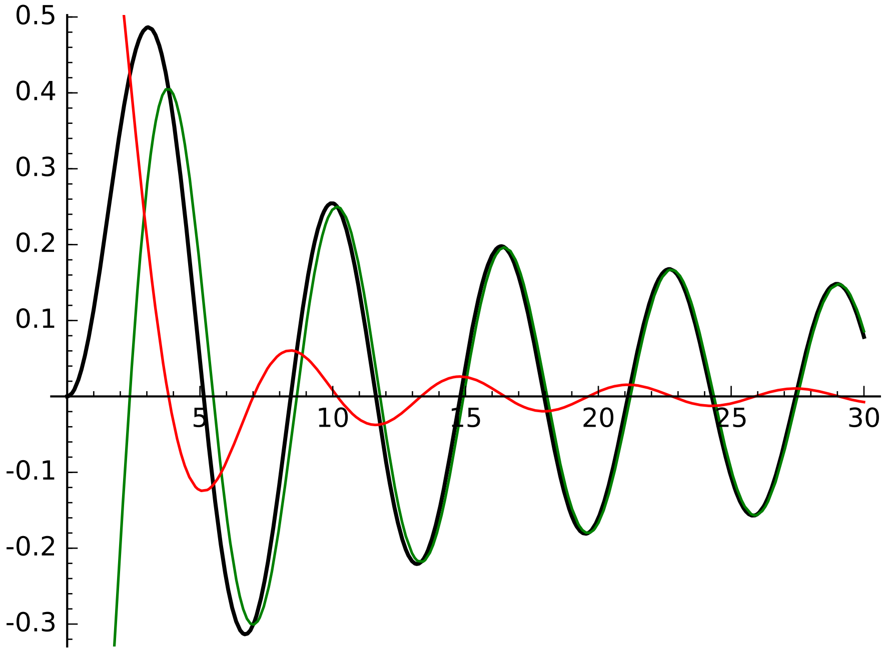
Carnet de voyage en Analystan



Marie Peronnier Kathie Tagliaro Linda Decourt

Denis Roussillat Jérôme Germoni Tewfik Lahcene Philippe Caldero

« Mais je n'ai nulle envie d'aller chez les fous », fit remarquer Alice.
« Oh ! vous ne sauriez faire autrement », dit le Chat. « Ici, tout le monde est fou. Je suis fou. Vous êtes folle. »
« Comment savez-vous que je suis folle ? » demanda Alice.
« Il faut croire que vous l'êtes », répondit le Chat ; « sinon, vous ne seriez pas venue ici. »

Version du 27 novembre 2021.

Table des matières

Chapitre 1

Avant-propos

Benjamin : On commence le matin par une matière difficile puis pause déj. 40 minutes, une matière faille jusqu'à 17h, pause goûter 20 mn. On enchaîne avec une matière difficile. Et le soir on fait des annales jusqu'à ce qu'on soit cuit. A ce rythme là, c'est jouable.

Antoine : Attend-tend-tend-tend-tend. Là j'en peux plus, là j'en ai marre, on fait une pause ?

Benjamin : Ouais, carrément. Pause Stat. ? Intégrales ?

Première année, Thomas Lilti, 2018.

Il arrive un moment où la vérité s'impose, brutale : « ta deuxième vie commence quand tu as compris qu'il n'y en avait qu'une ». Il en va de même de l'année de congé délivrée par le rectorat pour l'agrégation interne. Une année-sandwich qui, comme disait Serge Lentz, *vient s'intercaler dans la vie comme une tranche de pâté entre deux morceaux de pain.* On vous a donc préparé de quoi casser la croûte : le couteau, la baguette, la mie fraîche (mais pas trop), les tomates, la salade, le poulet froid, la mayonnaise... et les cornichons ! Autant d'ingrédients parmi lesquels il conviendra de puiser, selon l'appétence, pour composer le sandwich qu'il faudra, au final, croquer à pleines dents.

On ne change pas une recette qui marche : suivant celle du fascicule du carnet de voyage en Algébrie, nous sommes partis de fiches d'exercices éprouvées par les longues années d'expérience de la préparation à l'agrégation interne de Lyon. Les exercices ont été ensuite sélectionnés, relus, affinés par des volontaires fraîchement agrégés, qui venaient de vivre les réalités de la préparation et étaient prêts à venir partager leur connaissance du terrain.

Dans cette seconde édition, les exercices ont été corrigés par Antoine Boivin, Antoine Guise et Raphaël Sohier. Ils proviennent pour la plupart, de la réserve non dénombrable des formateurs Tewfik Lahcene et Jérôme Germoni, et avec l'aide des ex-préparationnaires Kathie Tagliaro, Linda Decourt, Denis Roussillat, Guillaume Mallet, Maïté Faillard, avec une mention spéciale pour Marie Peronnier pour son investissement et sa relecture.

Chapitre 2

Intégrales sur un segment

Exercice 1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$, une fonction continue par morceaux, et (donc) intégrable sur un segment $\mathrm{I} = [a, b]$.

Le but de cet exercice est de démontrer le *lemme de Riemann-Lebesgue* :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \mathrm{e}^{int} \mathrm{d}t = 0.$$

Pour plus de commodité, posons dans la suite

$$\mathrm{I}_n := \int_a^b f(t) \mathrm{e}^{int} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas où f est une fonction constante sur I.
2. De même, montrer le résultat pour f une fonction en escaliers sur I.
3. En déduire le résultat si f est une fonction continue par morceaux sur I, comme supposé dans l'énoncé.
4. *Variante* : montrer le lemme de Riemann-Lebesgue à l'aide d'une intégration par parties lorsque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Soluce

1. Si la fonction f est constante égale à $k \in \mathbb{C}$, on a, pour $n \neq 0$,

$$\mathrm{I}_n = k \int_a^b \mathrm{e}^{int} \mathrm{d}t = \frac{k}{in} \left[\mathrm{e}^{int}\right]_a^b = \frac{k}{in} \left(\mathrm{e}^{inb} - \mathrm{e}^{ina}\right).$$

   Par conséquent, on a

$$|\mathrm{I}_n| \leqslant \frac{2k}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Le résultat en découle.

2. Si f est une fonction en escaliers, il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$, $p \geqslant 1$, de l'intervalle $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in \{0, p-1\}$:

$$f|_{[a_i, a_{i+1}]} =: k_i,$$

avec $k_i \in \mathbb{C}$, pour tout i.
Par linéarité de l'intégrale, on obtient alors

$$\mathrm{I}_n = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t.$$

Chacune des intégrales $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t$ tendant vers 0, d'après la question 1, et comme la somme est finie, on en déduit le résultat désiré :

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. On sait que toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers. Notons $(f_n)_n$ une suite de fonctions en escaliers qui tend uniformément vers f. En notant $\mathrm{I}_{n,k} := \int_a^b f_k(t)\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t$, on a

$$|\mathrm{I}_n| = |\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n,k} + \mathrm{I}_{n,k}| \leqslant |\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n,k}| + |\mathrm{I}_{n,k}|.$$

Or, par inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n,k}| = |\int_a^b (f(t) - f_k(t))\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t| \leqslant \int_a^b |f(t) - f_k(t)|\mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de $(f_k)_k$ vers f, on peut choisir k suffisamment grand pour rendre la quantité $|\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n,k}|$ plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$. En effet, soit $\mathrm{K} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant \mathrm{K}$,

$$|f(t) - f_k(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

On a bien

$$|\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n,k}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}.$$

On fixe $k \geqslant \mathrm{K}$. En utilisant le résultat de la question 2, soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$|\mathrm{I}_{n,k}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout n supérieur à N, on obtient :

$$|\mathrm{I}_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui est le résultat voulu.

4. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, par intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n = \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t &= \frac{1}{in}\left[f(t)\mathrm{e}^{int}\right]_a^b - \frac{1}{in}\int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{in}\left(f(b)\mathrm{e}^{inb} - f(a)\mathrm{e}^{ina} - \int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\mathrm{I}_n| \leqslant |\frac{1}{n}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(|f(b)| + |f(a)| + \mathrm{M}(b-a)\right),$$

où M est le maximum de f' (qui est continue), atteint sur le compact $[a,b]$.
On a ainsi prouvé que I_n tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 2 (Inégalités : Wirtinger & isopérimétrique)

1. **(Inégalité de Wirtinger)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

   (i) Montrer l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{T}^2}{4\pi^2} \int_0^{\mathrm{T}} \left|f'(t)\right|^2 \mathrm{d}t.$$

   (ii) Montrer qu'il y a égalité si et seulement s'il existe des nombres complexes a et b tels que :

$$f(t) = a\ \cos\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t + b\ \sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t.$$

2. **(Inégalité isopérimétrique)** Soit Γ une courbe du plan réel, fermée, de classe $\mathscr{C}^1$, régulière et simple (c'est-à-dire sans point multiple). On désigne par L sa longueur, et par A l'aire du domaine qu'elle délimite.

   Le but de cet exercice est d'établir l'*inégalité isopérimétrique* :

$$4\pi \mathrm{A} \leqslant \mathrm{L}^2,$$

   avec égalité si et seulement si Γ est un cercle.

   Pour ce faire, on introduit un paramétrage de la courbe $\Gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$, tel que, pour tout $t \in [0, \mathrm{L}]$, $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ (on parle alors de paramétrage *normal*). Comme Γ est une courbe fermée, on peut supposer ce paramétrage périodique, de période L, la longueur de Γ. On rappelle la formule de Green-Riemann, donnant l'aire[1] A :

$$\mathrm{A} = \int_0^{\mathrm{L}} x(t)y'(t)\mathrm{d}t.$$

   (i) Justifier que l'on peut supposer que $\int_0^{\mathrm{L}} x(t)\mathrm{d}t = 0$.

   (ii) Sous cette hypothèse, montrer que pour tout $\mathrm{C} > 0$, on a

$$\mathrm{A} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{L}^2}{4\pi^2 \mathrm{C}} \int_0^{\mathrm{L}} x'(t)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{C} \int_0^{\mathrm{L}} y'(t)^2 \mathrm{d}t.$$

   (iii) Choisir C de sorte à démontrer l'inégalité isopérimétrique.

   (iv) Étudier le cas d'égalité.

Soluce

1. (i) Par hypothèse, $\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t = 0$, donc le coefficient de Fourier de f, $c_0(f)$, est nul. Comme de plus, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, par le théorème de Dirichlet, elle est la somme de sa série de Fourier. On peut alors écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n(f) \mathrm{e}^{in\omega t},$$

   où $\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$.

On utilise alors la formule

$$c_n(f') = in\omega c_n(f),$$

valable car f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Enfin, comme la fonction f et sa dérivée f' sont continues par morceaux, le théorème de Parseval s'applique à ces deux fonctions, et l'on obtient :

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \left|f'(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left|c_n(f')\right|^2.$$

En utilisant la relation reliant $c_n(f)$ et $c_n(f')$, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2 |c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|c_n(f')|^2}{\omega^2}$$

Finalement, on a bien

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

On a ainsi établi l'*inégalité de Wirtinger* :

$$\int_0^{\mathrm{T}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{T}^2}{4\pi^2}\int_0^{\mathrm{T}} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

(ii) Supposons d'abord l'égalité. On a alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2.$$

Cela implique que

$$\sum_{|n|\geqslant 2} (n^2-1)|c_n(f)|^2 = 0.$$

Si la somme d'une série à termes positifs est nulle, alors, tous ses termes sont nuls ; autrement dit, pour tout $|n| \geqslant 2$, $c_n(f) = 0$.

On obtient alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in\omega t} = c_1(f)\mathrm{e}^{i\omega t} + c_{-1}(f)\mathrm{e}^{-i\omega t} =: a\ \cos\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t + b\ \sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t,$$

où a et $b \in \mathbb{C}$ sont des combinaisons linéaires en $c_1(f)$ et $c_{-1}(f)$. La formule est démontrée.

La réciproque est claire en suivant exactement le chemin inverse.

2. (i) Notons tout d'abord que l'on peut toujours se ramener à un paramétrage normal ; il suffit en effet pour cela de poser $g := f \circ s^{-1}$, où s est une abscisse curviligne (pour plus de détails, *cf.* remarques).

D'autre part, quitte à effectuer une translation, on peut supposer que $\int_0^{\mathrm{L}} x = 0$. Plus précisément, il s'agit de remplacer x par $\tilde{x} = x - m$, où $m = \frac{1}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}} x(t)\mathrm{d}t$: cela ne change ni la régularité de x, ni la longueur ni l'aire de la courbe et $\int_0^{\mathrm{L}} \tilde{x} = \int_0^{\mathrm{L}} x - \frac{1}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}} m\mathrm{d}t = 0.$

(ii) Pour majorer l'aire, on utilise le « petit pilier de l'analyse ».

Idée-clé. *On veut comparer une aire, i.e. une intégrale de xy' et une longueur, i.e. intégrale de $(x'^2+y'^2)^{1/2}$ ou, ce qui revient au même et c'est là la siouxerie, de $x'^2+y'^2$ (cette fonction vaut 1 !). On pense alors au* petit pilier de l'analyse™ *qu'est l'inégalité $ab \leqslant (a^2+b^2)/2$. Cela ferait apparaître la somme de l'intégrale de x^2, qui est le carré d'une longueur, et de celle de $(y')^2$, qui est le carré d'une vitesse (noter toutefois qu'ici, le temps a la dimension d'une longueur).*
Ce n'est pas homogène ! Cela conduit à introduire un facteur C, *de la dimension d'une longueur, pour n'avoir que des intégrales de longueurs. C'est le* petit pilier *amélioré : pour a et b réels et* C *strictement positif,*

$$ab \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\mathrm{C}} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{C} b^2,$$

avec égalité si et seulement si $a/\sqrt{\mathrm{C}} = \sqrt{\mathrm{C}} b$. En effet, l'inégalité est équivalente à $\left(\frac{a}{\sqrt{\mathrm{C}}} - \sqrt{\mathrm{C}}\, b\right)^2 \geqslant 0$.

Soit $\mathrm{C} > 0$. D'après le rappel ci-dessus, on a (en omettant les $(t)\mathrm{d}t$) :

$$\int_0^{\mathrm{L}} xy' \leqslant \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{L}} \frac{x^2}{\mathrm{C}} + \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{C}(y')^2,$$

avec égalité si et seulement si $\frac{x}{\sqrt{\mathrm{C}}} = \sqrt{\mathrm{C}}\, y'$ partout (si cette inégalité est fausse en un point, alors par continuité elle l'est sur un voisinage de ce point et, l'intégrale d'une fonction continue positive non uniformément nulle étant strictement positive, l'inégalité des intégrales est stricte).
Comme on a supposé que l'intégrale de x est nulle, on peut appliquer l'inégalité de Wirtinger :

$$\mathrm{A} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{L}^2}{4\pi^2 \mathrm{C}} \int_0^{\mathrm{L}} (x')^2 + \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{C}(y')^2.$$

(iii) Pour exploiter l'égalité $(x')^2 + (y')^2 = 1$, il faut choisir C de sorte que

$$\frac{\mathrm{L}^2}{4\pi^2 \mathrm{C}} = \mathrm{C}, \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{L}}{2\pi}.$$

Il vient alors, en utilisant le fait que le paramétrage est normal :

$$\mathrm{A} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{L}}{2\pi} \int_0^{\mathrm{L}} \left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{L}}{2\pi} \int_0^{\mathrm{L}} \left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{1/2} \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{L}^2}{4\pi}.$$

(iv) S'il y a égalité $\mathrm{A} = \mathrm{L}^2/(4\pi)$, c'est que l'on a égalité dans le petit pilier et dans l'inégalité de Wirtinger. D'après la question 1ii, il existe a et b tels que pour tout t,

$$x(t) = a \cos \frac{2\pi}{\mathrm{L}} t + b \sin \frac{2\pi}{\mathrm{L}} t$$

et d'après le rappel ci-dessus, $\frac{x}{\sqrt{\mathrm{C}}} = \sqrt{\mathrm{C}}\, y'$, i.e. $y' = \frac{2\pi}{\mathrm{L}} x$.

On reconnaît un paramétrage du cercle centré en $(0, y(0))$ et de rayon $r = \sqrt{a^2+b^2}$. En effet, soit t_0 tel que $a = r\cos t_0$ et $b = r\sin t_0$. Alors $x(t) = r\cos\frac{2\pi}{\mathrm{L}}(t-t_0)$ et $y(t) = y(0) + r\sin\frac{2\pi}{\mathrm{L}}(t-t_0)$.
Notons qu'alors l'égalité $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ donne

$$\left(\frac{2\pi}{\mathrm{L}}\right)^2 (a^2+b^2) = 1, \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{L} = 2\pi r,$$

et l'aire est $\mathrm{A} = \mathrm{L}^2/(4\pi) = \pi r^2$, conformément aux formules bien connues.

Remarques. 1. On a, dans cet exercice, utilisé la formule de Green-Riemann donnant l'aire délimitée par une courbe fermée, régulière, simple, paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t))$, et de longueur L :

$$\mathrm{A} = \int_0^{\mathrm{L}} x(t)y'(t)\mathrm{d}t.$$

Cette formule ne correspond pas tout à fait au théorème de Green-Riemann tel qu'on le connaît ; l'énoncé général affirme que, si Γ est une courbe plane simple, régulière, fermée, paramétrée par $t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe $\mathscr{C}^1$, alors l'aire délimitée par la courbe vaut

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{L}} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\mathrm{d}t.$$

Ici, la L-périodicité de x et de y et une intégration par parties permettent d'écrire :

$$\int_0^{\mathrm{L}} x(t)y'(t)\mathrm{d}t = \big[xy\big]_0^{\mathrm{L}} - \int_0^{\mathrm{L}} x'(t)y(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{\mathrm{L}} x'(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

D'où la formule de Green-Riemann dans le cas d'un paramétrage périodique.

2. Nous avons également évoqué le fait que composer le paramétrage de Γ par une abscisse curviligne permet de toujours nous ramener au cas d'un paramétrage *normal*[2]. Précisons.
Posons $f : [c,d] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ un paramétrage (L-périodique, donc) de notre courbe Γ, avec $f(c) = f(d)$ (on rappelle que Γ est supposée fermée).
Montrons d'abord que l'application

$$s : t \mapsto \int_c^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\,\mathrm{d}u$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[c,d]$ dans $[0,\mathrm{L}]$.
Par régularité (f' ne s'annule pas), la dérivée de s est $s' : t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \|f'(t)\| > 0$; de plus, $s(c) = 0$, et $s(d) = \mathrm{L}$, puisque l'on considère alors la longueur de toute la courbe. Finalement s est une application strictement croissante de $[c,d]$ dans $[0,\mathrm{L}]$, dérivable et de dérivée partout non nulle : c'est bien un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[c,d]$ dans $[0,\mathrm{L}]$.
Posons $g = f \circ s^{-1} : [0,\mathrm{L}] \to \mathbb{R}^2$; on a tout d'abord $g(0) = f(c) = f(d) = g(\mathrm{L})$, par définition de f et de s. Il suffit de vérifier de plus que la norme de g' vaut

2. On dit aussi que la courbe Γ est *paramétrée par longueur d'arc.*

uniformément 1, ce qui exprime que le paramétrage g est *normal*. Dérivons la relation $g = f \circ s^{-1}$:

$$g' = (f' \circ s^{-1}) \times \left(s^{-1}\right)' = (f' \circ s^{-1}) \times \frac{1}{s' \circ s^{-1}},$$

d'où en prenant la norme :

$$\|g'\| = \frac{\|f' \circ s^{-1}\|}{s' \circ s^{-1}} = \frac{\|f' \circ s^{-1}\|}{\|f'\| \circ s^{-1}} = 1.$$

Q.E.D.

Exercice 3 (Irrationalité de π)
Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre π est irrationnel. Pour ce faire, on va raisonner par l'absurde, en supposant que

$$\pi = \frac{a}{b},$$

où a et b sont des entiers naturels non nuls. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose également

$$\mathrm{P}_n(x) := \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} \mathrm{P}_n(x) \sin(x) \mathrm{d}x.$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est strictement positive.
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n = 0$.
3. Montrer que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_n^{(m)}(0)$ et $\mathrm{P}_n^{(m)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers.
4. En déduire, à l'aide d'une succession d'intégrations par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est un entier, puis conclure.

Soluce

1. Pour $x \in]0, \pi[$, $\mathrm{P}_n(x)$ et $\sin(x)$ sont strictement positifs. Ainsi, la fonction que l'on intègre est positive, non identiquement nulle et continue sur l'intervalle d'intégration ; on en déduit que son intégrale, I_n, est strictement positive.
2. Soit $x \in [0, \pi]$. On a
$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n \leqslant \frac{\pi^n a^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On en déduit que P_n tend bien vers 0 en l'infini, comme voulu.
3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que P_n est de degré $2n$; on en déduit que, pour tout $m \geqslant 2n$, $\mathrm{P}_n^{(m)} = 0$.
On a également $\mathrm{P}_n^{(m)}(0) = 0$ pour $m \leqslant n - 1$ puisque, en dérivant m fois, pour $0 \leqslant m \leqslant n - 1$, il va rester un facteur en x dans $\mathrm{P}_n^{(m)}(x)$.
Reste maintenant à étudier le cas où $n \leqslant m \leqslant 2n$. Fixons un tel m. Par la formule de Leibniz, on a
$$\mathrm{P}_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x^n)^{(k)}(0) ((a - bx)^n)^{(m-k)}(0).$$

En notant que $(x^n)^{(k)}(0) = 0$, sauf si $k = n$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n^{(m)}(0) &= \frac{1}{n!}\binom{m}{n} n!((a-bx)^n)^{(m-n)}(0) \\
&= \binom{m}{n}(-b)^{m-n}(a-bx)^{2n-m}(0)\frac{n!}{(2n-m)!} \\
&= \binom{m}{n}(-b)^{m-n}a^{2n-m}\frac{n!}{(2n-m)!}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathrm{P}_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}^*.$$

De même, calculons $\mathrm{P}_n(\frac{a}{b} - x)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n\left(\frac{a}{b} - x\right) &= \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b} - x\right)^n (bx)^n \\
&= \frac{1}{n!}(a-bx)^n x^n = \mathrm{P}_n(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{P}_n^{(m)}\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\mathrm{P}_n\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^{(m)}(0) = (\mathrm{P}_n(x))^{(m)}(0) = \mathrm{P}_n^{(m)}(0).$$

D'après ce qui précède, on a bien

$$\mathrm{P}_n^{(m)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}^*.$$

4. On utilise une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_0^\pi \mathrm{P}_n(x)\sin(x)\mathrm{d}t = [-\mathrm{P}_n(x)\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \mathrm{P}_n'(x)\cos(x)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{P}_n\left(\frac{a}{b}\right) + \mathrm{P}_n(0) + \int_0^\pi \mathrm{P}_n'(x)\cos(x)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On continue par une intégration par parties à l'intégrale $\int_0^\pi \mathrm{P}_n'(x)\cos(x)\mathrm{d}t$, et on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \mathrm{P}_n\left(\frac{a}{b}\right) + \mathrm{P}_n(0) + [\mathrm{P}_n'(x)\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \mathrm{P}_n''(x)\sin(x)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{P}_n\left(\frac{a}{b}\right) + \mathrm{P}_n(0) - \int_0^\pi \mathrm{P}_n''(x)\sin(x)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Et ainsi de suite. Une série d'intégrations par parties nous donne alors

$$\mathrm{I}_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\mathrm{P}_n^{(2k)}\left(\frac{a}{b}\right) + \mathrm{P}_n^{(2k)}(0)\right) + (-1)^n\int_0^\pi \mathrm{P}_n^{(2n)}(x)\sin(x)\mathrm{d}t.$$

Or, en faisant les calculs, on trouve que

$$\mathrm{P}_n^{(2n)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!}b^n(2n)!,$$

qui est entier. On en déduit bien que I_n est un entier. En particulier, on a $\mathrm{I}_n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question 1. Par suite, I_n ne peut tendre vers 0 lorsque n tend vers l'infini ; contradiction avec la question 2.
On a ainsi montré par l'absurde que π est un nombre irrationnel.

Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle I. Approximations

Exercice 4 (Théorème de Korovkin)
Soit $\mathrm{I} = [0,1]$ et $\mathrm{E} = \mathscr{C}(\mathrm{I})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I, à valeurs réelles. Pour $k \in \{0,1,2\}$ on note $e_k \in \mathrm{E}$ la fonction définie sur I par $e_k(x) = x^k$. Pour f dans E, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathrm{I}} \left|f(x)\right|$. On dit d'un endomorphisme (ou opérateur linéaire) u de E qu'il est positif lorsqu'il transforme toute fonction positive de E en une fonction positive.

1. Soit u un opérateur linéaire positif de E. Montrer que pour tout f dans E, $\left|u(f)\right| \leqslant u\big(|f|\big)$.
2. Soit f un élément de E.
   (a) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que si $(t,x) \in \mathrm{I}\times\mathrm{I}$ et $|t-x| \leqslant \eta$, alors $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   (b) En déduire, en faisant deux cas, selon si $|t-x| \leqslant \eta$ ou $|t-x| > \eta$, que :
$$\forall (t,x) \in \mathrm{I}\times\mathrm{I}, \quad |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2. \tag{3.1}$$
   (c) En déduire que :
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \left|f - f(x)e_0\right| \leqslant \varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0). \tag{3.2}$$
   (d) Soit u un opérateur linéaire positif de E. Montrer que :
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \left|u\big(f - f(x)e_0\big)\right| \leqslant \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\big(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2 u(e_0)\big). \tag{3.3}$$
3. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs linéaires positifs de E telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $\big(u_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(e_2) - 2e_1 u_n(e_1) + e_2 u_n(e_0)$$
   converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

(b) Montrer que pour tout f dans E, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathrm{I},\quad h_n(x) = \Big(u_n\big(f - f(x)e_0\big)\Big)(x)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

(c) Montrer que pour tout f dans E, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

Soluce

1. Notons d'abord que si f et g dans E sont tels que $f \geqslant g$, alors $f - g \geqslant 0$, donc $u(f-g) \geqslant 0$, c'est-à-dire $u(f) \geqslant u(g)$. L'application de u aux inégalités $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ donne alors $|u(f)| \leqslant u(|f|)$.
2. (a) La fonction f étant continue sur le segment I, elle y est, en vertu du théorème de Heine, uniformément continue ; il existe donc bien un réel $\eta > 0$ tel que si $(t,x) \in \mathrm{I}\times\mathrm{I}$ et $|t-x| \leqslant \eta$, alors $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

   (b) Soit maintenant $(t,x) \in \mathrm{I}\times\mathrm{I}$:
   — si $|t-x| \leqslant \eta$, alors $|f(t)-f(x)| \leqslant \varepsilon$;
   — si $|t-x| > \eta$, alors $\frac{(t-x)^2}{\eta^2} \geqslant 1$ et $|f(t)-f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty \leqslant 2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2$.
   Ainsi on a, dans les deux cas, la majoration :

   $$|f(t)-f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2.$$

   (c) L'inégalité (2) est une réécriture de l'inégalité (1) en termes de fonctions, en exonérant la formule de la variable t.

   (d) D'après les questions précédentes, on a :

   $$\begin{aligned}|u(f-f(x)e_0)| \leqslant u(|f-f(x)e_0|) &\leqslant u\left(\varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(e_2 - 2xe_1 + x^2e_0)\right)\\ &\leqslant \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0)\right).\end{aligned}$$

3. (a) Par l'inégalité triangulaire, on peut écrire

   $$\begin{aligned}\|g_n\|_\infty &\leqslant \|u_n(e_2)-e_2\|_\infty + \|2e_1u_n(e_1) - 2e_2\|_\infty + \|e_2u_n(e_0) - e_2\|_\infty\\ &\leqslant \|u_n(e_2)-e_2\|_\infty + 2\,\|e_1\|_\infty\,\|u_n(e_1)-e_1\|_\infty + \|e_2\|_\infty\,\|u_n(e_0)-e_0\|_\infty\end{aligned}$$

   Par hypothèse la quantité majorante tend vers 0, donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En récrivant l'inégalité (3) avec $u = u_n$, on obtient :

   $$\begin{aligned}|h_n(x)| &= \left|u_n(f-f(x)e_0)(x)\right|\\ &\leqslant \varepsilon u_n(e_0)(x) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}g_n(x)\end{aligned}$$

D'où l'on déduit : $\|h_n\|_\infty \leqslant \varepsilon \|u_n(e_0)\|_\infty + 2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2} \|g_n\|_\infty$. La quantité $\|u_n(e_0)\|_\infty$ étant bornée, disons par $\mathrm{M} > 0$ et puisque $2\dfrac{\|f\|_\infty}{\eta^2} \|g_n\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad \|h_n\|_\infty \leqslant (\mathrm{M}+1)\varepsilon$$

ce qui conclut à la convergence uniforme de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur I.

(c) Pour tout x dans I, on a :

$$u_n(f)(x) - f(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x) + f(x)u_n(e_0)(x) - f(x),$$

d'où par l'inégalité triangulaire, et compte tenu de $e_0 = 1$:

$$|u_n(f)(x) - f(x)| \leqslant |h_n(x)| + |f(x)| \cdot |u_n(e_0)(x) - e_0(x)|.$$

On en déduit $\|u_n(f) - f\|_\infty \leqslant \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty$. Le membre de droite de la dernière inégalité tendant vers 0 quand $n \to +\infty$, on en conclut que $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (c'est le théorème de Korovkin).

Remarque. Le théorème de Pavel Korovkin a de quoi décoiffer plus d'un analyste. Il s'agit d'un critère simple, puissant et étonnant, puisqu'il promet la convergence uniforme de la suite $(u_n(f))_n$ vers f, pour toute f continue sur un compact, à partir de trois cas des plus simples : $f(x) = 1, x, x^2$. Comme on peut s'en douter, il s'agit d'un théorème phare puissant dans la théorie de l'approximation qui se décline agréablement sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, et même dans les espaces métriques, voir [1].

Voici maintenant une application classique du théorème de Korovkin à une preuve constructive du théorème de Weierstrass.

Exercice 5 (Théorème de Weierstrass)
On garde les mêmes notations que l'exercice précédent. Nous allons déduire du puissant théorème de Korovkin, le célèbre théorème de Weierstrass. Pour tout entier n et tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $\mathrm{B}_{n,k}$ la fonction polynomiale définie sur I par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{B}_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

et B_n est l'opérateur linéaire (clairement) positif défini sur E par :

$$\mathrm{B}_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{B}_{n,k}$$

1. Vérifier que pour $j \in \{0,1,2\}$, la suite $\big(\mathrm{B}_n(e_j)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers e_j sur I.
2. En déduire que pour tout f dans E, la suite $\big(\mathrm{B}_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

3. Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $\mathrm{S} = [a, b]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace des fonctions continues sur S, à valeurs réelles, muni de la norme infinie.

Soluce

1. Pour commencer, on a pour tout n

$$\mathrm{B}_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} e_0\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{B}_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1 = e_0(x).$$

Ensuite, la formule d'absorption $\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ permet de vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{B}_n(e_1)(x) = \sum_{k=0}^{n} e_1\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{B}_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)} = x = e_1(x)$$

Enfin, en itérant la formule d'absorption, il vient $\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} = \frac{n-1}{n}\binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}$, et donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n(e_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} e_2\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{B}_{n,k}(x) = \frac{1}{n}x(1-x)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{1}{n}x(1-x)^{n-1} + \frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\qquad + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{1}{n}x(1-x)^{n-1} + \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}\left(x - x(1-x)^{n-1}\right) = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x\\
&= \left(e_2 + \frac{e_1 - e_2}{n}\right)(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{B}_n(e_0) = e_0$, $\mathrm{B}_n(e_1) = e_1$, et $\mathrm{B}_n(e_2) = e_2 + \frac{1}{n}(e_1 - e_2)$. Pour tout $j \in \{0, 1, 2\}$, $\mathrm{B}_n(e_j)$ converge donc uniformément vers e_j sur I.

2. Les résultats des questions précédentes permettent de conclure que la suite $(\mathrm{B}_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur I ; autrement dit, $\mathbb{R}[x]$ est dense dans $\mathscr{C}(\mathrm{I})$.

3. Soit maintenant $\mathrm{S} = [a, b]$ et f dans $\mathscr{C}(\mathrm{S})$. Si, pour $x \in [a, b]$, on pose $\varphi(x) = a + (b-a)x$ (φ est une fonction polynomiale ainsi que sa réciproque) et $g(x) = f(a + (b-a)x) = (f \circ \varphi)(x)$, alors g est dans $\mathscr{C}([0, 1])$. D'après ce qui précède, la suite $(\mathrm{B}_n(f \circ \varphi))_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $f \circ \varphi$ sur $[0, 1]$. Ainsi, la suite des fonctions polynomiales $(\mathrm{B}_n(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur S.

   En conclusion : $\mathbb{R}[x]$ est dense dans l'espace des fonctions continues sur S, à valeurs réelles, muni de la norme infinie (théorème de Weierstrass).

Remarque. Une variante du théorème de Korovkin adaptée aux fonctions polynomiales trigonométriques, et liée avec brio au noyau de Fejér, sera expliquée dans la remarque 26. Elle aboutit naturellement à une preuve éclairante du théorème de Weierstrass trigonométrique.

Remarque. Le théorème de Weierstrass dit que l'algèbre des fonctions polynomiales est dense dans l'algèbre des fonctions continues sur $[0,1]$. C'est beau de pouvoir imaginer que l'algèbre est omniprésente dans l'analyse ! Notons d'ailleurs une preuve probabiliste du théorème de Weierstrass, voir exercice 109 ; l'ubiquité du théorème de Weierstrass n'est plus à prouver !

Notons que le théorème de Weierstrass possède une généralisation incontournable : le théorème de Stone-Weierstrass, qui permet de remplacer l'algèbre des fonctions polynomiales par toute algèbre A de fonctions sur un compact possédant la propriété de forte séparabilité (si $x \neq y$, il existe f dans A tel que $f(x) \neq f(y)$ et il existe f tel que $f(x) \neq 0$). On peut montrer par exemple que l'algèbre des (fonctions) polynômes trigonométriques (polynômes en les fonctions sinus et cosinus) est dense dans l'espace des fonctions réelles telles que $f(x+2\pi) = f(x)$, voir aussi exercice 44.

Exercice 6 (Polynômes de Kantorovich)
Dans la lignée des deux exercices précédents, nous allons redémontrer le théorème de densité de Weierstrass, mais avec une autre famille de fonctions positives, appelées polynômes de Kantorovich. Pour tout entier n et tout entier k compris entre 0 et n, on rappelle que $\mathrm{B}_{n,k}$ est la fonction polynomiale définie sur I par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{B}_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

On note K_n est l'opérateur linéaire (clairement) positif défini sur E par :

$$\mathrm{K}_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \left[(n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\mathrm{d}t \right] \mathrm{B}_{n,k}$$

1. Vérifier que pour $j \in \{0,1,2\}$, la suite $\big(\mathrm{K}_n(e_j)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers e_j sur I.
2. En déduire que pour tout f dans E, la suite $\big(\mathrm{K}_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

Soluce

1. En utilisant les identités

$$(n+1)\left[\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - \left(\frac{k}{n+1}\right)\right] = 1,$$

$$\frac{n+1}{2}\left[\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2\right] = \frac{n}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\frac{n+1}{3}\left[\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^3 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^3\right] = \frac{n^2}{(n+1)^2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{3(n+1)^2}$$

On obtient, avec les notations des exercices précédents, que

$$\mathrm{K}_n(e_0) = \mathrm{B}_n(e_0) = e_0,\ \mathrm{K}_n(e_1) = \frac{n}{n+1}\mathrm{B}_n(e_1)+\frac{1}{2(n+1)}\mathrm{B}_n(e_0) = \frac{n}{n+1}e_1+\frac{1}{2(n+1)}e_0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_n(e_2) &= \frac{n^2}{(n+1)^2}\mathrm{B}_n(e_2) + \frac{n}{(n+1)^2}\mathrm{B}_n(e_1) + \frac{1}{3(n+1)^2}\mathrm{B}_n(e_0)\\ &= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2)}e_2 + \frac{2n}{(n+1)^2}e_1 + \frac{1}{3(n+1)^2)}e_0.\end{aligned}$$

La convergence uniforme voulue est assurée par ces formules.

2. Par le théorème de Korovkin, la suite $\big(\mathrm{K}_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, pour tout f de E.

Remarque. L'avantage des polynômes de Kantorovich sur ceux de Bernstein est qu'ils convergent plus finement que ces derniers. En effet, nous venons de voir que $\mathrm{K}_n(f)$ converge uniformément vers f. Il se trouve que la convergence est également valable pour la norme L^p, c'est-à-dire pour la norme $\left(\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$, des fonctions continues sur $[0,1]$, voir [1].

Chapitre 4

Fonctions d'une variable réelle II. Continuité, dérivabilité

Ce chapitre propose des exercices élémentaires et relativement originaux sur les homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et le théorème des accroissements finis.

Exercice 7 (remarques sur la monotonie)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

1. Que traduisent les assertions suivantes :
   (1) $\forall (x_1, x_2) \in \mathrm{I}^2, \quad x_1 \leqslant x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
   (2) $\forall (x_1, x_2) \in \mathrm{I}^2, \quad x_1 \leqslant x_2 \iff f(x_1) \leqslant f(x_2)$?
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f n'est pas monotone sur I ;
   (ii) $\exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{I}^3$, $x_1 < x_2 < x_3$ et $\big(f(x_1) - f(x_2)\big)\big(f(x_2) - f(x_3)\big) < 0$.
3. Déduire de la question précédente que si f est continue et injective, alors elle est monotone.

Soluce

1. L'assertion (1) signifie que f est croissante au sens large. Si l'assertion (2) est satisfaite, alors f est croissante au sens large et, pour tout couple (x_1, x_2), on a de plus : $f(x_1) \leqslant f(x_2) \Rightarrow x_1 \leqslant x_2$. Par contraposée, c'est équivalent à : $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$. Comme x_1 et x_2 sont quelconques, cela veut dire que f est *strictement* croissante.
2. Supposons (ii). Si $f(x_1) < f(x_2)$, f n'est pas décroissante ; alors, $f(x_2) > f(x_3)$ donc f n'est pas croissante non plus. Sinon, c'est que $f(x_1) > f(x_2)$, si bien que f n'est pas croissante ; alors, $f(x_2) < f(x_3)$ donc f n'est pas décroissante non plus.

   Réciproquement, supposons (i), c'est-à-dire que f n'est ni croissante, ni décroissante. Il existe $a < b$ et $c < d$ dans I tels que $f(a) > f(b)$ et $f(c) < f(d)$.

   Supposons tout d'abord $f(b) \leqslant f(c)$. Si $b \leqslant d$, on a $f(a) > f(b)$ et $f(b) \leqslant f(c) < f(d)$ donc on prend $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = d$. Sinon, c'est que $d < b$, [...]

   Le cas $f(b) > f(c)$ est analogue.

3. Soit f continue sur I, supposons f non monotone. Soient x_1, x_2 et x_3 comme dans l'assertion (ii). Supposons par exemple que $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leqslant \left|f(x_2) - f(x_3)\right|$: alors $f(x_1)$ est compris entre $f(x_2)$ et $f(x_3)$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x_1)$ admet un autre antécédent que x_1 dans l'intervalle $[x_2, x_3]$.

Les trois exercices suivent nous ont été communiqués par Jean-Claude SIKORAV.

Exercice 8 (homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$)
On se propose de montrer ici quelques propriétés élémentaires des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ (sous-entendu : sur $\mathbb{R}$). On rappelle la question 3 de l'exercice 7 qu'un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ est soit strictement croissant, soit strictement décroissant.

1. Montrer que si f est un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$, alors, pour tout x réel, la suite $\left(f^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, vers $-\infty$ ou vers un point fixe de f.
2. Montrer que si f est un homéomorphisme strictement décroissant de $\mathbb{R}$, alors f possède un unique point fixe.
3. Montrer que si f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ et si a, b sont deux points fixes consécutifs (pas de point fixe dans $]a,b[$), alors la suite $\left(f^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a ou b si $x \in]a,b[$. En déduire un résultat analogue pour la suite $\left(f^{-n}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soluce

1. On fixe le réel x. Pour tout n, notons $u_n = f^n(x)$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$. Posons $h := f(x) - x = u_1 - u_0$. Comme f est strictement croissante, f respecte les inégalités, donc, par récurrence, la suite $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ est de signe constant – celui de h – si bien que la suite (u_n) est monotone. Plus précisément, elle est strictement croissante, resp. strictement décroissante, resp. constante, si $h > 0$, resp. $h < 0$, resp. $h = 0$.

   Si la suite est bornée, alors, elle converge vers une limite ℓ qui, par continuité de f, est solution de $f(\ell) = \ell$. Si elle ne l'est pas, alors, elle est strictement monotone et non bornée ; elle tend vers $+\infty$, vers $-\infty$.
2. Si f est un homéomorphisme strictement décroissant, alors f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$. De plus, l'application $x \mapsto f(x) - x$ est une application continue strictement décroissante, et a également pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend la valeur 0. Cela prouve l'existence d'un point fixe, forcément unique par stricte décroissance.
3. Comme f possède au moins deux points fixes, f ne peut être strictement décroissante, et donc, les hypothèses impliquent qu'elle est strictement croissante. Si x vérifie $a < x < b$, alors $a = f(a) < f(x) < f(b) = b$, ce qui implique que f stabilise $]a,b[$. Par une récurrence immédiate, on montre que $f^n(x)$ est compris entre a et b pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   La suite $(f^n(x))_n$ est donc monotone, de sens de variation donné par $h := f(x) - x$. Comme x ne peut être un point fixe par hypothèses, h est non nul et donc la suite $(f^n(x))_n$ est strictement monotone. Cette fois-ci, elle est bornée et elle possède ainsi une limite ℓ dans le fermé $[a,b]$. Cette limite ℓ est forcément un point fixe par continuité de f, et donc ℓ vaut a ou b. La dernière assertion s'obtient en remplaçant f par f^{-1}, qui est également un homéomorphisme ayant a et b pour points fixes, et sans point fixe entre les deux.

Exercice 9 (Homéomorphisme ? Dites-le avec des groupes ! (1))
Soit G le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ (dans lui-même) pour la loi $\circ$. Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce groupe.

1. Soit G^+ l'ensemble des homéomorphismes (strictement) croissants dans G. Montrer que G^+ est un sous-groupe distingué d'indice 2 de G.
2. Soit f un élément d'ordre fini de G. Montrer que si $f \in \mathrm{G}^+$, alors f est l'identité, et que si $f \notin \mathrm{G}^+$, f est d'ordre 2.
3. Montrer que les éléments d'ordre 2 forment une seule classe de conjugaison dans G.

Soluce

1. Soit σ l'application de G dans le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ qui envoie f sur 1, resp. -1, si f est croissante, resp. décroissante. La règle des sens de variations (par exemple la composée d'un décroissant par un décroissant est un croissant [1]...) implique que l'application σ est un morphisme de groupes. Comme l'identité Id de $\mathbb{R}$ est croissante et que $-\mathrm{Id}$ est décroissante, σ est surjective. Le noyau de σ est donc un sous-groupe distingué d'indice 2 de G qui n'est rien d'autre que G^+.
2. On fixe dans un premier temps un homéomorphisme f strictement croissant d'ordre fini. Supposons, par l'absurde, que f n'est pas l'identité, et fixons un réel x tel que $f(x) \neq x$. D'après la question 1 de l'exercice 8, la suite $(f^n(x))_n$ est monotone, et ce, strictement, car $f(x) - x \neq 0$. Quitte à changer f en f^{-1}, on peut supposer que $f(x) > x$, et donc que notre suite est strictement croissante. Supposons $f^d = \mathrm{Id}$, avec $d > 0$. Il vient
$$x = f^d(x) > f^{d-1}(x) > \cdots > f(x) > x,$$
d'où l'absurdité.
Montrons la seconde assertion. Si f n'est pas dans G^+, alors f^2 est dans G^+, et, comme f est d'ordre fini d, f^2 est également d'ordre fini (qui, au passage divise d). Par l'étude précédente, $f^2 = \mathrm{Id}$. Et comme $f \neq \mathrm{Id}$, puisque f est décroissante, il résulte que f est bien d'ordre 2.
3. On veut montrer que deux éléments d'ordre 2 sont conjugués. On peut remarquer que $\iota(x) = -x$ fournit un homéomorphisme d'ordre 2 de $\mathbb{R}$ et il suffit maintenant, par transitivité, de montrer que tout homéomorphisme f d'ordre 2 est conjugué à ι. Dit autrement, nous voulons construire un homéomorphisme φ tel que $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = \iota$, ce qui revient à dire que pour tout réel x, $\varphi(-x) = f(\varphi(x))$.

1. Miam !

On fixe f d'ordre 2 et on note, par ce qui précède, que f est décroissante. On en déduit par la question 2 de l'exercice 8, que f possède un unique point fixe ℓ. On construit alors, pour commencer, l'homéomorphisme φ_0 de $[0,+\infty[$ sur $[\ell,+\infty[$, qui envoie x sur $\varphi_0(x) = x + \ell$. On pose alors $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ si $x \geqslant 0$ et $\varphi(x) = f(\varphi_0(-x))$ si $x < 0$.

Montrons que l'on a bien $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = \iota$, c'est-à-dire $\varphi(-x) = f(\varphi(x))$ pour tout réel x. Si $x > 0$, l'égalité est vraie par construction, puisque dans ce cas, $\varphi(-x) = f(\varphi_0(x)) = f(\varphi(x))$. Si x est négatif, alors, comme f est d'ordre 2,

$$f(\varphi(x)) = f(f(\varphi_0(-x))) = \varphi_0(-x) = \varphi(-x).$$

Il reste à montrer que φ est un homéomorphisme strictement croissant.

Continuité : il est clair que φ est continue sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$. Il faut alors montrer que les limites à gauche et à droite en 0 coïncident. Or, en 0^+ la limite de φ est $\varphi_0(0) = \ell$. En 0^-, elle vaut, par continuité de f, $f(\varphi_0(0)) = f(\ell) = \ell$.

Stricte croissance : φ_0 est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, et donc φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Sur $]-\infty;0]$, on note que la formule $\varphi(-x) = f(\varphi_0(x))$ reste valable en 0 (par invariance de ℓ), et donc sur le fermé $]-\infty,0]$. Supposons alors $x < y < 0$, ce qui donne $0 < -y < -x$. Comme f est décroissante et φ_0 croissante :

$$\varphi(x) = f(\varphi_0(-x)) < f(\varphi_0(-y)) = \varphi(y).$$

Comme φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et $]-\infty,0]$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Surjectivité : On voit que, en l'infini, φ_0 tend vers l'infini, et il en est donc de même de φ. Comme f est un homéomorphisme décroissant, sa limite en $+\infty$ est $-\infty$, et on en déduit que la limite de φ en $-\infty$ est $+\infty$. La surjectivité sur $\mathbb{R}$ provient alors de la continuité et du théorème des valeurs intermédiaires.

Homéomorphisme : comme φ est strictement croissante, elle est injective, et comme elle est surjective, c'est une bijection. Elle possède donc une bijection inverse, également bijective et de plus, strictement croissante, on sait alors qu'elle est continue.

Remarque. Le groupe G n'a donc pas de sous-groupes finis d'ordre $n > 2$. On peut noter que les homéomorphismes de $\mathbb{C}$ possèdent, quant à eux, des homéomorphismes de tout ordre n : il suffit de choisir une racine primitive n-ième de l'unité ω et de considérer l'application $z \mapsto \omega z$ de $\mathbb{C}$. De même le groupe des homéomorphismes du cercle contient des sous-groupes de tout ordre.

Exercice 10 (Homéomorphisme ? Dites-le avec des groupes ! (2))
On adopte les mêmes notations que dans l'exercice précédent. On veut étudier les classes de conjugaisons du groupe G des homéomorphismes de $\mathbb{R}$. On veut montrer que les homéomorphismes de G sans point fixe forment une seule classe de conjugaison de G et deux classes dans G^+. Plus précisément, fixons $f_1(x) = x + 1$, et $f_{-1}(x) = x - 1$. Alors, I) pour tout f de G sans point fixe, il existe $\varphi \in G$, tel que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = f_1$, et II) pour tout f de G sans point fixe, il existe $\varphi \in G^+$, tel que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = f_{\pm 1}$.

1. Montrer que si f est dans G sans point fixe, alors $f \in \mathrm{G}^+$. On supposera dans la suite f dans G sans point fixe, donc strictement croissante.
2. Montrer que l'on peut prouver I) et II) en se ramenant au cas où $f(0) > 0$.
3. On suppose donc par la suite que $f(0) > 0$. Soit φ_0 l'homéomorphisme de $[0,1[$ sur $[0, f(0)[$ qui envoie x sur $f(0)x$. Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que
$$\varphi(x) = f^n\left(\varphi_0(x-n)\right), \text{ avec } n := \lfloor x \rfloor.$$
Montrer que φ est bien définie et continue sur chaque intervalle $[m, m+1[$, $m \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante.
5. Montrer enfin que φ est un homéomorphisme et conclure.

Soluce

1. Cela découle directement de la question 2 de l'exercice 8.
2. Supposons que I) et II) sont vraies pour dans le cas où $f(0) > 0$. Montrons alors le cas général. Comme $f(0) \neq 0$, vu que f ne possède pas de point fixe, il ne reste qu'à étudier le cas où $f(0) < 0$. Soit ι défini sur $\mathbb{R}$ par $\iota(x) = -x$. Soit $g := \iota \circ f \circ \iota^{-1}$, c'est-à-dire $g(x) = -f(-x)$. Si par l'absurde, $g(x) = x$, on aurait $f(-x) = -x$, ce qui est impossible car f n'a pas de point fixe. Conclusion g n'a pas de point fixe et de plus, $g(0) = -f(0) > 0$. On en déduit par I), valable pour g, qu'il existe $\varphi \in \mathrm{G}$, tel que $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = f_1$, et donc $(\varphi \circ \iota) \circ f \circ (\varphi \circ \iota)^{-1} = f_1$. On a montré que I) est valable pour f.
On déduit de II), valable pour g, qu'il existe $\varphi \in \mathrm{G}^+$ tel que $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = f_{\pm 1}$ et donc $(\varphi \circ \iota) \circ f \circ (\varphi \circ \iota)^{-1} = f_{\pm 1}$. Or, $\iota \circ f_{\pm 1} \circ \iota^{-1} = f_{\mp 1}$. On obtient alors
$$(\iota^{-1} \circ \varphi \circ \iota) \circ f \circ (\iota^{-1} \circ \varphi \circ \iota)^{-1} = \iota^{-1} \circ f_{\pm 1} \circ \iota = f_{\mp 1}.$$
Ceci prouve II) pour f vu que $\iota^{-1} \circ \varphi \circ \iota \in \mathrm{G}^+$ car G^+ est distingué (ou si on préfère, par la règle des variations).
3. Pour tout réel x, on a $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$, et donc $\varphi_0(x-n)$ est bien définie, ce qui implique que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Sur l'intervalle $[m, m+1[$, on a $\varphi(x) = f^m(x-m)$. Comme $x \mapsto x - m$ est continue sur $[m, m+1[$, et que f^m est continue (même pour $m < 0$ puisque f est un homéomorphisme), on a bien la continuité voulue.
4. Comme f est continu et que $\lim_{0^+} \varphi_0 = 0$ et $\lim_{1^-} \varphi_0 = f(0)$, on a :
$$\lim_{t \to 1^-} \varphi(n+t) = \lim_{t \to 1^-} f^n\big(\varphi_0(t)\big) = f^n\big(f(0)\big) = f^{n+1}(0) \ ;$$
$$\lim_{t \to 0^+} \varphi(n+1+t) = \lim_{t \to 0^+} f^{n+1}\big(\varphi_0(t)\big) = f^{n+1}(0).$$
Ainsi, φ est continu en chaque entier n ($n \in \mathbb{Z}$).
Par construction, φ est strictement croissant sur $[0,1[$ et donc sur $[n, n+1[$ pour tout entier n puisque f l'est aussi. Par continuité, $\varphi(x) = f^n(x-n)$ sur l'intervalle fermé $[n, n+1]$. Ainsi, φ est croissant sur chaque intervalle fermé $[n, n+1]$ et donc sur $\mathbb{R}$ entier.

5. Pour montrer que φ est un homéomorphisme, il suffit de voir qu'il est surjectif. En effet, comme il est strictement croissant, il est injectif, et ainsi, la surjectivité impliquera la bijectivité. Comme l'inverse de φ strictement croissant et surjectif, on saura qu'il est également continu.

   Montrons donc la surjectivité de φ.

   Par la question 1 de l'exercice 8, et vu que f n'a pas de point fixe, on obtient qu'à t fixé dans $[0,1[$,

   $$\lim_{n\to+\infty} f^n\varphi(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f^{-n}\varphi(t) = -\infty.$$

   On a donc $\varphi(n+t) = f^n\varphi_0(t)$ tend vers l'infini avec n, et de même pour $\varphi(-n+t) = f^{-n}\varphi_0(t)$. Comme φ est strictement croissante, continue et non bornée, le théorème des valeurs intermédiaires assure que la fonction φ est surjective.

   Reste à montrer que I) et II) sont vrais pour f. Maintenant que l'on sait que φ est un homéomorphisme de G^+, il suffit de voir que $\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi = f_1$, ce qui prouvera I) et II) par la même occasion, puisque φ est croissante [2]. Pour tout x, en posant $n = \lfloor x\rfloor$, on obtient bien

   $$\varphi(x+1) = f^{n+1}(\varphi_0(x+1-n-1)) = f\left(f^n(\varphi_0(x-n))\right) = f\left(\varphi(x)\right).$$

   On ne peut pas vraiment quitter sereinement cette correction sans avoir prouvé que f_1 et f_{-1} sont dans des classes de conjugaison distinctes de G^+. Supposons par l'absurde que ce soit le cas : il existerait un homéomorphisme croissant ψ tel que $\psi^{-1}\circ f_1\circ\psi = f_{-1}$, c'est-à-dire : $\psi(x)+1 = \psi(x-1)$. En particulier $\psi(1) = \psi(0)-1 < \psi(0)$, ce qui est absurde car ψ est supposée croissante.

Remarque. Si le lecteur n'apprécie pas la façon dont l'homéomorphisme φ a été parachuté, voici une analyse du problème.

Supposons qu'il existe φ tel que $\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi = f_1$. De $f\circ\varphi = \varphi\circ f_1$, on tire pour tout x :

$$f\big(\varphi(x)\big) = \varphi(x+1).$$

On en déduit que $\varphi(x+2) = f\big(\varphi(x+1)\big) = f^2\big(\varphi(x)\big)$. Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, il vient : $\varphi(x+n) = f^n\big(\varphi(x)\big)$.

En remplaçant x par $x-1$, on trouve : $f\big(\varphi(x-1)\big) = \varphi(x)$. En composant par l'homéomorphisme réciproque f^{-1}, il vient : $\varphi(x-1) = f^{-1}\big(\varphi(x)\big)$ pour tout x. Une nouvelle récurrence immédiate permet de conclure :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi(x+n) = f^n\big(\varphi(x)\big).$$

En particulier, $\varphi(1) = f\big(\varphi(0)\big)$. Nous ne semblons pas avoir d'autre contrainte sur φ sur $[0,1]$ mais cette équation détermine φ ailleurs. En effet, pour x réel quelconque, posons $n = \lfloor x\rfloor$ et $t = x-n$, alors on connaît $\varphi(x) = \varphi(t+n) = f^n\big(\varphi(t)\big)$.

---

2. On voit que le fait que $f(0) > 0$ implique que f est dans la classe de conjugaison de f_1 pour G^+ et pas dans celle de f_{-1}.

Exercice 11 (signe de la dérivée et variations)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f' \geqslant 0$ sur $[a, b]$. On veut montrer que f est croissante par un procédé de dichotomie, sans utiliser le théorème des accroissements finis.

1. Rappeler la preuve en une ligne qui utilise le théorème des accroissements finis...
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes ayant pour limite commune c. On suppose que $a_n < b_n$ pour tout n. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(c).$$
3. On suppose qu'il existe deux points a_0 et b_0 de $[a, b]$ tels que $a_0 < b_0$ et $f(a_0) > f(b_0)$. Construire deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que $a_n < b_n$ et
$$\frac{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} \leqslant \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} < 0$$
pour tout n. Que dire de $f'(c)$ lorsque c est leur limite commune ?
4. On suppose que f' est positive ou nulle. Montrer que f est strictement croissante.

Remarque. Cet exercice est adapté d'un document de Jean-François Burnol et de l'article [2] d'Antoine Delcroix et Christian Silvy, qui énoncent le lemme très utile de la question 2, avec une amélioration due à Nicolas Ressayre.

Soluce

1. Si $x < y$, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \leqslant 0$.
2. Si $a_n = c$ ou si $b_n = c$ à partir d'un certain rang, l'égalité est évidente. Sinon, $a_n < c < b_n$ pour tout n et :
$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{b_n - c}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + \frac{c - a_n}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c}.$$
NB : C'est une combinaison barycentrique de $\beta_n = \frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c}$ et $\alpha_n = \frac{f(a_n)-f(c)}{a_n-c}$: en effet, $\lambda_n = \frac{b_n-c}{b_n-a_n}$ et $\mu_n = \frac{c-a_n}{b_n-a_n}$ sont positifs et leur somme vaut 1. Cela signifie que $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ est compris entre β_n et α_n pour tout n, ce qui permet de conclure. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, on a : $|\beta_n - f'(c)| \leqslant \varepsilon$ et $|\alpha_n - f'(c)| \leqslant \varepsilon$, d'où :
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(c)\right| &= \left|\frac{b_n - c}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + \frac{c - a_n}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c} - f'(c)\right| \\ &= \left|\mu_n\beta_n + \lambda_n\alpha_n - (\lambda_n + \mu_n)f'(c)\right| \\ &\leqslant \lambda\left|\beta_n - f'(c)\right| + \mu\left|\alpha_n - f'(c)\right| \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

3. On a déjà a_0 et b_0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir construit des suites finies $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telles que $b_k - a_k = (b_0 - a_0)/2^k$ pour tout $k \leqslant n$ et $\frac{f(b_{k+1})-f(a_{k+1})}{b_{k+1}-a_{k+1}} \leqslant \frac{f(b_k)-f(a_k)}{b_k-a_k}$ pour tout $k \leqslant n-1$. Posons $c_n = (a_n + b_n)/2$. Remarquons grâce à la figure 4.1 que :
   — si $f(c_n) \geqslant \dfrac{f(a_n)+f(b_n)}{2}$, alors $\dfrac{f(b_n)-f(c_n)}{b_n-c_n} \leqslant \dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$;
   — si $f(c_n) < \dfrac{f(a_n)+f(b_n)}{2}$, alors $\dfrac{f(c_n)-f(a_n)}{c_n-a_n} < \dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$;
   Dans le premier cas, on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, b_n)$; dans le deuxième, on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n)$. Ceci termine la construction des suites par récurrence, elles sont adjacentes.

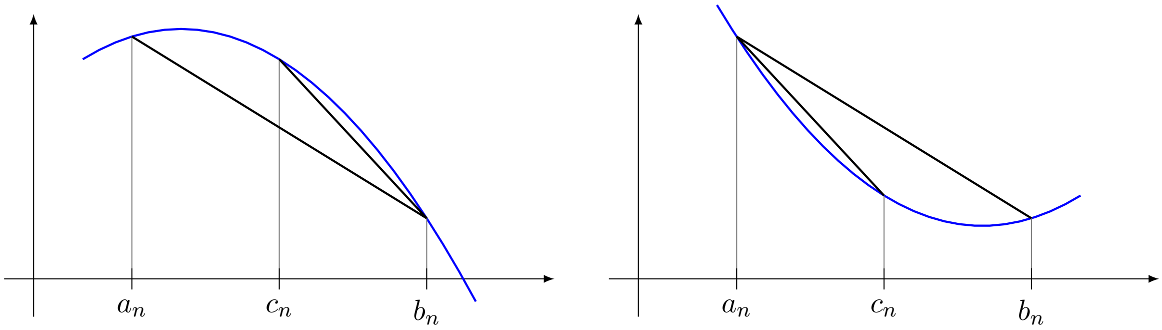


FIGURE 4.1 – Choix d'une pente plus petite (attention au signe)

   Soit c la limite commune des suites (a_n) et (b_n). Comme
$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} \leqslant \frac{f(b_0)-f(a_0)}{b_0-a_0} < 0$$
   pour tout n, on a d'après la question 2 : $f'(c) < 0$.
4. On a montré que s'il existe a_0 et b_0 tels que $a_0 < b_0$ et $f(a_0) > f(b_0)$, c'est-à-dire si f n'est pas croissante, alors il existe c tel que $f'(c) < 0$, c'est-à-dire que f' prend une valeur strictement négative. La contraposée de cette implication s'écrit : si f' est positive ou nulle, alors f est croissante au sens large.

Exercice 12 (théorèmes de Rolle et des accroissements finis)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. À partir de la question 3, on suppose que f est dérivable sur $]a,b[$.
1. (a) Démontrer qu'il existe un segment non réduit à un point $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tel que $f(\alpha) = f(\beta)$ et $\beta - \alpha = (b-a)/2$.
   (b) En déduire qu'il existe un segment non réduit à un point $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ tel que $f(\alpha) = f(\beta)$ et $\beta - \alpha \leqslant (b-a)/2$.
2. Construire deux suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ et $(b_n - a_n) \leqslant (b-a)/2^n$ et $f(a_n) = f(b_n)$ pour tout n.
3. Démontrer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
   On pourra utiliser la question 2 de l'exercice 11.
4. En déduire (classiquement) le théorème des accroissements finis.

Remarque. Cet exercice est adapté de [8] et [2].

Soluce

1. (a) Notons $c = (a+b)/2$. La fonction $g : [a,c] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f\big(x+(b-a)/2\big) - f(x)$ prend les valeurs $g(a) = f(c) - f(a)$ et $g(c) = f(b) - f(c) = -g(a)$. Elle s'annule donc en un point $\alpha \in \big[a, a+(b-a)/2\big]$, il n'y a plus qu'à prendre $\beta = \alpha + (b-a)/2$.

   (b) Si l'intervalle construit dans le point précédent est inclus dans $]a,b[$, c'est gagné. Sinon, c'est que $\alpha = a$ et $\beta = c$. On applique le point précédent à $[a,c]$: on obtient un intervalle $[\alpha', \beta'] \subset [a,c]$, de longueur $(b-a)/4$, tel que $f(\alpha') = f(\beta')$. Si $a < \alpha'$, le segment $[\alpha', \beta']$ convient. Sinon, $a = \alpha'$ et $\beta' = (a+c)/2$ et le segment $[\beta', c]$ convient.

2. Pour (a_0, b_0), on prend le couple (α, β) construit dans la question précédente. Puis on applique inductivement ladite question à l'intervalle $[a_n, b_n]$ pour construire (a_{n+1}, b_{n+1}).

3. Soit c la limite commune des suites (a_n) et (b_n) que l'on vient de construire – elle appartient à $]a,b[$. D'après la question 2 de l'exercice 11, on a :

$$f'(c) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{b_n - a_n} = 0.$$

4. Ce passage est standard. Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On veut montrer qu'il existe alors c dans $]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. On choisit un réel M pour que la fonction g sur $[a,b]$ par

$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) = f(x) - \mathrm{M}(x-a)$$

satisfasse aux hypothèses du théorème de Rolle, c'est-à-dire $g(a) = g(b)$ (les autres sont vérifiées). Cela donne $\mathrm{M}(b-a) = f(b) - f(a)$. On constate alors qu'en un point c pour lequel $g'(c) = 0$, on a bien $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Chapitre 5

Suites réelles et complexes

5.1 Suites réelles

Exercice 13 (Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On pose :

$$\mathrm{H} = \{x \in \mathrm{G};\, x > 0\}$$

1. Montrer que H est non vide.
2. Soit a la borne inférieure de H.
   (i) Justifier que a existe, et est positif.
   On considère maintenant les cas $a = 0$ et $a > 0$.
   (ii) Montrer que, si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
   (iii) Montrer que si $a > 0$, alors $\mathrm{G} = a\mathbb{Z}$.
3. Montrer que, si u et v sont deux réels nons nuls tels que $\frac{u}{v}$ soit irrationnel, alors, $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'ensemble
$$\mathrm{C} := \{\cos(n);\ n \in \mathbb{N}\}$$
est dense dans $[-1, 1]$.

Soluce

1. Le groupe G n'étant pas réduit à $\{0\}$, il existe un réel non nul x_0 appartenant à G. Deux cas se présentent :
   — soit $x_0 > 0$, et dans ce cas $x_0 \in \mathrm{H}$;
   — soit $x_0 < 0$, et alors, comme $x_0 \in \mathrm{G}$, on a en particulier $-x_0 \in \mathrm{H}$.
   Ainsi, H n'est pas vide.
2. (i) On rappelle que la borne inférieure a de H est caractérisée par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathrm{H},\ \ x \geqslant a\ ; \\ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists x \in \mathrm{H},\ \ x < a + \varepsilon. \end{cases}$$

(ii) Comme H est non vide et minoré, donc possède une borne inférieure, notée a. De plus, comme 0 est un minorant, par définition d'une borne inférieure, on en déduit que a est positif ou nul.

(iii) Supposons donc que $a = 0$. L'objectif est de montrer que, pour tous réels α et β tels que $\alpha < \beta$, on a $\mathrm{G} \cap]\alpha, \beta[\neq \varnothing$.

Puisque a est nul, en utilisant la caractérisation de la borne inférieure rappelée ci-dessus, avec $\varepsilon = \beta - \alpha$, il existe $g \in \mathrm{H}$ tel que $0 < g < \beta - \alpha$. On va donc chercher un élément de $\mathrm{G} \cap]\alpha, \beta[$ sous la forme ng, où $n \in \mathbb{Z}$.

Posons
$$n = \lfloor \frac{\alpha}{g} \rfloor + 1$$
Dans ce cas, on a
$$\lfloor \frac{\alpha}{g} \rfloor \leqslant \frac{\alpha}{g} < \lfloor \frac{\alpha}{g} \rfloor + 1,$$
ce qui implique
$$\frac{\alpha}{g} < n \leqslant \frac{\alpha}{g} + 1.$$
On a donc bien dans ce cas, en utilisant l'inégalité qui précède,
$$\alpha < ng \leqslant \alpha + g < \alpha + \beta - \alpha = \beta.$$
Ainsi, on a bien $ng \in \mathrm{G} \cap]\alpha, \beta[$. On en déduit que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(iv) Supposons que $a > 0$. Nous allons montrer que $a \in \mathrm{H}$. Supposons donc, par l'absurde, que $a \notin \mathrm{H}$. La caractérisation de la borne inférieure donne alors
$$\exists g_1 \in \mathrm{H};\ a < g_1 < 2a.$$
En appliquant de nouveau cette caractérisation,
$$\exists g_2 \in \mathrm{H};\ a < g_2 < g_1.$$
On en déduit que $g_1 - g_2 \in \mathrm{H}$, avec $g_1 - g_2 < a$, ce qui est absurde. Conclusion, $a \in \mathrm{H}$, et G étant un groupe, on a donc $a\mathbb{Z} \subset \mathrm{G}$.

Réciproquement, considérons $g \in \mathrm{G}$ et déterminons un entier n et un réel r tels que :
$$\begin{cases} g = na + r \\ 0 \leqslant r < a. \end{cases}$$
Remarquons que l'entier $n = \lfloor \frac{g}{a} \rfloor$, et le réel $r = g - na$ satisfont à ces conditions.

De plus, puisque G est un groupe, on a $r \in \mathrm{G}$. Or, $0 \leqslant r < a$, ce qui implique, par minimalité de a, que $r = 0$. Par suite, que $g = na$, et donc, $\mathrm{G} \subset a\mathbb{Z}$.

En conclusion, on obtient l'égalité $\mathrm{G} = a\mathbb{Z}$.

3. Soit deux réels u et v non nuls tels que $\frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}$. Notons tout d'abord que $u\mathbb{Z}+v\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Si ce sous-groupe n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, alors il exite $a > 0$ tel que $u\mathbb{Z}+v\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, d'après la question précédente.

   Or, comme u et v appartiennent à $u\mathbb{Z}+v\mathbb{Z}$, il existe deux entiers non nuls p, q tels que $u = pa$, et $v = qa$, ce qui entraîne que
$$\frac{u}{v} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$
   On a ainsi montré par l'absurde que, si $\frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}$, alors $u\mathbb{Z}+v\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soit $x \in [-1,1]$; alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$.

   Par la question précédente, le groupe $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe alors une suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$, de la forme $p_n+2\pi q_n$, avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, qui converge vers θ. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\cos(\theta_n) = \cos(p_n + 2\pi q_n) = \cos(p_n) = \cos(|p_n|).$$
   Par continuité de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to+\infty} \cos(\theta_n) = \cos(\theta) = x.$$
   Autrement dit,
$$\lim_{n\to+\infty} \cos(|p_n|) = x.$$
   Il existe donc bien une suite d'éléments de C qui converge vers x, et ceci est valable pour tout $x \in [-1,1]$.

   Ainsi, l'ensemble C est bien dense dans $[-1,1]$.

Remarque. Il faut noter les similitudes existantes entre le cas où, dans cet exercice, un sous-groupe de $\mathbb{R}$ peut être de la forme $a\mathbb{Z}$, et la preuve qui consiste à montrer que $\mathbb{Z}$ est euclidien, donc principal : dans les deux cas, l'argument-clef est la division euclidienne. La différence repose sur l'aspect continu de $\mathbb{R}$, qui permet une alternative dans $\mathbb{R}$: les sous-groupes denses.

Exemple (Les tutos du père Castor).

Voici un exemple de question que s'est posée notre ami Antoine Boivin, mais qui pourrait très bien devenir une question de jury : trouver deux entiers n et m tels que
$$\pi < n + m\sqrt{2} < \pi + 0,2.$$
En effet, n et m existent puisque $\sqrt{2}$ et 1 ne sont pas commensurables.

Soit $\mathrm{G} := \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{2}$. Comme $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, on voit que $0 < 10\sqrt{2} - 14 < 0,2$. On pose donc $g := 10\sqrt{2} - 14 \in \mathrm{G}$, et on trouve à la calculette $\lfloor \frac{\pi}{g} \rfloor = 22$. On a alors
$$\lfloor \frac{\pi}{g} \rfloor \leqslant \frac{\pi}{g} < \lfloor \frac{\pi}{g} \rfloor + 1 \Longrightarrow \lfloor \frac{\pi}{g} \rfloor g \leqslant \pi < \lfloor \frac{\pi}{g} \rfloor g + g,$$
en particulier $(\lfloor \frac{\pi}{g} \rfloor g + g) - \pi \leqslant g < 0,2$, d'où l'on déduit
$$\pi \leqslant \lfloor \frac{\pi}{g} \rfloor g + g = 23g = 230\sqrt{2} - 322 < \pi + 0,2.$$

Signalons que la base 10, trop arbitraire, n'est pas satisfaisante pour obtenir de telles approximations. On peut utiliser la suite $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, avec $x_0 = 2$, voir section 11.1.1, pour obtenir une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$. Il suffit par exemple de prendre, $x_3 = \frac{577}{408}$, pour avoir une bonne précision : $0 < g := 577 - 408\sqrt{2} < 10^{-3}$.

Une méthode générale efficace consiste à partir d'une approximation de α (ici, $\sqrt{2}$) par représentation en fraction continue...

Exercice 14 (Étude de la suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$)
On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite de cette suite, d'en trouver un équivalent en l'infini, puis d'en donner un développement asymptotique à deux termes.

Dans la suite, on note I l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
2. Montrer l'équivalence en l'infini suivante :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$
3. Enfin, donner un développement asymptotique à deux termes de la suite (u_n).

Soluce

1. On part de l'égalité suivante, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\sin(x)| \leqslant |x|.$$
Comme, de plus, la suite u_n reste positive, cela implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$
La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est alors décroissante, minorée par 0 ; elle est donc convergente. Notons $\ell \in \bar{\mathrm{I}}$ sa limite. Or, par continuité de la fonction sinus, en passant à la limite dans la formule de définition de la suite par récurrence, on obtient :
$$\ell = \sin(\ell).$$
Or, la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et s'annule en 0 ; cela implique que 0 est la seule solution de l'équation $\sin(x) = x$. D'où :
$$\ell = 0.$$
Ainsi, la suite (u_n) converge bien vers 0.

2. Avant de nous lancer dans la résolution, détaillons la démarche à suivre. Le théorème-clef va être le théorème de Cesaro. Le début du raisonnement consiste à trouver un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{A} \in \mathbb{R}^*.$$

Par le théorème de Cesaro, cela implique :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^{\alpha} - u_k^{\alpha}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{A},$$

ce qui, par télescopage, s'écrit :

$$\frac{1}{n}u_n^{\alpha} - \frac{1}{n}u_0^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{A},$$

soit encore

$$\frac{1}{n}u_n^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{A}.$$

On pourra alors écrire l'équivalent : $u_n^{\alpha} \sim \mathrm{A}n$.

Lançons-nous donc à la recherche d'un tel α. Pour la suite, fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour trouver un réel qui convient, écrivons un développement limité de u_{n+1}^{α}, en examinant à quelle condition l'élément $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ peut tendre vers une constante. Fixons donc pour l'instant $\alpha \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules classiques de développements limités au voisinage de 0, on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{\alpha} &= (\sin(u_n))^{\alpha} = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^{\alpha} \\ &= u_n^{\alpha}\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^{\alpha} = u_n^{\alpha}\left(1 - \alpha\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right). \end{aligned}$$

On a donc

$$u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} = -\alpha\frac{u_n^{\alpha+2}}{6} + o(u_n^{\alpha+2}).$$

Ainsi, en prenant $\alpha = -2$, on obtient

$$u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{1}{3} + o(1).$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

En utilisant l'idée décrite précédemment, on en déduit, par le théorème de Cesaro :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\,u_n^2} - \frac{1}{n\,u_0^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = \frac{1}{3},$$

et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\,u_n^2} = \frac{1}{3}.$$

Finalement, on obtient
$$\frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3},$$
et donc, l'équivalence souhaitée,
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

3. On va baser le raisonnement sur la même idée que pour la question précédente, en cherchant cette fois un développement limité à deux termes de $1/u_{n+1}^2 - 1/u_n^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on a
$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + \frac{u_n^5}{120} + o(u_n^5) = u_n\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o(u_n^4)\right).$$
On en déduit
$$u_{n+1}^2 = u_n^2\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + o(u_n^4)\right)^2 = u_n^2\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \frac{2u_n^4}{45} + o(u_n^4)\right).$$
On a donc
$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}^2} &= \frac{1}{u_n^2}\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \frac{2u_n^4}{45} + o(u_n^4)\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{u_n^2}\left(1 - \left(-\frac{u_n^2}{3} + \frac{2u_n^4}{45} + o(u_n^4)\right) + \left(-\frac{u_n^2}{3} + \frac{2u_n^4}{45} + o(u_n^4)\right)^2 + o(u_n^4)\right)\\ &= \frac{1}{u_n^2}\left(1 + \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{15} + o(u_n^4)\right).\end{aligned}$$
Ainsi, on a
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} = \frac{u_n^2}{15} + o(u_n^2).$$
En utilisant l'équivalent de u_n de la question précédente, on en déduit l'équivalent :
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{15}\cdot\frac{3}{n} \sim \frac{1}{5n}.$$
On veut maintenant reprendre l'idée décrite dans la question précédente, et sommer les équivalents afin d'en déduire un équivalent du second ordre de la suite u_n. On a obtenu l'équivalence
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \sim \frac{1}{5n},$$
qui sont deux termes positifs, et tels que la série $\sum 1/5n$ diverge, par le critère de Riemann. En utilisant le théorème d'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs [1], on en déduit que $\sum u_n$ diverge, et que les sommes partielles sont équivalentes. On obtient alors
$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - \frac{n}{3} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{3}\right) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{5k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\log(n)}{5}.$$

1. Voir par exemple le Gourdon, *Analyse*, pour l'énoncé précis de ce théorème.

Rappelons que la dernière équivalence provient de l'étude de la série harmonique,

$$\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

dont on montre que le développement asymptotique est

$$\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1),$$

où γ est la constante d'Euler [2].
Finalement, on obtient l'équivalent

$$\frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_0^2} + \frac{n}{3} + \frac{\log(n)}{5} + o(\log(n)) = \frac{n}{3} + \frac{\log(n)}{5} + o(\log(n)).$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} u_n^2 = \left(\frac{n}{3} + \frac{\log(n)}{5} + o(\log(n))\right)^{-1} &= \frac{3}{n}\left(1 + \frac{3\log(n)}{5n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right)^{-1} \\ &= \frac{3}{n}\left(1 - \frac{3\log(n)}{5n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n = \left[\frac{3}{n}\left(1 - \frac{3\log(n)}{5n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{3}{n}}\left(1 - \frac{3\log(n)}{10n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\log(n)}{10n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le développement limité de la suite u_n à deux termes :

$$u_n = \sqrt{\frac{n}{3}} - \frac{3\sqrt{3}\log(n)}{10n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 15 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

1. Montrer que toute suite de réels, on peut extraire une suite monotone.
2. En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite convergente.

Soluce

1. Soit (u_n) une suite de réels. Considérons l'ensemble :

$$\mathrm{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k > n,\ u_k \geqslant u_n\}$$

— Supposons E fini. En posant $p = 1 + \max \mathrm{E}$, on a :

$$\forall n \geqslant p, \quad u_{n+1} \leqslant u_n;$$

ainsi la suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ est une suite décroissante, extraite de (u_n).

2. C'est un exercice classique pour l'agrégation, voir par exemple, de même, [7].

— Supposons E infini. Choisissons $n_0 \in$ E et posons $v_0 = u_{n_0}$, comme E est infini, il existe $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} \geqslant u_{n_0}$; posons alors $v_1 = u_{n_1}$. Comme E est infini, on peut répéter le procédé précédent pour trouver $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} \geqslant u_{n_1}$ puis poser $v_2 = u_{n_2}$; une récurrence permet de construire formellement la suite (v_n) ; celle-ci est par construction croissante, extraite de (u_n).

2. D'après la question précédente, de notre suite de réels bornée, on peut extraire une suite monotone ; celle-ci est bornée donc elle convergente, ce qui conclut.

Exercice 16 (Théorème de Bolzano-Weierstrass bis)
En utilisant le procédé de dichotomie, démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass à partir de la propriété des segments emboîtés.

Soluce
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, on doit montrer qu'elle admet une sous-suite convergente. Si la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, l'une de ces valeurs est atteinte pour un nombre infini d'indices[3], ce qui permet de construire une suite extraite constante donc convergente. Désormais, on écarte ce cas.

Soit $[a_0, b_0]$ un segment qui contient tous les termes de la suite. On construit par récurrence une suite de segments emboîtés $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $[a_n, b_n]$ contient une infinité de valeurs de (u_n) et $b_n - a_n = 1/2^n$ pour tout n. Soit n un entier pour lequel $[a_n, b_n]$ a été construit. Soit $c_n = (a_n + b_n)/2$. S'il y a une infinité de valeurs de (u_n) dans $[a_n, c_n]$, on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n)$. Sinon, c'est qu'il y en a une infinité dans $[c_n, b_n]$ et on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, b_n)$.

Soit ℓ la limite commune des suite (a_n) et (b_n). Construisons inductivement une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ. On choisit $n_0 = 0$. Soit k un entier, supposons avoir construit $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ tels que $u_{n_j} \in [a_j, b_j]$ pour tout j inférieur à k. Comme le segment $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contient une infinité de valeurs de (u_n), on peut choisir un indice n_{k+1} strictement supérieur à n_k tel que $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Ceci montre l'existence de l'extraction $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Par la trivialité des gendarmes, la suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 17 (Théorème des valeurs intermédiaires)
En utilisant le procédé de dichotomie, démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Soluce
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(a)f(b) \leqslant 0$ et on veut prouver l'existence de c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$. On construit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

$$(a_0, b_0) = (a, b) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right) & \text{si } f(a_n) f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leqslant 0 \,; \\ \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Version imagée : si on range une infinité de chaussettes dans un nombre fini de tiroirs, un des tiroirs contient une infinité de chaussettes.

Prouvons que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ pour tout n. C'est vrai si $n = 0$ par hypothèse. Soit n un entier, on suppose que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$. Notons $c_n = (a_n + b_n)/2$, alors :

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = \begin{cases} f(a_n)f(b_n) \leqslant 0 & \text{si } f(a_n)f(c_n) \leqslant 0\,; \\ f(c_n)f(b_n) = \dfrac{f(a_n)f(c_n)}{f(a_n)^2} \times f(a_n)f(b_n) \leqslant 0 & \text{si } f(a_n)f(c_n) > 0. \end{cases}$$

De plus, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. En effet, on a par construction : $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ et $b_n - a_n = (b-a)/2^n$. Elles ont donc une limite commune c. Par continuité de f, l'inégalité $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ vraie pour tout n entraîne que $f(c)^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $f(c) = 0$.

Exercice 18 (Bornes d'une fonction continue)
On dit qu'un segment $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ est *dominant*[4]*pour* f si

$$\forall x \in [a,b], \quad \exists y \in [\alpha,\beta], \quad f(y) \geqslant f(x).$$

1. Montrer que si $[\alpha, \beta]$ est dominant pour f et si $\gamma \in [\alpha, \beta]$, alors $[\alpha, \gamma]$ ou $[\gamma, \beta]$ est dominant.
2. Construire par dichotomie deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que $[a_n, b_n]$ est dominant pour f.
3. Démontrer qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint son maximum.

Remarque. Cet exercice est tiré d'un document de Daniel Perrin.

Soluce

1. En effet, si $[\alpha, \gamma]$ est dominant, c'est gagné. Sinon, cela signifie que

   $$\exists x_0 \in [a,b], \quad \forall y \in [\alpha,\gamma], \quad f(y) < f(x_0).$$

   Mais $[\alpha, \beta]$ est dominant donc il existe $y_0 \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(y_0) \geqslant f(x_0)$. Par construction de x_0, on a : $y_0 \in [\beta, \gamma]$.

   Ceci entraîne que $[\beta, \gamma]$ est dominant. En effet, soit x dans $[a, b]$. Il existe y dans $[\alpha, \beta]$ tel que $f(y) \geqslant f(x)$. Si $y \in [\gamma, \beta]$, rien à ajouter. Sinon, on a : $f(y_0) \geqslant f(x_0) > f(y) \geqslant f(x)$.
2. L'intervalle $[a, b]$ est dominant. On définit deux suites adjacentes (a_n) et (b_n). On pose $(a_0, b_0) = (a, b)$. Pour n entier, supposons avoir défini a_n et b_n de sorte que $[a_n, b_n]$ soit dominant. Posons $c_n = (a_n + b_n)/2$. On choisit $(a_n, b_n) = (a_n, c_n)$ si $[a_n, c_n]$ est dominant et $(a_n, b_n) = (c_n, b_n)$ sinon. Alors $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est dominant.
3. On vérifie que la limite commune c de ces deux suites est un maximum de f. En effet, soit $x \in [a, b]$. Pour tout n, il existe $y_n \in [a_n, b_n]$ tel que $f(y_n) \geqslant f(x)$. Mais la suite (y_n) converge vers c et f est continue donc $f(c) \geqslant f(x)$.

4. Voici une métaphore de Daniel Perrin : « Quoi que propose la concurrence, nous pouvons faire mieux ! »

Les deux exercices suivants, qui utilisent les mêmes notations, sont tirés de la première composition du CAPES externe 1998.

Cadre
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ qui admet un point fixe r dans I, c'est-à-dire que $f(r) = r$. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r et qu'elle n'est pas stationnaire.

Exercice 19 (Vitesse de convergence vers un point fixe attractif)
On suppose que $|f'(r)| < 1$.

1. Montrer qu'il existe un réel $k < 1$ et un entier N tels que
$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad |x_n - r| \leqslant k^{n-\mathrm{N}}|x_\mathrm{N} - r|.$$
2. On suppose que $|f'(r)| \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(\mathrm{R}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} - r = f'(r)(x_j - r)(1 + \mathrm{R}_j) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_j = \mathrm{O}(k^j).$$
   (b) Montrer qu'il existe une constante non nulle $\lambda(x_0)$ telle que
   $$(x_n - r) \sim \lambda(x_0) \cdot \big(f'(r)\big)^n.$$
3. On suppose que $f'(r) = 0$ et que $f''(r) \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(\mathrm{S}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2(1 + \mathrm{S}_j) \quad \text{et} \quad \lim_{j\to+\infty} \mathrm{S}_j = 0.$$
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, on a :
   $$x_n - r = \frac{2}{f''(r)}\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2}|1 + \mathrm{S}_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n}(1 + \mathrm{S}_{n-1}).$$
   (c) En déduire qu'il existe une constante $\mu(x_0) \in\,]0,1[$ telle que
   $$(x_n - r) \sim \frac{2}{f''(r)}\big(\mu(x_0)\big)^{2^n}.$$

Soluce

1. Soit k un réel strictement compris entre $|f'(r)|$ et 1. Par continuité de f', il existe un voisinage V de r tel que $|f'(x)| < k$ pour tout x de V. L'hypothèse de convergence entraîne l'existence d'un entier N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$,

l'élément x_n appartient à V. Mais pour un tel n, on a par le théorème des accroissements finis : $x_{n+1}-r=f'(c)(x_n-r)$ pour c convenable compris entre r et x_n, donc élément de V. D'où : $|x_{n+1}-r| \leqslant k|x_n-r|$ dès que $n \geqslant \mathrm{N}$. Une récurrence immédiate donne : $|x_n-r| \leqslant k^{n-\mathrm{N}}|x_\mathrm{N}-r|$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$.

2. Cas $|f'(r)| \neq 0$.
   (a) Fixons un entier j. Par le théorème de Taylor-Lagrange, il existe un réel c_j compris entre r et x_j tel que

$$\begin{aligned} f(x_j)-f(r) &= f'(r)(x_j-r)+\frac{f''(c_j)}{2}(x_j-r)^2 \\ &= f'(r)(x_j-r)(1+\mathrm{R}_j) \quad \text{où} \quad \mathrm{R}_j=\frac{f''(c_j)}{2f'(r)}(x_j-r). \end{aligned}$$

   Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, il existe M tel que $\left|f''(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$ pour $x \in \mathrm{I} \cap [r-1, r+1]$. Pour $j \geqslant \mathrm{N}$, on a :

$$|\mathrm{R}_j| \leqslant \frac{\mathrm{M}|x_\mathrm{N}-r|}{2\left|f'(r)\right|k^\mathrm{N}}\, k^j.$$

   Autrement dit, avec la suite (R_j) définie ci-dessus, on a bien : $\mathrm{R}_j=\mathrm{O}(k^n)$.
   (b) Une récurrence immédiate donne :

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_n-r=\big(f'(r)\big)^n(x_0-r)\prod_{j=0}^{n-1}(1+\mathrm{R}_j).$$

   Or on a : $1+\mathrm{R}_j \neq 0$ pour tout j – sinon, on aurait $x_{j+1}=r$ et la suite stationnerait en r. Par conséquent, la suite $\big(\ln|1+\mathrm{R}_j|\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Comme $\mathrm{R}_j=\mathrm{O}(k^j)$, elle converge vers 0 ; mieux, la série de terme général $\ln|1+\mathrm{R}_j|$ converge. De plus, on a : $1+\mathrm{R}_j>0$ pour j assez grand. Par composition par l'exponentielle, la suite $\left(\prod_{j=0}^m(1+\mathrm{R}_j)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle. On a donc :

$$(x_n-r) \sim \lambda(x_0)\cdot\big(f'(r)\big)^n, \quad \text{où } \lambda(x_0)=(x_0-r)\prod_{j=0}^{+\infty}(1+\mathrm{R}_j) \neq 0.$$

3. Cas où $f'(r)=0$ et $f''(r) \neq 0$.
   (a) Soit j un entier. On a vu qu'il existe c_j entre x_j et r tel que

$$\begin{aligned} f(x_j)-f(r) &= f'(r)(x_j-r)+\frac{f''(c_j)}{2}(x_j-r)^2 \\ &= \frac{f''(r)}{2}(x_j-r)^2(1+\mathrm{S}_j), \end{aligned}$$

   où

$$\mathrm{S}_j=\frac{f''(c_j)}{f''(r)}-1.$$

   Puisque c_j est compris entre r et x_j et que (x_j) converge vers r, la suite (c_j) converge vers r. Par continuité de f'' en r, la suite (S_j) converge vers 0.

(b) Exprimons les premières différences $x_n - r$:

$$x_1 - r = \frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)^2(1 + \mathrm{S}_0),$$
$$x_2 - r = \left(\frac{f''(r)}{2}\right)^3 (x_0 - r)^4(1 + \mathrm{S}_0)^2(1 + \mathrm{S}_1),$$
$$x_3 - r = \left(\frac{f''(r)}{2}\right)^7 (x_0 - r)^8(1 + \mathrm{S}_0)^4(1 + \mathrm{S}_1)^2(1 + \mathrm{S}_2),$$

et ainsi de suite : à chaque étape, l'exposant de $(x_0 - r)$ double ; celui de $f''(r)/2$ est doublé puis augmente de 1 ; un facteur $(1 + \mathrm{S}_{n-1})$ apparaît dont l'exposant double à chaque étape suivante. Une récurrence immédiate donne avec un tout petit peu de flair, pour tout $n \geqslant 1$:

$$x_n - r = \left(\frac{f''(r)}{2}\right)^{2^n-1} (x_0 - r)^{2^n} \prod_{j=0}^{n-1}(1 + \mathrm{S}_j)^{2^{n-j-1}}.$$

Pour tout j, on a : $1 + \mathrm{S}_j \neq 0$, sans quoi la suite (x_n) serait stationnaire. Pour $j < n-1$, l'exposant de $(1 + \mathrm{S}_j)$ est pair donc on peut remplacer ce facteur par $|1 + \mathrm{S}_j|$. Cela permet de récrire l'expression sous la forme :

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)}\left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-2}|1 + \mathrm{S}_j|^{2^{-j-1}}\right)^{2^n} (1 + \mathrm{S}_{n-1}).$$

(c) Comme (S_j) tend vers 0, on a : $\ln|1 + \mathrm{S}_j|^{2^{-j-1}} \sim 2^{-j-1}\mathrm{S}_j$. Comme la suite (S_j) est bornée et que la série $\sum 2^{-j-1}$ converge, la série $\sum \ln(1 + \mathrm{S}_j)^{2^{-j-1}}$ converge absolument. D'où l'existence de

$$\mu(x_0) = \frac{f''(r)}{2}(x_0 - r)\lim_{m\to+\infty}\prod_{j=0}^{m-1}(1 + \mathrm{S}_j)^{2^{-j-1}}.$$

Posons (l'existence de la limite vient d'être justifiée), pour $n \geqslant 2$:

$$\pi_n = \lim_{m\to+\infty}\prod_{j=n-1}^{m}|1 + \mathrm{S}_j|^{2^{-j-1}}.$$

Alors, par continuité du logarithme :

$$2^n \ln \pi_n = 2^n \sum_{j=n-1}^{+\infty}\frac{1}{2^{j+1}}\ln|1 + \mathrm{S}_j|.$$

La suite (S_j) tend vers 0, il en est de même de $\big(\ln(1 + \mathrm{S}_j)\big)$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout j supérieur à un rang N convenable, on a : $\big|\ln|1 + \mathrm{S}_j|\big| \leqslant \varepsilon$, d'où, si $n \geqslant \mathrm{N}$:

$$|2^n \ln \pi_n| \leqslant 2^n \sum_{j=n-1}^{+\infty}\frac{1}{2^{j+1}}\varepsilon = 2^n \times \frac{\frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ceci montre que $(2^n \ln \pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. De plus, on a :

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)}\left(\frac{\mu(x_0)}{\pi_n}\right)^{2^n}(1+\mathrm{S}_{n-1}) = \frac{2}{f''(r)}\big(\mu(x_0)\big)^{2^n} \times \mathrm{e}^{-2^n \ln \pi_n}(1+\mathrm{S}_{n-1}),$$

ce qui donne l'équivalent cherché : $(x_n - r) \sim \dfrac{2}{f''(r)}\big(\mu(x_0)\big)^{2^n}$.

On remarque enfin que $\mu(x_0) \in]0,1[$ puisque l'on sait que (x_n) converge vers r.

Exercice 20 (Vitesse de convergence vers un point fixe non attractif) On suppose que $|f'(r)| = 1$ et que f est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ pour un entier p et que $f''(r) = \cdots = f^{(p)}(r) = 0$ et $f^{(p+1)}(r) \neq 0$.

1. On suppose que $f'(r) = 1$.
   (a) Discuter, selon la parité de $p+1$ et le signe de $f^{(p+1)}(0)$, l'existence d'une suite récurrente non stationnaire qui converge vers r.
   (b) Montrer qu'à l'aide d'un changement de variable, on peut se ramener au cas où les hypothèses de la question suivante sont satisfaites.

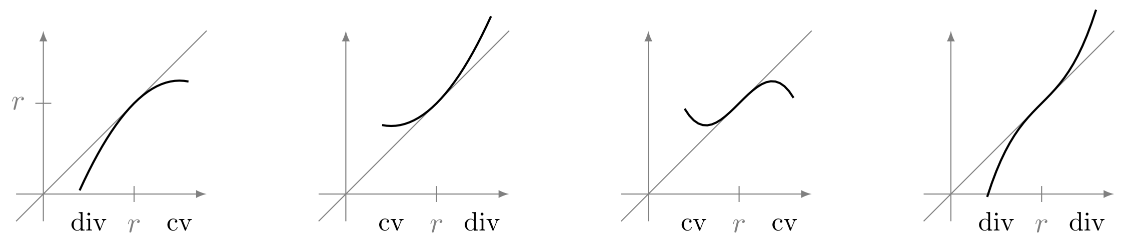
   On pourra envisager de sauter cette question.
2. On suppose que $f'(r) = 1$, que $r = 0$, que $f^{(p+1)}(0) < 0$, qu'il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que f soit croissante sur $]0,\varepsilon_0[$ et que x_0 appartient à $]0,\varepsilon_0[$.
   (a) Soient $a > 0$ et $\alpha > 0$. Montrer que la suite définie par $y_n = (an+\alpha)^{-1/p}$ pour tout n est une suite récurrente associée à une fonction continue $g_a : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ à préciser.
   (b) Montrer que si a et b sont deux réels strictement positifs tels que
   $$-a < \frac{p}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0) < -b,$$
   il existe $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ tel que $g_a(x) \leqslant f(x) \leqslant g_b(x)$ pour tout $x \in]0,\varepsilon[$. En déduire que pour tout entier k,
   $$(ak + x_{\mathrm{N}}^{-p})^{-1/p} \leqslant x_{\mathrm{N}+k} \leqslant (bk + x_{\mathrm{N}}^{-p})^{-1/p}.$$
   (c) En déduire un équivalent simple de (x_n).
   (d) Application numérique : $f(x) = \sin x$ pour $x \in]0,1[$.
3. Que se peut-on dire de simple si $f'(r) = -1$?

Remarque. La recherche d'un équivalent d'une suite définie par $x_0 \in]0,1]$ et $x_{n+1} = \sin x_n$ en commençant par chercher un réel λ tel que $\left(x_{n+1}^{\lambda} - x_n^{\lambda}\right)$ admet une limite non nulle est bien connue. Voici une nouvelle méthode.

Soluce

1. (a) Une première approche graphique ne saurait nuire.

   Comme f' est continue et $f'(r) = 1$, il existe un voisinage de r sur lequel f' est strictement positive, c'est-à-dire que f est strictement croissante. Par ailleurs, on a au voisinage de r :
   $$f(x) = x - \beta(x-r)^{p+1} + o\big((x-r)^{p+1}\big) \quad \text{où } \beta = -\frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}.$$



$p+1$ pair, $\beta > 0$ | $p+1$ pair, $\beta < 0$ | $p+1$ impair, $\beta > 0$ | $p+1$ impair, $\beta < 0$

FIGURE 5.1 – Point fixe ni attractif, ni répulsif

Sur un voisinage convenable de r, le signe de $f(x) - x$ est également celui de $-\beta(x-r)^{p+1}$. L'intersection de ces voisinages contient un intervalle $]r-\varepsilon_0, r+\varepsilon_0[$ où les conditions sur les variations de f et le signe de $f(x)-x$ sont remplies.

Si une suite converge vers r, ses termes appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang. Quitte à oublier les premiers termes, on peut donc supposer qu'elle est à valeurs dans $]r-\varepsilon_0, r+\varepsilon_0[$.

— Premier cas : $p+1$ pair.
  — Premier sous-cas : $\beta > 0$. Si $x_0 \in]r, r+\varepsilon_0[$, alors $r < x_{n+1} < x_n$ pour tout $n \geqslant 0$ donc la suite (x_n) décroît vers r.
    Si un terme x_n appartient à $]r-\varepsilon_0, r[$, alors $x_{n+1} < x_n < r$. Il n'existe donc pas de suite à valeurs dans $]r-\varepsilon_0, r[$ qui converge vers r – sinon on aurait $x_{n+1} < x_0 < r$ pour tout n, ce qui est absurde.
  — Deuxième sous-cas : $\beta < 0$. Si $x_0 \in]r-\varepsilon_0, r[$, alors (x_n) croît vers r et il n'existe pas de suite à valeurs dans $]r, r+\varepsilon_0[$ qui converge vers r.
— Deuxième cas : $p+1$ impair.
  — Premier sous-cas : $\beta > 0$. Si $x_0 \in]r-\varepsilon_0, r[$, la suite (x_n) croît vers r et si $x_0 \in]r, r+\varepsilon_0[$, la suite (x_n) décroît vers r.
  — Deuxième sous-cas : $\beta < 0$. Il n'existe pas de suite non stationnaire qui converge vers r.

(b) Soit (x_n) une suite non stationnaire qui converge vers r à valeurs dans $]r-\varepsilon_0, r+\varepsilon_0[$. Quitte à remplacer (x_n) par $(u_n) = (x_n - r)$ et f par $g : u \mapsto f(u+r) - r$, on peut supposer que $r = 0$ (en effet, $u_{n+1} = x_{n+1} - r = f(x_n) - r = f(u_n + r) - r = g(u_n)$ pour tout n et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$). Quitte à remplacer (x_n) par $(v_n) = (-x_n)$ et f par $h : v \mapsto -f(-v)$, on peut supposer que $x_0 > 0$ (en effet, $v_{n+1} = -x_{n+1} = -f(x_n) = -f(-v_n) = h(v_n)$ pour tout n et $v_0 = -x_0$). On vient de voir qu'alors, on a nécessairement $\beta < 0$.

2. (a) D'abord, la suite (y_n) converge vers 0. On a pour tout n :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \big(a(n+1)+\alpha\big)^{-1/p} = (an+\alpha+a)^{-1/p} \\ &= \Big(\big((an+\alpha)^{-1/p}\big)^{-p}+a\Big)^{-1/p} \\ &= \big(y_n^{-p}+a\big)^{-1/p} = g_a(y_n) \end{aligned}$$

où, pour tout $x>0$,

$$g_a(x) = (x^{-p}+a)^{-1/p} = x\,(1+ax^p)^{-1/p}.$$

Remarquons que la fonction g_a est du type « voulu » car au voisinage de 0, on a :

$$g_a(x) = x - \frac{a}{p}\,x^{p+1} + o(x^{p+1}).$$

(b) L'hypothèse s'écrit : $-\dfrac{a}{p} < -\beta < -\dfrac{b}{p}$. Pour $x \in\,]0,\varepsilon_0[$, on a :

$$f(x)-g_a(x) = x-\beta x^{p+1}+o(x^{p+1})-\Big(x-\frac{a}{p}x^{p+1}+o(x^{p+1})\Big) = \Big(-\beta+\frac{a}{p}+o(1)\Big)\,x^{p+1},$$

quantité strictement positive pour x dans un intervalle de la forme $]0,\varepsilon'[$. On montrerait de même que $f(x)-g_b(x)<0$ pour x dans un intervalle $]0,\varepsilon''[$ convenable. En prenant $\varepsilon=\min(\varepsilon',\varepsilon'')$, on obtient la double inégalité voulue sur $]0,\varepsilon[$.

Comme (x_n) converge vers 0, il existe N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, le terme x_n appartient à $]0,\varepsilon[$. Vérifions par récurrence sur k que

$$0 < \big(ak+x_{\mathrm{N}}^{-p}\big)^{-1/p} \leqslant x_{\mathrm{N}+k} \leqslant \big(bk+x_{\mathrm{N}}^{-p}\big)^{-1/p} < \varepsilon.$$

Il n'y a rien à démontrer pour $k=0$. Soit k un entier pour lequel l'inégalité est satisfaite. Comme $x_{\mathrm{N}+k}\in\,]0,\varepsilon[$, on a l'encadrement $g_a(x_{\mathrm{N}+k}) \leqslant f(x_{\mathrm{N}+k}) \leqslant g_b(x_{\mathrm{N}+k}) \leqslant x_{\mathrm{N}+k}$, ce qui permet de conclure puisque

$$\big(a(k+1)+x_{\mathrm{N}}^{-p}\big)^{-1/p} = g_a\Big(\big(ak+x_{\mathrm{N}}^{-p}\big)^{-1/p}\Big) \quad \text{et}\ \big(b(k+1)+x_{\mathrm{N}}^{-p}\big)^{-1/p} = g_b\Big(\big(bk+x_{\mathrm{N}}^{-p}\big)^{-1/p}\Big).$$

(c) Rappelons que N est fixé. Factoriser ce qui est grand, an, donne l'équivalent :

$$\big(a(n-\mathrm{N})+x_{\mathrm{N}}^{-p}\big)^{-1/p} = (na)^{-1/p}\left(1+\frac{-a\mathrm{N}+x_{\mathrm{N}}^{-p}}{an}\right)^{-1/p} \sim (na)^{-1/p}.$$

D'où :

$$a^{-1/p}\left(1+\frac{-a\mathrm{N}+x_{\mathrm{N}}^{-p}}{an}\right)^{-1/p} \leqslant n^{1/p}x_n \leqslant b^{-1/p}\left(1+\frac{-b\mathrm{N}+x_{\mathrm{N}}^{-p}}{bn}\right)^{-1/p}.$$

Jusque là, a et b étaient arbitraires. On va les choisir proches de $-pf^{(p+1)}(0)/(p+1)!$, de sorte que $a^{-1/p}$ et $b^{-1/p}$ sont proches de :

$$\ell = \left(-\frac{p}{(p+1)!}f^{(p+1)}(0)\right)^{-1/p} = (p\beta)^{-1/p}.$$

Soit $\eta > 0$. Par continuité de $u \mapsto u^{-1/p}$, on peut choisir a et b tels que

$$\ell - \eta < a^{-1/p} < b^{-1/p} < \ell + \eta.$$

Ce choix détermine ε et N comme ci-dessus. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a donc :

$$(\ell - \eta)\left(1 + \frac{-a\mathrm{N} + x_{\mathrm{N}}^{-p}}{an}\right)^{-1/p} \leqslant n^{1/p} x_n \leqslant (\ell + \eta)\left(1 + \frac{-b\mathrm{N} + x_{\mathrm{N}}^{-p}}{bn}\right)^{-1/p}.$$

Les suites entre parenthèses tendent vers 1 donc il existe $\mathrm{N}' \geqslant \mathrm{N}$ tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}'$, on ait :

$$\ell - 2\eta \leqslant n^{1/p} x_n \leqslant \ell + 2\eta.$$

Autrement dit, $n^{1/p}x_n$ converge vers ℓ. Ainsi, si $f(x) = x - \beta x^{p+1} + o(x^{p+1})$,

$$x_n \sim \left(-\frac{np}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0)\right)^{-1/p} \sim (np\beta)^{-1/p}.$$

(d) Avec $f(x) = \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, on a $p = 2$ et $\beta = \dfrac{1}{6}$, d'où

$$x_n \sim \left(\frac{n}{3}\right)^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

3. Lorsque $f'(0) = -1$, la discussion est plus difficile à structurer, il y a trop de cas possibles. La première remarque, c'est que les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont des suites récurrentes pour la fonction $g = f \circ f$, qu'elles convergent nécessairement vers r et que $g'(r) = f'(r)f'\big(f(r)\big) = 1$.

   Supposons que $f(x) = -x - \beta x^{p+1} + o(x^{p+1})$, alors $g(x) = x + \big(1 - (-1)^{p+1}\big)\beta x^{p+1} + o(x^{p+1})$. Si $p+1$ est *impair*, alors $g(x) = x + 2\beta x^{p+1} + o(x^{p+1})$, ce qui donne lieu à des suites convergentes si et seulement si $\beta < 0$. Mais si $p+1$ est *pair*, tout peut arriver selon les termes suivants du développement limité (s'ils existent). Par exemple, si $f(x) = -x - \beta x^2 - \gamma x^3 + o(x^3)$, on trouve $g(x) = x - 2(\beta^2 - \gamma)x^3 + o(x^3)$ et l'existence de suites convergentes non stationnaires dépend du signe de $\beta^2 - \gamma$, voire des termes suivants si $\beta^2 - \gamma = 0$.

5.2 Suites complexes

Exercice 21 (Suites homographiques dans $\mathbb{C}$)
Soit $\mathrm{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ une matrice complexe telle que $(c, d) \neq (0, 0)$. Pour z complexe tel que $cz + d \neq 0$, on pose :

$$\mathrm{A} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par un complexe u_0 et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{A} \cdot u_n$ (quand cela est possible). On cherche des conditions d'existence, une expression plus ou moins explicite de u_n en fonction de n, et la limite éventuelle de la suite.

1. On suppose que la suite est définie jusqu'au rang n. Montrer que $u_n = \mathrm{A}^n \cdot u_0$.

2. On suppose la suite définie jusqu'au rang $n-1$. Montrer que u_n est définie si et seulement si
$$\mathrm{A}^n(u_0,1) \notin \mathbb{C}e_1,$$
où on note (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
3. On suppose ici $ad-bc=0$. Que peut-on dire de la suite (u_n) ? *On distinguera le cas nilpotent et le cas non nilpotent.*
4. On supposera dorénavant que $ad-bc \neq 0$, c'est-à-dire que A est inversible. Montrer que la suite est bien définie, sauf pour un nombre au plus dénombrable [5] de valeurs de u_0.
5. Traiter le cas où A est diagonale : $b=c=0$.
6. Traiter le cas où A est triangulaire mais non diagonale : $a=d$, $c=0$, $b\neq 0$.
7. Soit P une matrice complexe inversible et soit, pour n entier naturel, $v_n = \mathrm{P}\cdot u_n$ (cette suite est bien définie « en général »). Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite homographique définie par v_0 et la relation : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = \mathrm{A}'\cdot v_n$ où $\mathrm{A}' = \mathrm{PAP}^{-1}$.
8. En déduire, selon que A est diagonalisable ou non, une expression de u_n faisant intervenir les valeurs propres de A et l'existence éventuelle d'une limite.

Soluce

1. La question se ramène à montrer que si $\mathrm{A}' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$, $\mathrm{A}'\cdot(\mathrm{A}\cdot z) = (\mathrm{A}'\mathrm{A})\cdot z$, lorsque la formule a un sens. Même si ce n'est pas très éclairant [6], nous allons appliquer la méthode brutale :
$$\begin{aligned}\mathrm{A}'\cdot(\mathrm{A}\cdot z) &= \frac{a'\frac{az+b}{cz+d}+b'}{c'\frac{az+b}{cz+d}+d'}\\ &= \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)}\\ &= (\mathrm{A}'\mathrm{A})\cdot z\end{aligned}$$
2. On note $\mathrm{A}^n := \left(\begin{smallmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{smallmatrix}\right)$. D'après la question qui précède, u_n existe si et seulement si $\mathrm{A}^n\cdot u_0$ existe, et donc si et seulement si $c_nu_0+d_n\neq 0$. Ceci revient à dire $\mathrm{A}^n(u_0,1)\notin\mathbb{C}e_1$.
3. Comme A est non inversible mais non nulle, son rang est 1, et donc, les vecteurs (a,b) et (c,d) sont proportionnels. Puisque $(c,d)\neq(0,0)$, il existe un réel λ tel que $(a,b)=(c,d)$. Il en résulte deux cas :

   Premier cas

   Si u_0 est racine de l'équation $cz+d=0$, alors la suite s'arrête à u_0. Une brève histoire.

   Deuxième cas

5. Il y a deux définitions de dénombrable en vigueur en mathématiques. L'une dit qu'il s'agit d'ensembles en bijection avec $\mathbb{N}$, l'autre dit que ce sont des ensembles qui peuvent s'injecter dans $\mathbb{N}$, ce qui inclut les ensembles finis. Dire « au plus dénombrable » permet d'évaporer l'ambiguïté.

6. Se rapporter à la notion d'action par homographie sur la droite projective permet d'enluminer un peu ce gros calcul.

Si u_0 n'est pas racine de l'équation $cz + d = 0$, alors $u_1 = \lambda$. Donc, soit λ est racine de $cz + d = 0$, dans ce cas, la suite a'arrête à u_1, soit λ n'est pas racine de $cz + d = 0$, et dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et égale à λ.

Notons, pour la gloire, que ces deux sous-cas correspondent aux cas où A *nilpotente, ou* A *non nilpotente. Effectivement, on a par hypothèse,* $a = c\lambda$. *Une valeur propre de* A *est donc* 0 *(puisque* A *est non inversible), l'autre étant* $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = a + d = c\lambda + d$. *Le sous-cas où* λ *est racine de* $cz + d$ *correspond donc au cas où* 0 *est valeur propre double de* A, *et donc,* A *nilpotente, par Cayley-Hamilton.*

4. D'après la question 2), la suite est bien définie, sauf si u_0 appartient à l'ensemble

$$\mathrm{S} := \Big\{-\frac{d_n}{c_n},\ \text{avec } n \text{ tel que } c_n \neq 0\Big\}.$$

On utilise au passage le fait que si c_n est nul, alors d_n ne l'est pas, puisque A^n est inversible. On a donc bien que l'équation $c_n z + d_n = 0$ possède forcément au plus une solution. Donc, l'ensemble S est au plus dénombrable, puisqu'il s'injecte dans $\mathbb{N}$.

5. On a donc, par hypothèses, a et d non nuls, et $u_n = \frac{a}{d}u_{n-1}$; une suite géométrique qui ne sera un secret pour personne.

6. On a donc, encore par hypothèses, $a = d$ non nul, et $u_n = u_{n-1} + \frac{b}{d}$; une suite arithmétique, dont il serait méchant de se moquer.

7. On a vu dans la question 1) l'égalité[7] $\mathrm{A}' \cdot (\mathrm{A} \cdot z) = (\mathrm{A}'\mathrm{A}) \cdot z$, et donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \mathrm{P} \cdot u_{n+1} = \mathrm{P} \cdot (\mathrm{A} \cdot u_n) = (\mathrm{PA}) \cdot u_n \\ &= (\mathrm{A}'\mathrm{P}) \cdot u_n = \mathrm{A}' \cdot (\mathrm{P} \cdot u_n) = \mathrm{A}' \cdot v_n. \end{aligned}$$

8. On distingue deux cas :

Premier cas. Si A est diagonalisable, avec P tel que

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\mathrm{P}$$

Dans ce cas, $v_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n}v_0$, et donc

$$u_n = \mathrm{P}^{-1} \cdot \Big(\frac{\lambda^n}{\mu^n}\mathrm{P} \cdot u_0\Big)$$

On ne détaillera pas plus ce calcul.

Si $\lambda = \mu$, alors la suite est constante. Si $|\lambda| = |\mu|$, avec $\lambda \neq \mu$, alors, la suite (v_n) est une suite géométrique non constante de raison $\mathrm{e}^{i\theta}$, donc, on voit facilement par l'absurde que la suite (u_n) ne converge pas non plus. Sinon, on peut supposer sans perte de généralité que $|\lambda| < |\mu|$. La limite est donc égale à

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{P}^{-1} \cdot 0,$$

7. Finalement, cette égalité est celle qui définit la notion d'action de groupe. Mais ici, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ n'agit pas vraiment sur $\mathbb{C}$, puisque l'action n'est pas toujours définie.

lorsque ce complexe est défini (le module de u_n tend vers l'infini sinon). On peut voir (avec un peu de travail) que le cas où la limite est infinie correspond au cas où e_2 est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

Deuxième cas. Si A n'est pas diagonalisable, avec P tel que

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & a\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\mathrm{P}.$$

Dans ce cas, a et λ sont non nuls car A est non diagonalisable et inversible. On a $v_n = v_0 + \frac{a}{\lambda}$, par la question 6), et donc

$$u_n = \mathrm{P}^{-1}\cdot\left(\mathrm{P}\cdot u_0 + n\frac{a}{\lambda}\right)$$

Ce calcul peut être détaillé à l'envi par le lecteur.

La limite de (v_n) est infinie, et la limite de (u_n) est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{|z|\to+\infty} \mathrm{P}^{-1}\cdot z$$

On peut voir (avec un peu de travail) que la limite de u_n est finie sauf dans le cas où A est triangulaire (non diagonale).

5.3 Suites et arithmétique

On note $(\mathrm{F}_n)_n$ la suite de Fibonacci donnée par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$, et $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$; il s'agit d'une suite linéaire dont l'équation caractéristique est $\mathrm{P} := \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1$.

Exercice 22 (Les trois filles du Docteur Fibonacci)
Nous allons exhiber trois méthodes permettant de calculer l'expression de F_n en fonction de n selon si l'on travaille[8] sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$.

On veut montrer que $\mathrm{F}_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\phi - \phi'}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $\mathrm{F}_n = n3^{n-1}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$.

1. Montrer que P possède deux racines distinctes ϕ (la racine positive) et ϕ' sur $\mathbb{R}$ et une seule racine, nommément, 3, sur $\mathbb{F}_5$.
2. **Méthode par l'espace des suites.** Soit $\mathbb{U}_\mathrm{P}$ l'espace vectoriel des suites récurrentes linéaires d'équation caractéristique P.
   (a) **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.** Montrer que les deux suites géométriques (ϕ^n) et (ϕ'^n) forment une base de $\mathbb{U}_\mathrm{P}$. En déduire la formule annoncée pour F_n.
   (b) **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$.** Montrer que les deux suites géométriques (3^n) et $(n3^{n-1})$ forment une base de $\mathbb{U}_\mathrm{P}$. En déduire la formule annoncée pour F_n.
3. **Méthode par les séries génératrices.** Soit $\mathrm{R} := \sum_{n\geqslant 0}\mathrm{F}_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[[\mathrm{X}]]$ la série génératrice de $(\mathrm{F}_n)_n$ dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{K}[[\mathrm{X}]]$. Montrer que R est la fraction rationnelle $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}-\mathrm{X}^2}$. En déduire les formules annoncées pour F_n dans les deux cas[9].
4. **Méthode par les matrices compagnon.** On note $\mathrm{A} := \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ la matrice compagnon (transposée) du polynôme P, de sorte que $\mathrm{A}\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{F}_n\\ \mathrm{F}_{n+1}\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\mathrm{F}_{n+1}\\ \mathrm{F}_{n+2}\end{smallmatrix}\right)$.

   Montrer par récurrence que $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix}\mathrm{F}_{n-1} & \mathrm{F}_n\\ \mathrm{F}_n & \mathrm{F}_{n+1}\end{pmatrix}$.

(a) **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.** Calculer les projecteurs spectraux de A et en déduire la formule annoncée pour F_n.

(b) **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$.** Montrer que $A = 3I_2 + (A - 3I_2)$ est la décomposition de Dunford de A. En déduire la formule annoncée pour F_n. Quelle est la période de F_n modulo 5 ? Quelle est la période des unités de la suite de Fibonaccci dans leur écriture décimale ?

Soluce

1. Le discriminant de P vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$. Comme $\Delta > 0$, c'est un carré sur $\mathbb{R}$, mais $\Delta = 0$ sur $\mathbb{F}_5$. Il possède donc deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$ et une seule racine sur $\mathbb{F}_5$. On vérifie facilement que $P(3) = 5 = 0$ sur $\mathbb{F}_5$.
2. **Méthode par l'espace des suites.** On vérifie en effet que l'ensemble $\mathscr{F}$ des suites (u_n) qui vérifient $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ forme un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. De plus, il est clair que, vu qu'une suite (u_n) de $\mathbb{U}_P$ est entièrement déterminée par la donnée arbitraire de ses deux premiers termes, on a un isomorphisme entre les espaces $\mathbb{U}_P$ et $\mathbb{K}^2$ qui envoie la suite (u_n) de $\mathbb{U}_P$ sur le couple (u_0, u_1) de $\mathbb{K}^2$. Conclusion $\dim \mathbb{U}_P = 2$.
   (a) **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.** Si λ est une racine de P, alors $\lambda^2 = \lambda + 1$ et donc $\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$, ce qui prouve que la suite (λ^n) est bien une suite $\mathscr{F}$. Pour montrer que (ϕ^n) et (ϕ'^n) forme une base, il suffit de montrer que son image par l'isomorphisme ci-dessus est une base. On calcule donc le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \phi' \end{vmatrix} = \phi' - \phi = -\sqrt{5} \neq 0$, ce qui assure l'assertion.
   Il en résulte que l'on peut décomposer la suite (F_n) dans cette base ; il existe deux scalaires a et b tels que $F_n = a\phi^n + b\phi'^n$. En posant $n = 0$, il vient $a + b = 0$, et $n = 1$ nous donne $a\phi + b\phi' = 1$. On trouve bien $F_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\phi - \phi'}$ pour tout n.
   (b) **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$.** Comme $P(3) = 0$, (3^n) est bien une suite de $\mathscr{F}$. On doit montrer que $(n3^{n-1})$ en est une également. Comme 3 est racine double, on a $P'(3) = 0$, et donc, à l'aide d'un développé-regroupé :
   $$(n+2)3^{n+2} - (n+1)3^{n+1} - n3^n = n3^n P(3) + 3^{n+1}P'(3) = 0.$$
   Comme précédemment, on montre que les deux suites (3^n) et $(n3^n)$ forment une base en calculant le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Encore une fois, on a prouvé l'existence de deux scalaires a et b tels que $F_n = a3^n + bn3^{n-1}$ pour tout n. En posant $n = 0$ et $n = 1$, on trouve respectivement $a = 0$ et $b = 1$, et donc $F_n = n3^{n-1}$ pour tout n.
3. On remarque que
$$\begin{aligned}(1 - X - X^2)R &= \sum_{n\geqslant 0} F_n X^n - \sum_{n\geqslant 0} F_n X^{n+1} - \sum_{n\geqslant 0} F_n X^{n+2} \\ &= X + \sum_{n\geqslant 0} F_{n+2} X^{n+2} - \sum_{n\geqslant 0} F_{n+1} X^{n+2} - \sum_{n\geqslant 0} F_n X^{n+2} \\ &= X + \sum_{n\geqslant 0} (F_{n+2} - F_{n+1} - F_n) X^{n+2} = X.\end{aligned}$$

D'où le premier résultat annoncé. Notons que $1 - X - X^2$ est le *polynôme réciproque*[10] de P et, à ce titre, ses racines sont les racines inverses de celles de P.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fraction rationnelle $\frac{1}{1-X-X^2}$ possède deux pôles simples $1/\phi$ et $1/\phi'$, et donc, vu que $\phi\phi' = -1$ (relation coefficients-racines), on a

$$\frac{X}{1-X-X^2} = \frac{X}{(\phi X-1)(\phi' X-1)} = \frac{a}{\phi X-1} + \frac{a'}{\phi' X-1},$$

où a est $\frac{(\phi X-1)X}{1-X-X^2}$ évalué en $1/\phi$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{\phi'-\phi}$, et de même, $a' = \frac{1}{\phi-\phi'}$. Il vient donc

$$R = \frac{1}{\phi-\phi'}\left(\frac{1}{1-\phi X} - \frac{1}{1-\phi' X}\right).$$

En décomposant en série géométrique[11], il vient

$$R = \frac{1}{\phi-\phi'}\sum_{n\geqslant 0}(\phi^n - \phi'^n)X^n,$$

et donc, $F_n = \frac{\phi^n-\phi'^n}{\phi-\phi'}$ pour tout n.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$, alors, en dérivant la formule de la série géométrique $\frac{1}{1-Y} = \sum_{n\geqslant 0} Y^n$ par rapport à Y, puis en posant $Y = 3X$, il vient $\frac{1}{(1-3X)^2} = \sum_{n\geqslant 0} n(3X)^{n-1}$, et donc

$$\frac{X}{1-X-X^2} = \frac{X}{(1-3X)^2} = X\left(\sum_{n\geqslant 0} n(3X)^{n-1}\right) = \sum_{n\geqslant 0} n3^{n-1}X^n.$$

On retrouve donc dans ce cas $F_n = n3^{n-1}$ pour tout n.

4. **Méthode par les matrices compagnon.** La récurrence demandée est immédiate en utilisant $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
   (a) **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.** Le polynôme caractéristique de la matrice compagnon A est $P = X^2 - X - 1 = (X-\phi)(X-\phi')$, et comme les racines de P sont distinctes, $(X-\phi)$ et $(X-\phi')$ sont premiers entre eux avec la relation de Bezout :

$$\frac{1}{\phi-\phi'}(X-\phi') - \frac{1}{\phi-\phi'}(X-\phi) = 1.$$

   Le projecteur spectral Π_ϕ, resp. $\Pi_{\phi'}$, sur le sous-espace propre E_ϕ, resp. $E_{\phi'}$, associé à la valeur propre ϕ, resp. ϕ', et parallèlement au sous-espace propre $E_{\phi'}$, resp. E_ϕ, est donné par

$$\Pi_\phi = \frac{1}{\phi-\phi'}(A-\phi' I_2),\ \Pi_{\phi'} = \frac{1}{\phi'-\phi}(A-\phi I_2).$$

   Donc,

$$\begin{aligned} A^n &= A^n I_2 = A^n\left(\Pi_\phi + \Pi_{\phi'}\right) \\ &= \phi^n\Pi_\phi + \phi'^n\Pi_{\phi'} = \frac{1}{\phi-\phi'}\left((\phi^n-\phi'^n)A - (\phi^n\phi' - \phi'^n\phi)I_2\right) \\ &= \frac{1}{\phi-\phi'}\left((\phi^n-\phi'^n)A + (\phi^{n-1}-\phi'^{n-1})I_2\right). \end{aligned}$$

10. C'est aussi le polynôme $P(-X)$, mais on préfère partir sur le polynôme réciproque pour comprendre le phénomène dans sa généralité, c'est-à-dire pour une suite linéaire récurrente quelconque.
11. Quitte à se répéter, ceux qui ne sont pas à l'aise avec les séries formelles peuvent travailler sur des séries entières en remplaçant l'indéterminée X par le nombre complexe z , en vérifiant que le rayon de convergence $R > 0$. En revanche, sur $\mathbb{F}_5$, on n'a pas le choix !

On trouve une fois de plus $F_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\phi - \phi'}$.

(b) **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$.** Dans ce cas, 3 est valeur propre double de A et donc $N = A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est nilpotente (non nulle !). En dimension 2, cela signifie, par Cayley-Hamilton, que $N^2 = 0$. Donc, par le binôme de Newton, que l'on peut appliquer car $3I_2$ et N commutent :

$$A^n = (3I_2 + N)^n = 3^n I_2 + n3^{n-1} N = \begin{pmatrix} a & n3^{n-1} \\ n3^{n-1} & b \end{pmatrix},$$

où a et b n'ont pas besoin d'être calculés[12]. Il vient $F_n = n3^{n-1}$.

Comme I_2 et N forment une partie libre, la période d'une suite de la forme $a_n I_2 + b_n N$, pour deux suites périodiques (a_n) et (b_n) est la même que la période de la suite (a_n, b_n), c'est-à-dire le ppcm des périodes des deux suites. Or, l'expression de A^n prouve que la période de F_n est exactement celle de A^n. On va montrer que, modulo 5, 3^n est de période 4 et $n3^{n-1}$ de période 20, ce qui va prouver que F_n est de période 20 modulo 5.

Comme 3 est dans le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_5^*$, son ordre divise 4 par Lagrange[13], et on vérifie que c'est exactement 4, vu que $3^2 = -1$ modulo 5. Soit $k \in \mathbb{Z}$ une période de la suite de $\mathbb{F}_5$ $(\overline{n3^{n-1}})$. On a donc pour tout entier n, $\overline{(n+k)3^{n+k-1}} = \overline{n3^{n-1}}$ modulo 5, pour tout n. En posant $n = 0$ dans l'égalité, et en notant que 3 est inversible modulo 5, on trouve $\overline{k} = 0$ modulo 5. Donc $k = 5k'$ pour un entier k'. Il vient donc $\overline{(n+5k')3^{n+5k'-1}} = \overline{n3^{n-1}}$ modulo 5, et donc $\overline{n3^{n+5k'-1}} = \overline{n3^{n-1}}$. Comme 3 est inversible modulo 5, ceci donne $\overline{n3^{5k'}} = \overline{n}$. En choisissant $n = 1$, et en remarquant que $3^5 = 3$ modulo 5, on trouve $3^{k'} = 1$ modulo 5 et donc, k' est multiple de 4. Ainsi, la période de la suite de $\mathbb{F}_5$ $(n3^{n-1})$ est 20.

La dernière question revient à chercher la périodicité de F_n modulo 10. Par le lemme chinois, on a l'isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Or, la suite de Fibonacci modulo 2 a pour premiers termes $0, 1, 1, 0, 1, \cdots$. On voit qu'elle est de période 3. On est ramené à comprendre la période d'une suite (a_n, b_n), sachant que a_n est de période 3 et b_n de période 20. La période cherchée modulo 10 est donc le ppcm de 3 et 20, c'est-à-dire 60.

12. Pour le fun, $a = 3^n - n3^n = 3^{n-2}(9 - 9n) = 3^{n-2}(n-1)$, et $b = (n+1)3^n$, comme on pouvait s'y attendre.

13. On est toujours en Analystan là, y a pas un problème avec le GPS ?

Chapitre 6

Séries numériques

6.1 Formule d'Abel

Exercice 23 (Formule sommatoire d'Abel & applications)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels, et soit $x \geqslant 1$. On note $\mathrm{A}(x)$ la somme des termes d'indice inférieur ou égal à x, c'est-à-dire :

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n = \sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor} a_n,$$

où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x.

On considère f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, réelle ou complexe, sur $[1,+\infty[$.

Le but de cet exercice est de démontrer la formule sommatoire d'Abel :

$$\forall x \in [1,+\infty[\,,\quad \sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n f(n) = \left(\sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n\right) f(x) - \int_1^x \left(\sum_{1\leqslant n\leqslant t} a_n\right) f'(t)\mathrm{d}t.$$

1. En découpant l'intégrale en somme d'intégrales sur $[1,2],\ldots,\big[\lfloor x\rfloor-1,\lfloor x\rfloor\big]$, $\big[\lfloor x\rfloor, x\big]$, démontrer que l'on a

$$\int_1^x \mathrm{A}(t)f'(t)\mathrm{d}t = \sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor-1} \mathrm{A}(m)(f(m+1)-f(m)) + \mathrm{A}(\lfloor x\rfloor)\left(f(x)-f(\lfloor x\rfloor)\right).$$

2. En déduire la formule sommatoire d'Abel sous la forme :

$$\int_1^x \mathrm{A}(t)f'(t)\mathrm{d}t = -\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor} a_m f(m) + \mathrm{A}(x)f(x)$$

Soluce

1. On écrit, malgré nos réticences naturelles à suivre l'indication donnée par l'énoncé :

$$\int_1^x \mathrm{A}(t)f'(t)\mathrm{d}t = \sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor-1} \int_m^{m+1} \mathrm{A}(t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x\rfloor}^x \mathrm{A}(t)f't)\mathrm{d}t.$$

Or, dans la première intégrale, t varie entre deux entiers consécutifs, donc, $\mathrm{A}(t)$ est constant et vaut $\mathrm{A}(m)$. De même, dans la seconde intégrale, on a $\mathrm{A}(t) = \mathrm{A}(\lfloor x \rfloor)$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_1^x \mathrm{A}(t)f'(t)\mathrm{d}t &= \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor -1} \int_m^{m+1} \mathrm{A}(m)f'(t)\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x \rfloor}^x \mathrm{A}(\lfloor x \rfloor)f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor -1} \mathrm{A}(m) \int_m^{m+1} f'(t)\mathrm{d}t + \mathrm{A}(\lfloor x \rfloor) \int_{\lfloor x \rfloor}^x f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor -1} \mathrm{A}(m)(f(m+1) - f(m)) + \mathrm{A}(\lfloor x \rfloor)(f(x) - f(\lfloor x \rfloor))
\end{aligned}$$

On tombe sur la formule souhaitée.

2. En remarquant que $\mathrm{A}(x) = \mathrm{A}(\lfloor x \rfloor)$, la formule d'Abel se déduit de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\int_1^x \mathrm{A}(t)f'(t)\mathrm{d}t &= \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor -1} \mathrm{A}(m)f(m+1) - \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor -1} \mathrm{A}(m)f(m) - \mathrm{A}(\lfloor x \rfloor)f(\lfloor x \rfloor) + \mathrm{A}(x)f(x) \\
&= \sum_{m=2}^{\lfloor x \rfloor} \mathrm{A}(m-1)f(m) - \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathrm{A}(m)f(m) + \mathrm{A}(x)f(x) \\
&= -\sum_{m=2}^{\lfloor x \rfloor} (\mathrm{A}(m) - \mathrm{A}(m-1))f(m) - \mathrm{A}(1)f(1) + \mathrm{A}(x)f(x) \\
&= -\sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} a_m f(m) + \mathrm{A}(x)f(x)
\end{aligned}$$

Et la formule sommatoire d'Abel est démontrée.

Exercice 24 (Formule d'Abel et constante d'Euler)

1. Écrire la formule obtenue précédemment, avec $a_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f(x) = \frac{1}{x}$, pour $x \in [1, +\infty[$.
2. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = 1 - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} \mathrm{d}t.$$

3. En déduire l'existence de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$, et en donner une expression intégrale.
   Cette limite n'est autre que *la constante d'Euler.*

Soluce

1. Si l'on prend $a_n = 1$ pour tout n, on obtient, pour $x \in [1, +\infty[$,

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} 1 = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} 1 = \lfloor x \rfloor.$$

De plus, pour $f(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \geqslant 1$, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

La formule d'Abel donne alors

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant x} \frac{1}{k} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} \mathrm{d}t.$$

2. En écrivant $\ln n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$, et en appliquant la formule établie ci-dessus avec $x = n$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \frac{\lfloor n \rfloor}{n} + \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} \mathrm{d}t - \int_1^n \frac{t}{t^2} \mathrm{d}t = 1 - \int_1^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} \mathrm{d}t.$$

3. On veut montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$ admet une limite en l'infini ; d'après ce qui précède, il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} \mathrm{d}t$.
L'inégalité

$$0 \leqslant \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2},$$

valable pour tout $t \geqslant 1$, montre que l'intégrale est convergente par comparaison à l'exemple de Riemann.

On en déduit l'existence de la limite souhaitée, γ, qui en passant, est comprise entre 0 et 1.

Exercice 25 (Formule d'Abel et équivalence d'une série)
On étudie ici une autre application de la formule sommatoire d'Abel.

On souhaite donner un équivalent, pour N entier qui tend vers l'infini, de $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln n$.

1. Reprendre la formule sommatoire d'Abel avec $a_n = 1$, et pour f, la fonction logarithme.
2. En déduire un équivalent pour $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln n$.

Soluce

1. On prend, comme indiqué, $a_n = 1$, pour tout n, de sorte à avoir, de même que dans l'exercice 24 précédent, $\mathrm{A}(x) = \lfloor x \rfloor$, pour tout $x \geqslant 1$, et $f(x) = \ln x$, pour $x \geqslant 1$.

   La formule d'Abel s'écrit alors, pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln n = \mathrm{N} \ln \mathrm{N} - \int_1^{\mathrm{N}} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} \mathrm{d}t.$$

2. Comme, pour tout t, on a $0 \leqslant \lfloor t \rfloor \leqslant t$:
$$0 \leqslant \int_1^{\mathrm{N}} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} \mathrm{d}t \leqslant \int_1^{\mathrm{N}} \mathrm{d}t = \mathrm{N} - 1.$$
Or, comme $\mathrm{N} - 1$ est négligeable devant $\mathrm{N} \ln \mathrm{N}$, on obtient l'équivalent :
$$\ln \mathrm{N}! = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln n \sim \mathrm{N} \ln \mathrm{N}.$$

6.2 Fonction zêta de Riemann

Exercice 26 (Fonction zêta de Riemann)
Pour s réel strictement supérieur à 1, on pose
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Montrer que ζ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, et exprimer sa dérivée.
2. En effectuant une comparaison série-intégrale, montrer que
$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{s-1} \leqslant \zeta(s).$$
3. En déduire la limite de ζ en $+\infty$, ainsi qu'un équivalent de ζ en 1^+.
4. Montrer que l'on a :
$$\forall s > 1, \quad \zeta(s)\, \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \mathrm{d}t,$$
où, naturellement, Γ est la fonction d'Euler définie pour tout réel $s > 0$ par
$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

Soluce

1. Pour montrer que ζ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, il suffit de démontrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 1$.
Fixons donc $a > 1$. Tout d'abord, la fonction ζ est limite simple, sur $]1, +\infty[$, de la série
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$
Montrons à présent que la série des dérivées converge uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$. On a, pour tout $s > a$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\frac{1}{n^s} \right) = -\frac{\ln n}{n^s}.$$

La fonction $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ est donc $\mathscr{C}^1$.
De plus, en écrivant $a = 1 + 2h$, $h > 0$, on obtient

$$\frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^h} \times \frac{1}{n^{1+h}} = o\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right),$$

puisque, lorsque h est fixé,

$$\frac{\ln n}{n^h} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $h > 0$, le critère de Riemann assure que la série de terme général $1/n^{1+h}$ converge ; on en déduit donc la convergence de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln n}{n^a}.$$

Comme de plus, pour tout $s \geqslant a$, on a

$$0 \leqslant \frac{\ln n}{n^s} \leqslant \frac{\ln n}{n^a},$$

on en déduit que la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{-\ln n}{n^s} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{n^s}\right)$$

converge normalement, donc uniformément, sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Cela montre que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle, et que sa dérivée est donnée par

$$\forall s \geqslant a, \quad \zeta'(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{-\ln n}{n^s}.$$

Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, la conclusion est également valable sur $]1, +\infty[$ et l'on obtient le résultat voulu.

2. Notons tout d'abord que, en utilisant de manière classique le critère de Riemann sur les intégrales, la fonction $t \mapsto 1/t^s$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.

   À présent, effectuons une comparaison série-intégrale. Pour tout $s > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \frac{1}{n^s}.$$

   D'après la question 1, les séries convergent sur $]1, +\infty[$; on peut donc effectuer une sommation, pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},$$

   c'est-à-dire, par changement de variable et par linéarité de l'intégrale,

$$\zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \zeta(s).$$

3. Utilisons l'encadrement précédent pour en déduire la limite de la fonction ζ aux bornes de l'intervalle $]1, +\infty[$. D'après ce qui précède, on a, pour tout $s > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\zeta(s) - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \zeta(s).$$
Comme
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{t^{s-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1},$$
on en déduit l'encadrement
$$\frac{1}{s-1} \leqslant \zeta(s) \leqslant \frac{1}{s-1} + 1.$$
Ainsi, lorsque $s \to 1^+$, on a
$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}.$$
Pour étudier la limite en l'infini, observons que ζ est une série à termes positifs, dont le premier terme est 1. On a donc, pour tout $s > 1$,
$$1 \leqslant \zeta(s).$$
On en déduit, pour tout $s > 1$, l'encadrement
$$1 \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \frac{1}{s-1}.$$
Par le théorème des gendarmes, on a alors
$$\zeta(s) \underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

4. Posons $s > 1$. Écrivons un développement en série de l'élément $1/(\mathrm{e}^t - 1)$: pour $t > 0$, on a
$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}.$$
On peut donc écrire
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\right) \mathrm{d}t.$$
Supposons pour le moment que l'on peut allègrement intervertir somme et intégrale [1] ; on obtient alors
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} t^{s-1} \mathrm{d}t$$
Par le changement de variables $u = nt$, qui est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, on obtient
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \frac{u^{s-1}}{n^{s-1}} \frac{\mathrm{d}u}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \Gamma(s)\zeta(s).$$

1. La justification ne saurait tarder.

On obtient bien l'égalité souhaitée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(s)\zeta(s).$$

Reste maintenant à justifier proprement l'interversion somme/intégrale. Pour $s > 1$ fixé, posons alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(t) := t^{s-1} e^{-nt}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque, en 0, f_n est continue et équivalente à $t \mapsto t^{s-1}$, intégrable par le critère de Riemann car $s > 1$; et en l'infini, elle est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$, puisque intégrable, par le même critère.

De plus, comme les fonctions f_n sont positives sur $\mathbb{R}_+^*$, il reste à vérifier que la série des

$$\sum_{n \geqslant 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n| = \sum_{n \geqslant 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n$$

converge. Or, par le calcul effectué précédemment, on obtient

$$\sum_{n \geqslant 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n = \sum_{n \geqslant 1} \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{s-1} e^{-nt} dt = \Gamma(s)\, \zeta(s),$$

ce qui prouve la convergence voulue, et justifie l'interversion somme-intégrale par le théorème d'interversion de Lebesgue.

Exercice 27

On rappelle que $\zeta(s) = \sum_{k \geqslant 1} k^{-s}$ pour $s > 1$. Le but de cet exercice est de démontrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}} = 1.$$

1. Établir la formule annoncée en utilisant la définition de $\zeta(2n)$ et en permutant l'ordre de sommation.
2. (a) Démontrer que pour n entier non nul, on a :

$$\frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1} dx = \zeta(2n).$$

   (b) En déduire la formule annoncée.
3. Dans l'exercice 42, il est démontré que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

   En déduire que pour t réel tel que $0 < |t| < 1$, on a :

$$\sum_{k \geqslant 1} \zeta(2n) t^{2n} = \frac{1 - \pi t \cot(\pi t)}{2},$$

   puis la formule annoncée.

Remarque. Cet exercice est tiré de Math Stack Exchange. Il permet d'utiliser un certain nombre de théorèmes d'inversion de sommes et d'intégrales.

Soluce

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}} &= \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{2^{2n-1}k^{2n}}\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^{2n-1}k^{2n}} = \sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{(4k^2)^{2n}} \qquad \text{par l'exercice 32}\\ &= 2\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{4k^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4k^2}} = 2\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{4k^2-1}\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) = 1,\end{aligned}$$

la dernière somme étant télescopique.

2. (a) Soit $n \geqslant 1$. La fonction $x \mapsto x^{2n-1}/(\mathrm{e}^x - 1)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$; elle est équivalente à x^{2n-2} au voisinage de 0 et négligeable devant $\mathrm{e}^{-x/2}$ au voisinage de l'infini. L'intégrale suivante existe donc, et un développement en série entière donne :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{2n-1}\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{2n-1}\sum_{p\geqslant 0}\mathrm{e}^{-(p+1)x}\mathrm{d}x.$$

Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite $f_{\mathrm{P}} : x \mapsto x^{2n-1}\sum_{p=0}^{\mathrm{P}}\mathrm{e}^{-(p+1)x}$ ($\mathrm{P} \in \mathbb{N}$) permet de permuter la somme et l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} x^{2n-1}\sum_{p\geqslant 0}\mathrm{e}^{-(p+1)x}\mathrm{d}x = \sum_{p\geqslant 0}\int_0^{+\infty} x^{2n-1}\mathrm{e}^{-(p+1)x}\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 1}\int_0^{+\infty} x^{2n-1}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x.$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a en posant $t = kx$:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n-1}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{t^{2n-1}}{k^{2n-1}}\mathrm{e}^{-t}\,\frac{1}{k}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^{2n}}\Gamma(2n) = \frac{(2n-1)!}{k^{2n}}$$

(on peut calculer l'intégrale par récurrence grâce à une intégration par parties sans faire appel à la fonction gamma de l'exercice 54). On en déduit en sommant sur k :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 1}\frac{(2n-1)!}{k^{2n}} = (2n-1)!\zeta(2n).$$

(b) La série de terme général $\zeta(2n)/2^{2n-1}$ est convergente puisque l'on a $\zeta(2n) \leqslant \zeta(2)$. D'où, par convergence monotone encore une fois pour l'égalité non évidente :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}} &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(\mathrm{e}^x-1)}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\mathrm{e}^{x/2}(\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2})}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\mathrm{d}x = 1.\end{aligned}$$

3. Pour $t = 0$, l'égalité est triviale. Si $0 < |t| < 1$, on a en prenant $x = \pi t$ dans le développement de la cotangente :

$$\begin{aligned}1 - \pi t\cot(\pi t) &= 2\pi^2 t^2 \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\pi^2 k^2 - \pi^2 t^2} = 2\pi^2 t^2 \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\pi^2 k^2} \times \frac{1}{1 - \frac{t^2}{k^2}} \\ &= 2\sum_{k\geqslant 1} \frac{t^2}{k^2} \sum_{p\geqslant 0} \frac{t^{2p}}{k^{2p}} = 2\sum_{k\geqslant 1}\sum_{p\geqslant 0} \frac{t^{2p+2}}{k^{2p+2}} = 2\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^{2n}}{k^{2n}} \\ &= 2\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1} \frac{t^{2n}}{k^{2n}} = 2\sum_{k\geqslant 1} \zeta(2n) t^{2n}.\end{aligned}$$

(NB : La permutation des sommations est justifiée par l'exercice 32, plus précisément par la question 1 si t est positif donc par la question 2 pour t quelconque.)

La formule tant désirée et tant démontrée résulte du choix $t = 1/2$.

Remarque. Les deux premières méthodes sont astucieuses mais la troisième apporte plus information. Elle permet par exemple de calculer :

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n-1}} = \frac{\pi}{2}\coth\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{e^{\pi} - 1} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

La première méthode buterait sur la somme $\sum_{k\geqslant 1} 1/(4k^2 + 1)$.

6.3 Tests de convergence

Exercice 28 (Règle de Raabe-Duhamel pour le test de d'Alembert)
Pour déterminer si une série réelle converge ou non, le critère de d'Alembert nous rend bien souvent service. Cependant, il arrive de tomber sur le cas que personne ne veut croiser :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Le critère qu'il faut alors utiliser dans ce cas est le critère de Raabe-Duhamel, que l'on va détailler ici.

Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

pour un certain réel α. On veut alors montrer le critère de Raabe-Duhamel : la série de terme général (u_n) converge si et seulement si $\alpha > 1$.

1. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$, où $v_n = \ln(n^{\alpha} u_n)$, $n > 0$, est convergente.
2. En déduire l'existence d'un réel strictement positif λ tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^{\alpha}}.$$

3. Démontrer alors le critère de Raabe-Duhamel.
4. Exemples d'emploi.
   (a) Déterminer la nature de la série de terme général

   i) $u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{1}{\sqrt{n}}$

   ii) $v_n = \frac{n\,n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

   iii) $w_n = \left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}\right)^a$, $a \in \mathbb{R}$

   (b) On considère la suite donnée par la condition initiale $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n,

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

   où a et b sont deux réels strictement positifs. Étudier suivant les valeurs des réels a et b la convergence de la série de terme général u_n.
5. On reprend la première question avec l'hypothèse (plus faible) suivante :

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   Préciser les valeurs de α pour lesquelles on peut conclure à la convergence de la série $\sum u_n$, pour lesquelles on peut conclure à sa divergence, et pour lesquelles on ne peut conclure. Indication : on pourra utiliser la suite donnée par $v_n = \ln(n^\beta u_n)$ où β est un réel différent de α.

Soluce

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'hypothèse sur la suite (u_n), ainsi qu'un développement limité de la fonction logarithme, on écrit :

   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \left(-\frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

   Ainsi, $|v_{n+1} - v_n|$ est dominé par le terme général d'une série convergente, par le critère de Riemann, donc, la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge absolument, donc, converge.
2. On a vu dans la question précédente que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge ; Or, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, par téléscopage, on a :

   $$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (v_{n+1} - v_n) = v_{\mathrm{N}+1} - v_0.$$

La convergence de la série implique donc la convergence de la suite (v_n) : il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ln(n^\alpha u_n) = v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu.$$

On en déduit l'existence de $\lambda := \mathrm{e}^\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

On a donc bien l'équivalence en l'infini :

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}.$$

3. Le critère de Duhamel se déduit directement de la question 2, où l'on a obtenu un équivalent en $1/n^\alpha$ du terme u_n. Par le critère de Riemann, la série de terme général λ/n^α converge si et seulement si $\alpha > 1$; donc, comme équivalent de ce terme, il en va de même pour la série $\sum u_n$.
4. (a) (i) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1\cdot 3 \cdots (2(n+1)-1)}{2\cdot 4\cdots(2(n+1))}\cdot\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \\
&= \sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{2n+1}{2n+2} \\
&= \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\
&= \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= 1-\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel démontré précédemment, on en déduit l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n},$$

qui est le terme général d'une série divergente. Ainsi, $\sum u_n$ diverge.

Remarque (autre méthode). La définition de la suite (u_n) n'est pas sans rappeler les intégrales de Wallis [2], définies par

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

... Et à raison, puisque, en utilisant une intégration par parties, on obtient la relation de récurrence

$$\mathrm{I}_n = \frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2},$$

2. Dont l'étude est détaillée dans [7].

ce qui implique que, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{I}_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3 \cdot 1}{2p(2p-2)\cdots 2} \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$u_n = \mathrm{I}_{2n} \frac{2}{\pi\sqrt{n}}.$$

Or, en poursuivant l'étude de l'intégrale de Wallis, on obtient l'équivalent en l'infini

$$\mathrm{I}_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On a alors

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

qui est le terme général d'une série divergente. En conclusion, la série $\sum u_n$ est divergente.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. De même, on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)(n+1)!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{nn!} \\
&= \frac{n+1}{a+n+1} \frac{n+1}{n} \\
&= \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \left(1 - \frac{a}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \frac{1-a}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On obtient alors l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1-a}}.$$

La convergence de la série $\sum u_n$ va dépendre de la valeur de $a \in \mathbb{R}_+^*$: si $a < 0$, la série $\sum u_n$ converge ; si $a \geqslant 0$, elle est divergente.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$\mathrm{I}_n := \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

On va établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. Par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^{n+1}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^3-t^3}{(1+t^3)^n}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{I}_n - \int_0^{+\infty} \frac{t^3\mathrm{d}t}{(1+t^3)^{n+1}} \\
&= \mathrm{I}_n - \int_0^{+\infty} t\cdot\frac{t^2}{(1+t^3)^{n+1}}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{I}_n - \left(\left[\frac{-t}{3n(1+t^3)^n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{3n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}\right) \\
&= \mathrm{I}_n\left(1-\frac{1}{3n}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant un développement limité, on en déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{I}_{n+1}^a}{\mathrm{I}_n^a} = \left(1-\frac{1}{3n}\right)^a = 1-\frac{a}{3n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement, on obtient l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{\frac{a}{3}}}.$$

Encore une fois, la convergence de la série $\sum u_n$ dépend de la valeur de $a \in \mathbb{R}$: si $a > 3$, la série converge ; sinon, elle diverge.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, reprenons la formule de récurrence définie dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}} = \left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)^{-1} &= \left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1-\frac{b}{n}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= 1+\frac{a-b}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On se ramène alors au cas de la question 1, et on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{b-a}}.$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si

$$b > 1 + a.$$

5. On suppose cette fois que l'on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Suivons l'indication de l'énoncé, en posant

$$v_n := \ln(n^\beta u_n),$$

où $\beta \neq \alpha$. On a de même que précédemment

$$v_{n+1}-v_n = \beta\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \beta\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\beta-\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où l'équivalent en l'infini :

$$v_{n+1}-v_n \sim \frac{\beta-\alpha}{n}.$$

Ainsi, la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ diverge, et donc, par télescopage, de la suite (v_n). Deux cas se présentent :

• Si $\beta-\alpha>0$, alors la suite v_n tend vers l'infini. Dans ce cas, on a

$$\mathrm{e}^{v_n} = n^\beta u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, on a

$$u_n \geqslant \frac{1}{n^\beta}.$$

Cette inégalité nous permet de dire quand la série $\sum u_n$ diverge ; en effet, si l'on prend $\alpha<1$, et $\beta\in\,]\alpha,1]$, on a bien $\beta-\alpha>0$, et $\beta\leqslant 1$, ce qui assure la divergence de la série de terme général $1/n^\beta$, et donc, par l'inégalité précédente, celle de terme général u_n.

On ne peut cependant pas conclure sur les cas de convergence de $\sum u_n$.

• Si $\beta-\alpha<0$, alors la suite v_n tend vers $-\infty$, et on a donc

$$\mathrm{e}^{v_n} = n^\beta u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas, à partir d'un certain rang, on a

$$u_n \leqslant \frac{1}{n^\beta}.$$

Cette fois, cette inégalité nous permet de dire quand la série $\sum u_n$ converge ; en effet, si l'on prend $\alpha>1$, et $\beta\in\,]1,\alpha[$, on a bien $\beta-\alpha<0$, et $\beta>1$, ce qui assure la convergence de la série de terme général $1/n^\beta$, et donc, par l'inégalité précédente, celle de terme général u_n.

Remarque. Observons un cas où $\alpha=1$, et l'où on ne peut pas appliquer le critère de Raabe-Duhamel ; posons, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{n\ln n}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{\ln n}{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-1}\\
&= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\\
&= 1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

On voit ici que l'on n'est ni dans le cadre du critère de Raabe-Duhamel, ni dans le cadre où l'on avait pu conclure sur la nature de $\sum u_n$ dans la question 5, puisque l'on se retrouve dans le cas limite où $\alpha = 1$.

En revanche, il est possible de conclure directement sur la nature de la série $\sum 1/(n \ln n)$, puisque c'est une série de Bertrand ; et par ce critère, cette série diverge.

6.4 Groupement de termes, comparaison et interversion

Exercice 29 (Groupement de termes, ou sommation par paquets)
Étant donnée une série $\sum u_n$ à termes réels ou complexes, on étudie la série obtenue en regroupant par paquets des termes d'indices consécutifs.

Plus précisément, soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\varphi(0) = 0$ et soit

$$v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$$

On veut étudier les liens entre la convergence de la série $\sum u_n$ et celle de la série $\sum v_n$.

1. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge et les deux séries ont même somme.
2. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, si la longueur des paquets est bornée et si la suite (u_n) tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge et les deux séries ont même somme.
3. Montrer que si la série $\sum v_n$ converge et si chaque paquet ne contient que des termes de même signe (donc $\sum u_n$ est supposée être à termes réels), alors la série $\sum u_n$ converge et les deux séries ont même somme.
4. Application : déterminer, suivant la valeur du réel α, la nature de la série de la série de terme général
$$u_n = \frac{(-1)^{\mathrm{E}(\sqrt{n})}}{n^\alpha}.$$

Soluce

1. Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Posons $\mathrm{S}_n := u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
v_0 &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{\varphi(1)-1}\\
v_1 &= u_{\varphi(1)} + \cdots + u_{\varphi(2)-1}\\
&\vdots\\
v_n &= u_{\varphi(n)} + \cdots + u_{\varphi(n+1)-1}
\end{aligned}$$

En sommant, on obtient alors

$$v_0 + \cdots + v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{\varphi(n+1)-1} = \mathrm{S}_{\varphi(n+1)-1}.$$

Or, par hypothèse, la série $\sum u_n$ est convergente, ce qui ce traduit par l'existence de S, finie, telle que

$$\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{S}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{S}_{\varphi(n+1)-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{S},$$

en tant que suite extraite de la suite $(\mathrm{S}_n)_n$. Ainsi, la convergence de la série $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$, et les deux séries ont bien même somme, S.

2. Supposons maintenant que la série $\sum v_n$ converge. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et considérons $\mathrm{S}_n = u_0 + \cdots + u_n$. Par hypothèse sur la suite (v_n), la suite $(\mathrm{S}_{\varphi(p)-1})$ est convergente, et tend vers une limite finie, S.

   De plus, comme la fonction φ est strictement croissante, à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle tend vers l'infini, ce qui implique que, pour ce n fixé, il existe un $p \in \mathbb{N}$, forcément unique, tel que :

$$n \in [\varphi(p);\varphi(p+1)[\,.$$

   Nous avons alors

$$\mathrm{S}_n = u_0 + \cdots + u_n = u_0 + \cdots + u_{\varphi(p)-1} + u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p)+1} + \cdots + u_n = \mathrm{S}_{\varphi(p)-1} + r_p,$$

   avec $r_p = u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p)+1} + \cdots + u_n$.

   Notons que, quand n tend vers $++\infty$, p aussi, par croissance de la fonction φ ; et l'on a alors, par inégalité triangulaire,

$$|r_p| = \left|u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p)+1} + \cdots + u_n\right| \leqslant \left|u_{\varphi(p)}\right| + \cdots + |u_n|\,.$$

   Comme l'entier n a été supposé compris entre $\varphi(p)$ et $\varphi(p+1)$ (strictement), on en déduit

$$|r_p| \leqslant \left|u_{\varphi(p)}\right| + \cdots + |u_n| \leqslant \left|u_{\varphi(p)}\right| + \cdots + \left|u_{\varphi(p+1)-1}\right| \leqslant \mathrm{M}\cdot \max_{\varphi(p)\leqslant k\leqslant\varphi(p+1)-1} |u_k|\,,$$

   où

$$\mathrm{M} := \max_{p\in\mathbb{N}}(\varphi(p+1)-\varphi(p)),$$

   qui correspond au nombre de termes, ou encore, la longueur du « paquet » étudié dans l'inégalité précédente ; donc, par hypothèse, M est fini.

   De plus, comme la suite (u_n) tend vers 0, on a

$$\max_{\varphi(p)\leqslant k\leqslant\varphi(p+1)-1} |u_k| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   ce qui montre que

$$r_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Ainsi, en rappelant que

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{\varphi(p)-1} + r_p,$$

   et en remarquant que, si n tend vers l'infini, alors, p aussi, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \lim_{p\to+\infty} \left(\mathrm{S}_{\varphi(p)-1} + r_p\right) = \mathrm{S} + 0 = \mathrm{S}.$$

   Donc, la série $\sum u_n$ converge, et elle a même somme que la série $\sum v_n$.

3. Attention, dans cette question, M n'est plus supposé fini. Reprenons l'inégalité précédente, avec n fixé dans $\mathbb{N}$, et p défini comme dans la question précédente ; on avait
$$|r_p| \leqslant \left|u_{\varphi(p)}\right| + \cdots + \left|u_{\varphi(p+1)-1}\right|.$$
Or, par hypothèse, chaque paquet ne contient que des termes de même signe ; on a donc
$$|r_p| \leqslant \left|u_{\varphi(p)}\right| + \cdots + \left|u_{\varphi(p+1)-1}\right| = \left|u_{\varphi(p)} + \cdots + u_{\varphi(p+1)-1}\right| = |v_p|,$$
et le terme $|v_p|$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini, puisque la série $\sum v_n$ est supposée convergente. Or, comme p tend vers l'infini avec n, on a donc
$$r_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et cela entraîne bien la convergence de la série de terme général u_n.
4. Soit la série de terme général u_n tel que défini dans l'énoncé ; on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$, et en choisissant pour φ la fonction $x \mapsto x^2$, qui possède bien les propriétés souhaitées, on a
$$v_n = \sum_{p=n^2}^{(n+1)^2-1} u_p = \sum_{p=n^2}^{n^2+2n} \frac{(-1)^{\mathrm{E}(\sqrt{n^2})}}{p^\alpha} = \sum_{p=n^2}^{n^2+2n} \frac{(-1)^n}{p^\alpha} = (-1)^n \sum_{p=n^2}^{n^2+2n} \frac{1}{p^\alpha}.$$
Il faut alors étudier plusieurs cas :
• Si $\alpha > 1$, alors, par le critère de Riemann, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
• Si $\alpha \leqslant 0$, il suffit de voir que le terme de la série des u_n ne tend pas vers 0 pour en déduire que la série $\sum u_n$ est divergente.
• Reste à étudier le cas où $0 < \alpha \leqslant 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons
$$\mathrm{A}_n := \sum_{p=n^2}^{n^2+2n} \frac{1}{p^\alpha}.$$
Comme $n^2 \leqslant p \leqslant n^2 + 2n$, et $\alpha > 0$, on obtient
$$\frac{2n+1}{(n^2+2n)^\alpha} \leqslant \mathrm{A}_n \leqslant \frac{2n+1}{n^{2\alpha}}.$$
Or,
$$\frac{2n+1}{(n^2+2n)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{2\alpha-1}}.$$
On voit alors ici deux sous-cas se profiler : si $0 < \alpha \leqslant 1/2$, et dans ce cas, $(2n+1)/(n^2+2n)^\alpha$ est équivalent à un terme qui ne tend pas vers 0, dont la série diverge, donc. Cela implique la divergence de la série $\sum v_n$. Ainsi, par la contraposée dans la question 1, on en déduit que, pour $0 < \alpha \leqslant 1/2$, $\sum u_n$ diverge.

Supposons à présent $1/2 < \alpha \leqslant 1$. Effectuons un développement asymptotique de $(2n+1)/(n^2+2n)^\alpha$:

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{(n^2+2n)^\alpha} = \frac{2n+1}{n^{2\alpha}}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-\alpha} &= \frac{2n+1}{n^{2\alpha}}\left(1-\frac{2\alpha}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \left(\frac{2}{n^{2\alpha-1}}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{2\alpha}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \frac{2}{n^{2\alpha-1}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\end{aligned}$$

On a ainsi montré :

$$\frac{2}{n^{2\alpha-1}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \leqslant \mathrm{A}_n \leqslant \frac{2}{n^{2\alpha-1}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),$$

ce qui prouve que

$$\mathrm{A}_n - \frac{2}{n^{2\alpha-1}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),$$

et donc que

$$v_n = (-1)^n\frac{2}{n^{2\alpha-1}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Pour conclure, utilisons le théorème spécial sur les séries alternées. Comme par hypothèse, $2\alpha-1>0$, la suite de terme général $2/n^{2\alpha-1}$, qui est de signe constant (positif strictement), tend vers 0 en décroissant. Ainsi, le théorème spécial s'applique, et on en déduit que $\sum v_n$ converge pour $1/2<\alpha\leqslant 1$. Finalement, par la question 3, on en déduit la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 30 (comparaison série-intégrale dans le cas $\mathscr{C}^1$)
Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dont la dérivée f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. (a) Montrer que f possède une limite finie en $+\infty$.
   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a :
   $$\int_n^x (t-x)f'(t)\,\mathrm{d}t = (x-n)f(n) - \int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
   (c) Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)-\int_n^{n+1} f$ est absolument convergente et que par conséquent les séries de termes généraux $f(n)$ et $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
   (d) Montrer enfin que la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale $\int_0^\infty f$ sont de même nature.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$.

Soluce

1. (a) Pour tout $x>0$, on a $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$; puisque f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le second membre de l'égalité précédente admet une limite finie en $+\infty$. Ainsi f possède une limite finie en $+\infty$.

(b) L'égalité à démontrer résulte d'une simple intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_n^x (t-x)f'(t)\mathrm{d}t &= \big[(t-x)f(t)\big]_n^x - \int_n^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= (x-n)f(n) - \int_n^x f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(c) D'après la question 1b, appliquée avec n quelconque et $x = n+1$:

$$\begin{aligned}\left|f(n) - \int_n^{n+1} f\right| &= \left|\int_n^{n+1} \big(t-(n+1)\big)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_n^{n+1} \big|t-(n+1)\big|\cdot|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puisque f' est intégrable, la série de terme général $\int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente donc celle de terme général u_n est absolument convergente . Par conséquent les séries de termes généraux $f(n)$ et $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (si l'une est convergente, l'autre l'est aussi comme somme de deux séries convergentes).

(d) Si l'intégrale $\int_0^{\infty} f$ est convergente, la série de terme général $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente donc, par ce qui précède, celle de terme général $f(n)$ aussi. Réciproquement, supposons que la série de terme général $f(n)$ est convergente. Toujours d'après ce qui précède, la série de terme général $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, ce qui équivaut à dire que la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie en $+\infty$. Montrons qu'il en de même de la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Soient $x > 0$ et $n = \lfloor x \rfloor$ sa partie entière, alors $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On traite le deuxième terme grâce à la question 1b (utiliser $0 \leqslant x-t \leqslant x-n \leqslant 1$) :

$$\left|\int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|(x-n)f(n) + \int_n^x (x-t)f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant |f(n)| + \int_n^{n+1} |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

Les deux termes du membre de droite tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini (rappel : n est la partie entière de x). En effet, comme la série $\sum f(k)$ est convergente, la suite $\big(|f(k)|\big)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et comme f' est intégrable, la suite $\left(\int_k^{k+1} |f'(t)|\mathrm{d}t\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 aussi. Il en est alors de même de $\int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t$; on en conclut que l'intégrale $\int_0^{\infty} f$ est convergente. Ainsi, la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{\infty} f$ sont de même nature.

2. Notons d'abord que les résultats des questions précédentes restent encore vrais si on remplace $\mathbb{R}_+$ par l'intervalle $[n_0, +\infty[$ où n_0 est un quelconque entier naturel et considérons la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin\sqrt{t}}{t}$; elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et $f'(t) = -\frac{\sin\sqrt{t}}{t^2} + \frac{\cos\sqrt{t}}{2t^{3/2}}$. Ainsi $|f'(t)| \leqslant \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t^{3/2}}$ et alors f' est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison avec une intégrale de Riemann ; d'après les résultats précédents la série de terme général u_n est de même nature que l'intégrale $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ montre que cette dernière intégrale est de même nature que l'intégrale $2\int_1^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ dont la convergence est notoire. Conclusion : la série de terme général $u_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ est convergente.

Remarque. Cette technique permet de montrer que la série $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 31 (Comparaison série-intégrale, bis)

1. Soit f une fonction continue positive décroissante intégrable définie sur $\mathbb{R}^+$. Montrer l'existence de la limite suivante et la calculer :

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{n\geqslant 0} tf(nt).$$

2. En déduire un équivalent lorsque u tend vers 1^- de $\sum_{n\geqslant 0} u^{n^2}$.

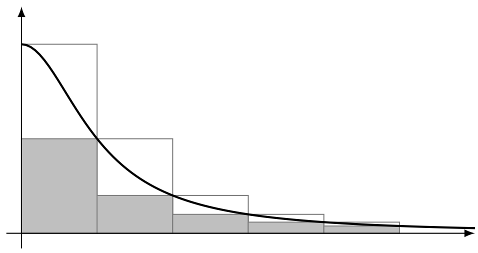


Figure 6.1 – Comparaison série-intégrale

Soluce

1. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ et $x \in \big[kt, (k+1)t\big]$, on a : $f\big((k+1)t\big) \leqslant f(x) \leqslant f(kt)$ d'où, en intégrant sur cet intervalle de longueur t :

$$tf\big((k+1)t\big) \leqslant \int_{kt}^{(k+1)t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant tf(kt).$$

En sommant, il vient (si $u_k = tf(kt)$, $\sum_{k=0}^n u_{k+1} = \sum_{k=0}^n u_k - u_0 + u_{n+1}$) :

$$\int_0^{(n+1)t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^n tf(kt) \leqslant \int_0^{(n+1)t} f(x)\mathrm{d}x + tf(0) - tf\big((n+1)t\big).$$

Les hypothèses sur f font que $\lim_{n\to+\infty} tf\big((n+1)t\big) = 0$. En faisant tendre n vers l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 0} tf(kt) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + tf(0), \text{ d'où } \lim_{t\to 0^+} \sum_{k\geqslant 0} tf(kt) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Lorsque u tend vers 1^-, $\ln(u)$ tend vers 0^-. Mieux : $\ln(u) \sim (u-1)$. On transforme le terme u^{n^2} pour le mettre sous la forme $f(nt)$: $u^{n^2} = e^{n^2 \ln u} = e^{-(n\sqrt{|\ln u|})^2}$. On est amené à poser $f(x) = e^{-x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, fonction dont l'intégrale vaut $\sqrt{\pi}/2$ d'après l'exercice 45. On en déduit que

$$\sum_{n\geqslant 0} u^{n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{|\ln u|}} \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{|\ln u|}\, e^{-(n\sqrt{|\ln u|})^2} \sim \frac{1}{\sqrt{1-u}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 32 (Permutation de sommes)
Soit $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $(n, p) \mapsto u_{n,p}$ une suite double.

1. On suppose que $u_{n,p}$ est un réel positif ou nul pour tout couple (n, p). Démontrer que
$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{p\geqslant 0} u_{n,p} = \sum_{p\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} u_{n,p} = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{i=0}^{k} u_{i,k-i}.$$
On pourra par exemple introduire la borne supérieure de l'ensemble des $\sum_{(n,p)\in \mathrm{A}} u_{n,p}$ *lorsque* A *parcourt les parties finies de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. En déduire que ces égalités restent vraies pour une suite double complexe quelconque telle que $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0} |u_{n,k}| < +\infty$.
3. Que se passe-t-il pour $u_{n,p} = (-1)^p/(n + p + 1)$?

Remarque. Le programme du concours ne permet pas de permuter l'ordre de sommation dans les séries (bien que figure le produit de Cauchy de deux séries), ce qui est souvent bien commode.

On voit dans que pour les séries positives, on peut librement permuter les sommes, qu'elles convergent ou pas. Pour des séries complexes (ou réelles de signe non constant), l'hypothèse de convergence absolue est indispensable.

Soluce

1. Soit
$$\mathrm{S} = \sup\left\{ \sum_{(n,p)\in \mathrm{A}} u_{n,p}, \quad \mathrm{A} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ et } \mathrm{A} \text{ fini} \right\}.$$
Montrons d'abord que S est égal à
$$\mathrm{S}_1 = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p\geqslant 0} u_{n,p} \right)$$
(que S et S_1 soient finies ou non). Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ une partie finie : elle est incluse dans le produit $\{0, \ldots, \mathrm{N}\} \times \{0, \ldots, \mathrm{P}\}$ pour N et P entiers convenables. Puisque tous les termes sont positifs, on a :
$$\sum_{(n,p)\in \mathrm{A}} u_{n,p} \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\sum_{p=0}^{\mathrm{P}} u_{n,p} \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\sum_{p\geqslant 0} u_{n,p} \leqslant \mathrm{S}_1.$$
Comme ceci est vrai pour A quelconque, on a : $\mathrm{S} \leqslant \mathrm{S}_1$.
Inversement, soient P et N deux entiers. Vu que $\{0, \ldots, \mathrm{N}\} \times \{0, \ldots, \mathrm{P}\}$ est une partie finie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{p=0}^{\mathrm{P}}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_{n,p} \leqslant \mathrm{S}.$$
Lorsque N est fixé et P tend vers l'infini, il vient :
$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\sum_{p\geqslant 0} u_{n,p} \leqslant \mathrm{S},$$

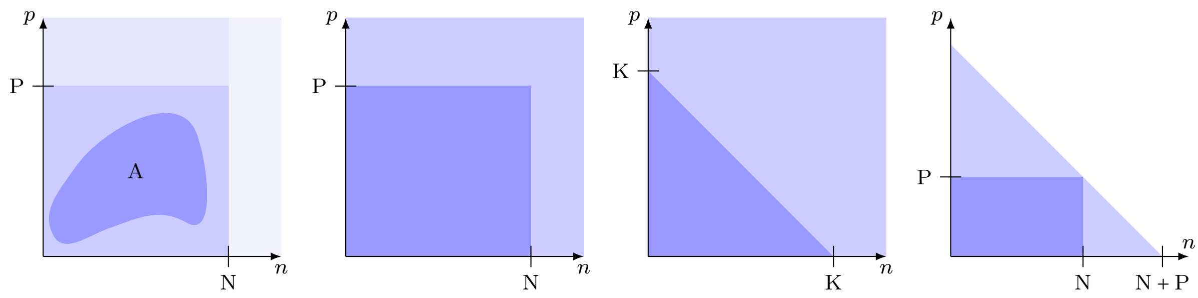


FIGURE 6.2 – Séries positives doubles : $S \leqslant S_1$, $S_1 \leqslant S$, $S_3 \leqslant S$, $S_1 \leqslant S_3$

puis en faisant tendre N vers l'infini : $S_1 \leqslant S$. Ainsi, $S = S_1$. De même, $S = S_2$. Enfin, soit

$$S_3 = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{i=0}^{k} u_{i,k-i}.$$

Pour tout K, on a :

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{i=0}^{k} u_{i,k-i} \leqslant S = S_1,$$

car la somme est de la forme $\sum_{(n,p)\in A} u_{n,p}$. Comme K est arbitraire : $S_3 \leqslant S_1$. Inversement, pour tous N et P, on a :

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} u_{n,p} \leqslant \sum_{k=0}^{N+P}\sum_{i=0}^{k} u_{i,k-i} \leqslant S_3,$$

d'où en faisant tendre N puis P vers l'infini : $S_1 \leqslant S_3$.

2. Soit n un entier. Par hypothèse, la série $\sum_p u_{n,p}$ est absolument convergente, notons sa somme $U_n = \sum_{p\geqslant 0} u_{n,p}$. On a : $|U_n| \leqslant \sum_{p\geqslant 0} |u_{n,p}|$, qui est le terme général d'une série convergente. Il en résulte que la série de terme général U_n est convergente. De même, pour p entier, la série de terme général $V_p = \sum_{n\geqslant 0} u_{n,p}$ est bien définie et convergente. Notons à nouveau :

$$S_1 = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{p\geqslant 0} u_{n,p} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{p\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} u_{n,p}.$$

Pour N et P entiers, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} U_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} u_{n,p}}_{\text{zone A}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N}\sum_{p\geqslant P+1} u_{n,p}}_{\text{zone B}} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{P} V_p = \underbrace{\sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{P} u_{n,p}}_{\text{zone A}} + \underbrace{\sum_{p=0}^{P}\sum_{n\geqslant N+1} u_{n,p}}_{\text{zone C}},$$

de sorte que

$$\left|\sum_{n=0}^{N} U_n - \sum_{p=0}^{P} V_p\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\sum_{p\geqslant P+1} |u_{n,p}| + \sum_{p=0}^{P}\sum_{n\geqslant N+1} |u_{n,p}|.$$

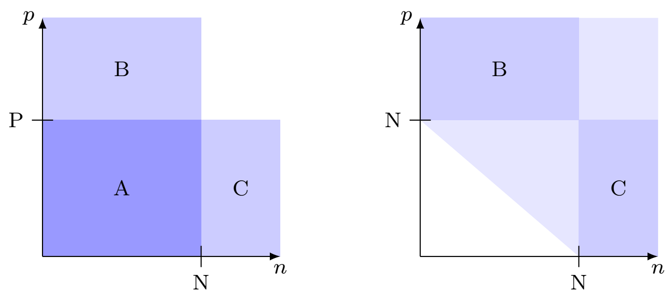


FIGURE 6.3 – Permutation de deux sommes de signe quelconque

Prenons $\mathrm{P} = \mathrm{N}$. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, si $p \geqslant \mathrm{N}+1$ ou si $n \geqslant \mathrm{N}+1$ alors $n+p \geqslant \mathrm{N}+1$. D'où :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \sum_{p\geqslant \mathrm{P}+1} |u_{n,p}| + \sum_{p=0}^{\mathrm{P}} \sum_{n\geqslant \mathrm{N}+1} |u_{n,p}| \leqslant \sum_{k\geqslant \mathrm{N}+1} \sum_{i=0}^{\mathrm{K}} |u_{i,j-i}|,$$

quantité qui tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini en vertu de la question 1. Ceci entraîne l'égalité des deux sommes, quel que soit l'ordre de sommation.

3. Prenons $u_{n,p} = (-1)/(n+p+1)$. Notons $v_p = u_{0,p} = (-1)^p/(p+1)$. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum v_p$ est convergente. Pour $p \geqslant 0$, soit $\mathrm{R}_p = \sum_{q\geqslant p+1} v_q$ son reste. Toujours par le critère spécial, la suite (R_p) est alternée et la suite $\left(|\mathrm{R}_p|\right)_{p\geqslant 0}$ est décroissante donc la série $\sum \mathrm{R}_p$ est convergente.
   Pour n fixé, la série $\sum_p u_{n,p}$ est convergente et sa somme est R_n. Par la remarque du paragraphe précédent, la somme $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{p\geqslant 0} u_{n,p}$ est bien définie.
   Inversement, fixons p. Comme la série harmonique diverge, la série $\sum_n u_{n,p}$ diverge. Aucune des sommes $\sum_{n\geqslant 0} u_{n,p}$ n'est définie, *a fortiori* la somme double $\sum_{p\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} u_{n,p}$ non plus.

Exercice 33 (Produit de Cauchy)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

1. On suppose que les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes. Montrer que la série $\sum |c_n|$ converge et que
$$\sum_{n\geqslant 0} c_n = \sum_{n\geqslant 0} a_n \sum_{n\geqslant 0} b_n.$$
2. Pour n entier, on prend $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$. Démontrer que la série de terme général c_n est divergente.
3. Pour n entier, on prend $a_n = b_n = (-1)^n/(n+1)$. Démontrer que la série de terme général c_n est convergente.

Soluce

1. Il suffit de poser $u_{n,p} = a_n b_p$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et et d'appliquer l'exercice 32.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Étant donnés x et y positifs, on a : $4xy \leqslant (x+y)^2$, d'où $\dfrac{1}{\sqrt{xy}} \geqslant \dfrac{2}{x+y}$ et :

$$|c_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2}.$$

Comme le terme général (c_n) ne tend pas vers zéro, la série $\sum c_n$ est divergente.

3. Pour n entier, on a :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \times \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{2 \cdot (-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Par suite, la suite (c_n) est alternée et tend vers 0 (car $|c_n| \sim \dfrac{2\ln(n)}{n}$). Si $n \geqslant 1$, on a aussi :

$$\begin{aligned} |c_{n-1}| - |c_n| &= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{2}{(n+2)(n+1)}, \end{aligned}$$

suite qui est positive pour n assez grand (le premier terme est équivalent à $2\ln(n)/n^2$, beaucoup plus grand que le second qui est équivalent à $2/n^2$). On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées pour conclure que la série $\sum c_n$ est convergente.

Chapitre 7

Séries de fonctions

7.1 Généralités

Exercice 34 (Game of convergences)
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, et $n \geqslant 2$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n},$$

avec par convention $f_n(0) = 0$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f la somme de cette série.
2. Montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$, où $a > 0$. Y a-t-il convergence normale de la série sur tout $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ est uniforme sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Soluce

1. Tout d'abord, pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, pour tout $n \geqslant 2$, donc la série $\sum f_n(0)$ converge.

   Pour $x > 0$, on a $f_n(x) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puisque $n^2 f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Comme $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente, par le critère de Riemann, la convergence de la série $\sum f_n(x)$ est assurée, pour tout $x > 0$.
2. Soit $a > 0$. On pose $\varphi_n : x \mapsto x\mathrm{e}^{-nx}$. Lançons-nous dans une petite étude de cette fonction, afin d'en déterminer une borne supérieure. La fonction φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et l'on a, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\varphi_n'(x) = \mathrm{e}^{-nx}(1 - nx).$$

Dressons son tableau de variation, pour un n « assez grand »[1].

x	0		$\frac{1}{n}$		a		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
φ_n		$\nearrow$		$\searrow$	$\varphi_n(a)$	$\searrow$	

On a donc, pour un entier n suffisamment grand (plus grand que $1/a$ pour être précis), $\max(\varphi_n) = \varphi_n(a) = a\mathrm{e}^{-na}$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$; et donc, toujours sur $[a, +\infty[$:

$$\max(f_n) = f_n(a) = \frac{a\mathrm{e}^{-na}}{\ln n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, la série $\sum f_n$ convergence normalement sur l'intervalle $[a, +\infty]$.

Cependant, si l'on se place sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\max(f_n) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n \ln n}.$$

Or, $\frac{1}{n \ln n}$ est le terme général d'une série de Bertrand, de la forme $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, où $\alpha = \beta = 1$. Ce type de série ne convergeant que pour $\alpha > 1$, ou bien pour $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ est divergente. Ainsi, la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3. On considère dans la suite $(\mathrm{R}_n)_n$, la suite des restes de la série des $\sum f_n$, c'est-à-dire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $\mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)$. Il s'agit de montrer que (R_n) converge uniformément vers 0.

   Fixons $x > 0$, et soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) = x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\ln k} \leqslant \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx} = \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

   On a donc, pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{R}_n(x) \leqslant \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n+1)(\mathrm{e}^x - 1)},$$

   et pour $x = 0$, $\mathrm{R}_n(0) = 0$.

   Or, on a $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$; et $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   est majorée ; soit $\mathrm{M} > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\left|\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\right| \leqslant \mathrm{M}.$$

1. Ceci pour assurer que $\frac{1}{n}$ soit suffisamment proche de 0, de sorte que, quel que soit $a > 0$ choisi, a soit toujours plus grand que $\frac{1}{n}$.

On a alors, pour tout $x \geqslant 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\ln(n+1)}.$$

Comme $\frac{\mathrm{M}}{\ln(n+1)}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, on en déduit que (R_n) tend uniformément vers 0, sur $\mathbb{R}_+$, ce que l'on cherchait.

La continuité de f sur $\mathbb{R}_+$ s'en déduit ensuite, comme somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$.

4. Pour montrer le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction f, on va utiliser le théorème de dérivation des séries de fonctions. Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$, on a

$$f_n'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)}{\ln n}.$$

De plus, si l'on se place sur le segment $[c,d]$, où $0 < c < d < +\infty$, on a

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{\ln n}\mathrm{e}^{-nx}(1+nx) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nc}}{\ln c}(1+nd) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, par le critère de Riemann, la série $\sum f_n'$ est normalement, donc uniformément convergente sur $[c,d]$. Par le théorème de dérivation des séries, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[c,d]$, et pour tout $x \in [c,d]$:

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x).$$

Ceci étant valable pour tous c et d dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. On étudie le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n} =: \Theta(x).$$

On veut montrer que Θ n'admet pas de limite finie en 0. La fonction Θ est décroissante sur $]0,+\infty[$, et donc Θ admet une limite finie en 0 si, et seulement si, elle est majorée. Il s'agit donc de montrer que Θ n'est pas majorée.

Par l'absurde : supposons qu'il existe M tel que $0 \leqslant \Theta \leqslant \mathrm{M}$. En particulier, on aura, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n} \leqslant \Theta(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

On fait tendre x vers 0^+, pour obtenir, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\ln n} \leqslant \mathrm{M}.$$

Ceci est absurde, puisque la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge. Conclusion : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 35 (Dini & Weierstass)
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et convergeant simplement vers une fonction continue f. On suppose de plus que, pour x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante.

1. (a) Montrer que la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \|f - f_n\|_\infty$ est convergente.
   (b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $u_n = (f - f_n)(x_n)$.
   (c) Montrer que $(u_n)_n$ a pour limite 0, c'est-à-dire que la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme sur $[0,1]$.
2. On considère la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ de fonctions polynômes sur $[0,1]$ définie par les relations :

$$\mathrm{P}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{x - \mathrm{P}_n(x)^2}{2}.$$

   (a) Montrer que, pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}$.
   (b) Déduire de ce qui précède que $(\mathrm{P}_n)_n$ est uniformément convergente, sur $[0,1]$, vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
   (c) Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme, sur $[0,1]$, d'une suite de fonctions polynômes [2].

Soluce

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite $(u_n)_n$, et de la norme infinie sur $\mathbb{R}$, on a

$$u_{n+1} = \|f - f_{n+1}\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_{n+1}(x)|.$$

   Comme, pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est croissante, on obtient

$$u_{n+1} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| = u_n.$$

   Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 (c'est une norme !) ; par le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_n$ est donc convergente.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto (f - f_n)(x)$ est continue (car f et f_n le sont) sur $[0,1]$, qui est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée, et elle atteint ses bornes ; autrement dit, $\exists x_n \in [0,1]$; $u_n = (f - f_n)(x_n)$.
   Comme on a fixé $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement, ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) On a montré dans la question 1 (a) que la suite (u_n) est convergente. Notons l sa limite. On veut montrer que $l = 0$.
   Faisons dans un premier temps une hypothèse supplémentaire : supposons que la suite (x_n) est convergente, et tend vers un certain $x \in [0,1]$.

2. Ce résultat permet d'établir le théorème de Weierstrass, puisque toute fonction continue peut être approchée uniformément par des fonctions continues affines par morceaux, qui, elles-mêmes, s'écrivent comme combinaisons linéaires de fonctions de la forme $x \mapsto |x - c|$.

Fixons $p \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(f_n(x))$, pour un x donné, est croissante, on a, pour tout $n \geqslant p$:

$$0 \leqslant f(x_n) - f_n(x_n) \leqslant f(x_n) - f_p(x_n).$$

On fait alors tendre n vers l'infini ; la continuité de la fonction f implique

$$0 \leqslant l \leqslant f(x) - f_p(x).$$

Puis, en faisant tendre p vers l'infini, on obtient

$$0 \leqslant l \leqslant 0,$$

ce qui implique $l = 0$.

À présent, revenons au cas général, où la suite (x_n) n'est pas forcément supposée convergente. Comme (x_n) est une suite à valeurs dans $[0,1]$ qui est compact, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de (x_n) une sous-suite qui converge dans $[0,1]$. Notons $(x_{\varphi(n)})$ cette sous-suite, et y sa limite.

En effectuant les mêmes calculs que précédemment, en remplaçant (x_n) par $(x_{\varphi(n)})$, et x par y, on obtient de même que u_n tend vers 0.

2. (a) Soit $x \in [0,1]$. On montre ce résultat par récurrence sur n.

   Pour $n = 0$, il n'y a rien à dire. Si l'on suppose le résultat vrai au rang n, il est déjà clair que $\mathrm{P}_{n+1}(x)$ est positif, car alors $x - \mathrm{P}_n(x)^2 \geqslant 0$. De plus, comme $x \in [0,1]$, on a $x \leqslant \sqrt{x}$. En utilisant en plus l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{n+1} - \sqrt{x} &= \mathrm{P}_n(x) - \sqrt{x} + \frac{\big(\sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x)\big)\big(\sqrt{x} + \mathrm{P}_n(x)\big)}{2} \\
&= \big(\sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x)\big)\Big(-1 + \frac{\sqrt{x} + \mathrm{P}_n(x)}{2}\Big) \\
&= \frac{\big(\sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x)\big)\big(-2 + \sqrt{x} + \mathrm{P}_n(x)\big)}{2} \\
&\leqslant \frac{\big(\sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x)\big)\big(2\sqrt{x} - 2\big)}{2} \leqslant 0,
\end{aligned}$$

   ce qui termine la récurrence.

   (b) On va utiliser ici le théorème de Dini démontré précédemment.

   Commençons par noter que (P_n) est une suite de fonctions polynômes, donc en particulier, continues.

   Soit maintenant $x \in [0,1]$ fixé. La suite $(\mathrm{P}_n(x))$ est croissante, d'après la question 2 (a), majorée par $\sqrt{x}$; elle est donc convergente. Notons $\ell(x)$ sa limite[3] ; elle vérifie $0 \leqslant \ell(x) \leqslant \sqrt{x}$. De plus, comme $(\mathrm{P}_{n+1}(x))$ et $(\mathrm{P}_n(x))$ ont même limite $\ell(x)$, en passant à la limite dans l'égalité $\mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{x - \mathrm{P}_n(x)^2}{2}$, on obtient l'équation

$$\ell(x) = \ell(x) + \frac{x - \ell(x)^2}{2},$$

3. *A priori*, elle dépend de x.

dont les solutions sont $\ell(x) = \sqrt{x}$ ou $\ell(x) = -\sqrt{x}$; mais comme $0 \leqslant \mathrm{P}_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors la limite $\ell(x)$ est également positive. Autrement dit, on a $\ell(x) = \sqrt{x}$.
On a donc obtenu une suite (P_n) de fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, continue. Comme de plus, pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $(\mathrm{P}_n(x))_n$ est croissante, toutes les conditions sont réunies pour appliquer le théorème de Dini, qui assure que cette convergence est uniforme sur $[0,1]$.

(c) D'après ce qui précède, $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Donc, la suite $(\mathrm{Q}_n)_n$ définie par $\mathrm{Q}_n(x) = \mathrm{P}_n(x^2), x \in [0,1]$, converge uniformément[4], par continuité, vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$.

Remarque. Le résultat de la question 2)c) peut s'obtenir directement en appliquant le théorème de Dini à la suite Q_n.

7.2 Séries entières sur $\mathbb{R}$

Exercice 36 (Un problème de dénombrement : les nombres de Bell)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le nombre de partitions de l'ensemble $[1,n]$, avec par convention $\mathrm{D}_0 = 1$.

1. Calculer D_1, D_2, D_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule $\mathrm{D}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_k$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{D}_n \leqslant n!$.
3. On pose $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{D}_n}{n!} z^n$ (que l'on appelle série génératrice exponentielle de la suite $(\mathrm{D}_n)_{n\geqslant 0}$). Montrer que cette série entière a un rayon de convergence R non nul, puis calculer sa somme pour $z \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. En déduire une expression de D_n comme somme d'une série.

Soluce

1. Détaillons d'abord les cas $n = 1, 2, 3$.
   Pour $n = 1$, il n'y a rien à dire.
   Pour $n = 2$, les partitions[5] de l'ensemble $[1,2]$ sont
   $$\big\{\{1\},\{2\}\big\} \quad \text{et} \quad \big\{\{1,2\}\big\},$$
   ce qui donne $\mathrm{D}_2 = 2$.
   Enfin, pour $n = 3$, on partitionne l'ensemble $[1,3]$ en
   $$\big\{\{1\},\{2\},\{3\}\big\},\ \big\{\{1,2,3\}\big\},\ \big\{\{1\},\{2,3\}\big\},\ \big\{\{2\},\{1,3\}\big\},\ \big\{\{3\},\{1,2\}\big\},$$

4. On a utilisé ici le résultat suivant : si (f_n) est une suite de fonctions continues, qui converge uniformément vers une fonction f, continue également, alors, pour g fonction continue, $(f_n \circ g)$ tend uniformément vers $f \circ g$.

5. On rappelle qu'une partition d'un ensemble X est une famille de sous-ensembles X_i non vides et disjoints dont la réunion est l'ensemble entier, *i.e.* tels que $\bigcup_i \mathrm{X}_i = \mathrm{X}$ et $\mathrm{X}_i \cap \mathrm{X}_j = \varnothing$ si $i \neq j$.

donc $D_3 = 5$.
Soit maintenant $n \geqslant 3$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on considère à présent E_k, l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$ pour lesquelles la partie qui contient $n+1$ est de cardinal $k+1$, fixé. On regarde cette phrase droit dans les yeux, et on trouve $\#E_k = \binom{n}{k} D_{n-k}$. Effectivement, pour constituer la partie contenant $n+1$, il faut choisir k éléments dans $[\![1, n]\!]$, puis réaliser une partition des $n-k$ éléments restants.
De plus, comme les $(E_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1, n+1]\!]$, on obtient la formule :

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_j,$$

le passage de la deuxième à la troisième égalité n'étant qu'un changement d'indice $j = n-k$.
Quant à l'inégalité $D_n \leqslant n!$, elle se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Elle est d'abord vraie pour $n \leqslant 3$. Ensuite, si on la suppose vraie au rang n, alors :

$$D_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leqslant (n+1)!$$

Et emballez, c'est pesé !

2. Par la question qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{D_n}{n!} \leqslant 1$. On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière est supérieur ou égal à 1, donc non nul.
Soit maintenant z dans $]-R, R[$. On a alors

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}.$$

La fonction f est dérivable sur $]-R, R[$ (cette propriété sur les séries entières sur leur disque de convergence étant une conséquence du théorème de dérivation des séries), et l'on a

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_{n+1}}{n!} z^n.$$

Par la formule trouvée à la question 1, on en déduit que, pour $z \in]-R, R[$:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{D_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n.$$

Ne reconnaissez-vous pas dans le terme de droite un joli produit de Cauchy ? Eh si ! Celui des séries $\sum \frac{D_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$; la première a pour somme $f(z)$, on l'a vu, et la seconde, e^z. Toutes les deux ont un rayon de convergence supérieur ou égal à R (puisque celui de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est infini). On a donc, pour $z \in]-R, R[$, $f'(z) = f(z)e^z$. On en déduit, par intégration, qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour $z \in]-R, R[$,

$$f(z) = Ce^{\int_0^z e^t dt} = Ce^{e^z - 1}.$$

Enfin, pour calculer C, il suffit de se rappeler que $f(0) = D_0 = 1$ par convention, ce qui donne $C = 1$.

Finalement, on obtient, pour $z \in]-R, R[$:

$$f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{e^z - 1}.$$

3. La série entière définissant l'exponentielle ayant un rayon de convergence infini, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}.$$

On va à présent utiliser le théorème d'interversion de Fubini pour les séries doubles. Pour ce faire, considérons la série double $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!k!}$. Il s'agit de vérifier que la série $\sum_k |u_{n,k}|$ est convergente, puis que $\sum_n \sum_k |u_{n,k}|$ l'est également.
Pour le premier point, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|nz|^k}{k!\,n!} = \frac{e^{|nz|}}{n!},$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{|nz|}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{|z|}\right)^n}{n!} = e^{e^{|z|}}.$$

La série double est donc sommable, sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Fubini, on peut alors intervertir les sommes, et en déduire que, pour tout $z \in]-R, R[$,

$$f(z) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!}.$$

Or, on avait $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n$, et comme le développement en série entière d'une fonction est unique, on compare les deux expressions obtenues, et on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Exercice 37 (Lien entre polynômes de Bernoulli et la cotangente)
Le but de l'exercice est de donner une autre méthode expliquant le lien entre les polynômes de Bernoulli B_n définis dans l'exercice 41 et la cotangente, voir exercice 42.

1. Montrer que $|B_n(t)| \leqslant n!$ pour $t \in [0, 1]$; en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n$ converge pour tout x tel que $|x| < 1$; à x fixé.
2. Trouver une équation différentielle simple dont $\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n$, considérée comme fonction de t, est solution. La résoudre, puis montrer que pour x complexe de module strictement inférieur à 1 et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n(t)}{n!} x^n = \frac{x e^{xt}}{e^x - 1}.$$

3. Montrer que le rayon de convergence de la série (en x) vaut au plus 2π, (en fait, c'est exactement 2π).
4. Montrer que l'on a, sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ convenable : $\dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2}\coth\dfrac{x}{2}$.
5. En utilisant $\cot x = i\coth(ix)$, en déduire que $x\cot x = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k 2^{2k}\dfrac{\mathrm{B}_{2k}(0)}{(2k)!}x^{2k}$.
6. En écrivant $(x^2 - n^2\pi^2)^{-1} = \sum_{k\geqslant 0}\dfrac{(-1)^{k+1}x^{2k}}{(n\pi)^{2k+2}}$, retrouver la formule de l'exercice 42.

Soluce

1. Montrons par récurrence sur n que $|\mathrm{B}_n(t)| \leqslant n!$ pour $t \in [0,1]$. Pour $n = 0$, rien à faire. Soit $n \geqslant 1$, supposons que, pour tout t, on ait : $|\mathrm{B}_{n-1}(t)| \leqslant (n-1)!$, de sorte que $|\mathrm{B}_n'(t)| \leqslant n!$. Comme $\int_0^1 \mathrm{B}_n = 0$, le polynôme B_n admet au moins un zéro $z_n \in [0,1]$. Pour $t \in [0,1]$, il vient alors :
$$\left|\mathrm{B}_n(t)\right| = \left|\mathrm{B}_n(t) - \mathrm{B}_n(z_n)\right| \leqslant \left|\int_{z_n}^t \mathrm{B}_n'(u)\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_{z_n}^t \left|\mathrm{B}_n'(u)\right|\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 n!\mathrm{d}u = n!.$$
Il en résulte, par comparaison avec la série géométrique, que la série $\sum_n \frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!}x^n$ a, pour tout $t \in [0,1]$, un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1. Dans la suite, notons, pour $|x| < \mathrm{R}$ et $t \in [0,1]$,
$$f(t,x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!}x^n.$$
2. Fixons $x \in \mathrm{D}(0,1)$ (*i.e.* $|x| < 1$) et posons $f_n(t) := \frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!}$. Le terme général $u_n(t) := f_n(t)x^n$ de la série qui définit f est dérivable par rapport à t, et l'on a : $u_n'(t) = f_{n-1}(t)x^n$. Comme $\left|f_{n-1}(t)x^n\right| \leqslant |x|^{n-1}$, la convergence de $\sum u_n'$ est normale sur $[0,1]$ (la variable est t...). On peut donc dériver terme à terme :
$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{n\mathrm{B}_{n-1}(t)}{n\times(n-1)!}x^n = x\sum_{p\geqslant 0}\frac{\mathrm{B}_p(t)}{p!}x^p = xf(t,x).$$
Par suite, x étant fixé, la fonction $f_x : t \mapsto f(t,x)$ vérifie l'équation $y' = xy$. On voit donc qu'il existe une fonction $g(x)$, ne dépendant que de x, telle que $f(t,x) = g(x)e^{xt}$ pour tout $t \in [0,1]$. Fixons maintenant x non nul, toujours dans $\mathrm{D}(0,1)$, et intégrons sur $[0,1]$. D'une part, on a :
$$\int_0^1 f(t,x)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(x)e^{xt}\mathrm{d}t = \frac{g(x)}{x}(e^x - 1);$$
d'autre part, comme $\left|f_n(t)x^n\right| \leqslant |x|^n$, la série $\sum\int_0^1\left|f_n(t)x^n\right|\mathrm{d}t$ converge, et on peut permuter somme et intégrale :
$$\int_0^1 f(t,x)\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!}x^n\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0}\int_0^1\frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!}x^n\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}\int_0^1\mathrm{B}_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^0}{0!}\int_0^1\mathrm{d}t = 1.$$

En comparant ces deux égalités, on trouve que $g(x) = x/(\mathrm{e}^x - 1)$. Un prolongement par continuité donne également un sens à la formule pour $x = 0$, de sorte que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x \in \mathrm{D}(0,1), \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!} x^n = \frac{x\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

(En fait, la formule est vraie pour tout x complexe de module $< 2\pi$.)

3. La fonction $g : x \mapsto x/(\mathrm{e}^x - 1)$ admet un pôle en $x = 2i\pi$, donc le plus grand disque sur lequel elle admet un développement en série entière est inclus dans le disque ouvert $\mathrm{D}(0, 2\pi)$; par suite, quel que soit t, le rayon de convergence de $\sum \mathrm{B}_n(t)x^n$ est au plus 2π.
4. Pour $x \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\coth\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}} = \frac{\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}} = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\mathrm{e}^x - 1 + 2}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 + \frac{2}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

À présent, on multiplie par $x/2$ et on prolonge par continuité : la fonction $x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$, et donc $x\coth\frac{x}{2}$, se prolongent par continuité en 0 car $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$ au voisinage de 0 (dans $\mathbb{C}$). On trouve, pour $x \in \mathrm{D}(0, 2\pi)$:

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\coth\frac{x}{2}.$$

5. On en déduit instantanément que pour tout $x \in \mathrm{D}(0, 2\pi)$, on a :

$$\frac{x}{2}\coth\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{B}_n(0)}{n!} x^n.$$

Comme $\mathrm{B}_1(0) = -1/2$, le terme correspondant à $n = 1$ de la somme se simplifie avec $x/2$. Comme la fonction du membre de gauche est paire, on en tire que la somme $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\mathrm{B}_n(0)}{n!} x^n$ l'est aussi : par unicité du développement en série entière, cela signifie que $\mathrm{B}_{2k+1}(0) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$. En substituant $2ix$ à x, on obtient, pour tout $x \in \mathrm{D}(0, \pi)$:

$$x\cot x = ix\coth(ix) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\mathrm{B}_{2k}(0)}{(2k)!}(2ix)^{2k} = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k 2^{2k} \frac{\mathrm{B}_{2k}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

6. Pour $x \in \mathrm{D}(0, \pi)$ et $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} = -\frac{1}{(n\pi)^2}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}} = -\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(n\pi)^{2k+2}}.$$

On somme sur n et on permute les deux sommes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} = -\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(n\pi)^{2k+2}} = -\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{2k+2}} \frac{x^{2k}}{\pi^{2k+2}} = -\sum_{k\geqslant 0} \zeta(2k+2) \frac{x^{2k}}{\pi^{2k+2}}.$$

La permutation est justifiée par le fait que tous les termes de la somme double sont positifs et que dans un ordre de sommation, la somme double converge – c'est le théorème de Fubini pour les séries.

Or, par l'exercice 41, on a : $\zeta(2k+2) = \frac{(-1)^{k+2}}{(2k+2)!}2^{2k+1}\pi^{2k+2}\mathrm{B}_{2k+2}(0)$, d'où :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{x^2-n^2\pi^2} = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{B}_{2k+2}(0)}{(2k+2)!}2^{2k+1}x^{2k} = -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\frac{\mathrm{B}_{2k}(0)}{(2k)!}2^{2k}x^{2k},$$

d'où, avec l'expression de la cotangente de l'exercice 42 :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{x^2-n^2\pi^2} = -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x}\cot x, \quad \textit{i.e.}\ \cot x = \frac{1}{x}+2x\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{x^2-n^2\pi^2}.$$

Bien sûr, on peut inverser le processus et retrouver l'expression de $\zeta(2k)$ en fonction de $\mathrm{B}_{2k}(0)$ à partir du développement de la cotangente et de la formule de la question 1).

Remarque (pour quelques formules de plus).

En manipulant la *série génératrice* f dont on a une expression si simple, on déduit de quelques manipulations algébriques et de l'unicité du développement en série entière de jolies formules. Par exemple :

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathrm{B}_n(1-t)}{n!}(-1)^n x^n = \frac{-x\mathrm{e}^{-x(1-t)}}{\mathrm{e}^{-x}-1} = \frac{x\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^x-1} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!}x^n,$$

d'où $\mathrm{B}_n(1-t) = (-1)^n\mathrm{B}_n(t)$ pour tout n et tout t (ce que l'on peut prouver facilement par récurrence). En remplaçant (t,x) par $(-t,-x)$:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!}x^n - \sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathrm{B}_n(-t)}{n!}(-1)^n x^n = \frac{x\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^x-1} - \frac{-x\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^{-x}-1} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\right)x\mathrm{e}^{xt} = -x\mathrm{e}^{xt},$$

d'où $\mathrm{B}_n(t)-(-1)^n\mathrm{B}_n(-t) = -nt^{n-1}$ pour tous n et t. En particulier : $\mathrm{B}_n(0)=0$ si n impair.

Encore une pour la route, qui utilise le produit de Cauchy de deux séries entières :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\mathrm{B}_n(t+u)}{n!}x^n &= \frac{x\mathrm{e}^{x(t+u)}}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{x\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{e}^{xu} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{\mathrm{B}_k(t)}{k!}x^k\sum_{\ell\geqslant 0}\frac{u^\ell}{\ell!}x^\ell \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k+\ell=n}\frac{\mathrm{B}_k(t)u^\ell}{k!\ell!}x^n = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{B}_k(t)u^{n-k}\frac{x^n}{n!},\end{aligned}$$

En prenant $t=0$, $u=1$ et en utilisant $\mathrm{B}_k(1)=\mathrm{B}_k(0)$, le coefficient de x^{n+1} donne une relation de récurrence permettant un calcul efficace :

$$(n+1)\mathrm{B}_n(0) = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\mathrm{B}_k(0).$$

7.3 Séries entières sur $\mathbb{C}$

Exercice 38 (Théorème d'Abel)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, où les a_n sont complexes, de rayon de convergence 1 sur $\mathbb{R}$. On note f la somme de cette série. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ est convergente.

On se propose d'établir que la convergence de la série $\sum a_n x^n$ est uniforme sur $[0,1]$.

1. Établir le résultat dans le cas particulier où les a_n sont tous positifs.
2. Étudier le cas particulier où $a_n = (-1)^n b_n$, (b_n) étant une suite décroissante et convergente vers 0.
3. Montrer alors le résultat dans le cas général. Pour cela, on pourra poser

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k,$$

puis montrer que, pour tous entiers n et p tels que $p \geqslant n+2$,

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k r^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k(x^{k+1} - x^k) - r_p x^p.$$

4. En déduire que la fonction f est continue.
5. Étudions à présent quelques exemples.
   (i) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

   (ii) Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n := \sum_{p+q=n} a_p b_q,$$

et on suppose que les séries de termes généraux a_n, b_n et c_n sont convergentes. Montrer que :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Soluce

1. Pour tout x réel appartenant à $[0,1]$, on a

$$|a_n x_n| \leqslant |a_n| = a_n.$$

Comme la série $\sum a_n$ est convergente, on en déduit que $\sum a_n x^n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$.

2. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\mathrm{R}_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p x^p = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p b_p x^p.$$

Or, la suite $(b_p x^p)$ est une suite positive, décroissante, de limite nulle. D'après le théorème spécial des séries alternées, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$:

$$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant |(-1)^n b_{n+1} x_{n+1}| \leqslant b_{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, la suite de fonctions (R_n) converge donc uniformément vers 0 sur $[0,1]$, et la série $\sum a_n x^n$ est bien uniformément convergente.

3. On pose, pour tout entier n,

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

On a alors, pour tout entier k non nul, $a_k = r_{k-1} - r_k$, et pour tous entiers n et p vérifiant $p \geqslant n+2$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p} (r_{k-1} - r_k) x^k.$$

En partageant la somme en deux, et en réindexant, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p} r_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{p} r_k x^k = \sum_{k=n}^{p-1} r_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{p} r_k x^k.$$

On obtient bien le résultat

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} r_k (x^{k+1} - x^k) - r_p x^p.$$

Cela nous permet d'avoir l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k \right| \leqslant |r_n| \left| x^{n+1} \right| + |r_p| \, |x^p| + \sum_{k=n+1}^{p-1} |r_k| \, (x^k - x^{k+1}), \qquad (\star)$$

ceci étant valable pour tous entiers n et p vérifiant $p \geqslant n+2$, et pour tout $x \in [0,1]$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. La série de terme général a_n étant convergente, la suite des restes partiels (r_n) converge vers 0 ; soit alors $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$|r_n| \leqslant \varepsilon.$$

En revenant à l'inégalité $(\star)$, on obtient alors :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k \right| \leqslant \varepsilon \left| x^{n+1} \right| + \varepsilon \, |x^p| + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}),$$

valable pour tous $p \geqslant n+2 \geqslant \mathrm{N}+2$, et pour tout $x \in [0,1]$.

En factorisant, on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k \right| \leqslant 2\varepsilon x^{n+1} \leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi, le critère de Cauchy est vérifié, et la série est bien uniformément convergente sur $[0,1]$.

4. La fonction $x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$, pour tout n. La somme f est donc continue sur $[0,1]$, comme limite uniforme d'une série de fonctions continues.

5. (i) On sait que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (\star\star)$$

Par le théorème spécial des séries alternées, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente. Ainsi, le résultat établi précédemment s'applique, et on en déduit que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, et que la fonction arctan est continue sur $[0,1]$.
Le passage à la limite dans l'égalité $(\star\star)$, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, donne enfin :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(ii) Considérons les séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$, et $\sum c_n x^n$. Les séries de terme général respectif a_n, b_n et c_n étant supposées convergentes, ces séries entières ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Nommons f_a, resp. f_b, resp. f_c, la somme de la série $\sum a_n x^n$, resp. $\sum b_n x^n$, resp. $\sum c_n x^n$. Le théorème d'Abel s'applique une fois encore, ce qui permet d'affirmer que les séries entières considérées sont uniformément convergentes, et que leurs sommes sont continues sur $[0,1]$.
De plus, par convergence normale des fonctions sur $[0,1[$, on peut appliquer le produit de Cauchy, pour obtenir, pour tout $x \in [0,1[$:

$$f_a(x) \cdot f_b(x) = f_c(x).$$

Comme les fonctions sont continues, par passage à la limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient le résultat voulu.

7.4 Séries de Fourier

Exercice 39 (Égalité des coefficients de Fourier de fonctions continues)
On note E l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et l'on considère l'application linéaire $\phi : \mathrm{E} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui, à f dans E associe la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier exponentiels. Le but de cet exercice est d'étudier l'image de ϕ.

1. Montrer que ϕ est injective.
2. Montrer que $\operatorname{im}\phi \subset \ell^2$, où ℓ^2 désigne l'espace des suites indexées par $\mathbb{Z}$ de carré sommable.
3. En utilisant par exemple la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fonction périodique de période 2π, définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2} & \text{si } t \in]0, 2\pi[\\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

montrer que $\operatorname{im}\phi \neq \ell^2$.
4. Montrer que $\operatorname{im}\phi$ est dense dans ℓ^2.

Soluce

1. Par linéarité de l'intégrale, ϕ est bien une application $\mathbb{C}$-linéaire. Intéressons-nous à son noyau ; si $f \in \ker\phi$, alors, f est continue, 2π-périodique, telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$. Par le théorème de Parseval, on a alors
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|^2 = 0.$$
La fonction $|f|^2$ étant continue, positive, et d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$, elle est alors nulle sur cet intervalle ; par périodicité, on en déduit qu'elle est nulle sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $\ker \phi = \{0\}$; ϕ est injective.
2. Si $f \in \mathrm{E}$, alors f est continue, 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Le théorème de Parseval énoncé précédemment nous donne
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|^2 ,$$
ce qui montre que la suite $c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable ; autrement dit, $c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \subset \ell^2$, et donc, $\operatorname{im}\phi \subset \ell^2$.
3. Intéressons-nous aux coefficients de Fourier de la fonction g ; g étant impaire, on a $a_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, par une intégration par parties, on obtient, pour tout $n > 0$, $b_n(g) = 1/n$. Enfin, en utilisant les relations entre coefficients de Fourier complexes et trigonométriques, on obtient $c_0(g) = 0$, et pour tout $n > 0$, $c_n(g) = -i/(2n)$; ainsi, $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien dans ℓ^2.
Dans la suite, pour simplifier, notons, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n := -i/(2n)$. On va montrer qu'il n'existe pas de fonction f dans E telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.
Pour ce faire, supposons par l'absurde qu'il existe une telle fonction. Alors, la fonction $f - g$ étant continue par morceaux, périodique de période 2π et égale à sa régularisée, on peut de nouveau appliquer le théorème de Parseval :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f) - c_n|^2 = 0.$$
Par continuité de la fonction $f - g$ sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, 2\pi[$, on en déduit $f - g = 0$; on a donc, pour tout $t \in]0, 2\pi[$, $f(t) = g(t)$.
Or,
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{t\to 0, t>0} g(t) = \lim_{t\to 0, t>0} f(t),$$
et
$$-\frac{\pi}{2} = \lim_{t\to 0, t<0} g(t) = \lim_{t\to 0, t<0} f(t),$$
ce qui contredit la continuité de la fonction f en 0. On a donc montré que $\operatorname{im}\phi \neq \ell^2$.
4. Considérons le sous-espace vectoriel des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ à support fini, que l'on nommera M ; et munissons l'espace ℓ^2 de la norme $\|\,.\,\|_2$. On va montrer que l'espace M est dense dans ℓ^2 ; en effet, puisque l'image réciproque de M par la

fonction ϕ est l'espace vectoriel des fonctions trigonométriques, M est inclus dans l'espace $\mathrm{im}(\phi)$, et donc, par la suite d'inclusions

$$\mathrm{M} \subset \mathrm{im}(\phi) \subset l^2,$$

la densité de $\mathrm{im}(\phi)$ dans ℓ^2 en découlera.
Pour ce faire, soit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l^2. On note $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, la suite de l'espace ℓ^2 dont tous les termes sont nuls, sauf le terme de rang k, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, qui est égal à 1.
Considérons enfin la suite définie, pour tout $p \in \mathbb{N}$, par :

$$u^{(p)} := \sum_{k=-p}^{k=p} v_k e_k.$$

Cette suite appartient à l'espace M, par construction et définition de la suite $(v_n)_n$; montrons que la suite $(v^{(p)})_p$ converge vers la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, pour la norme $\|\,.\,\|_2$ dont on a muni l'espace ℓ^2.
On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\left\|(\cdots, v_{-p-1}, v_{-p}, \ldots, v_0, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots) - u^{(p)}\right\|_2 = \sum_{k=p+1}^{+\infty} |v_k|^2 + |v_{-k}|^2 .$$

Or, comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a été prise dans ℓ^2,

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} |v_k|^2 + |v_{-k}|^2 = 0.$$

Cela montre que la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ainsi, comme voulu, M est dense dans ℓ^2, ce qui implique également la densité de $\mathrm{im}(\phi)$ dans l'espace ℓ^2.

En un point de discontinuité, la série de Fourier d'une fonction $\mathscr{C}^1$ par morceaux converge simplement vers la régularisée de la fonction (Dirichlet) mais la convergence n'est pas uniforme. C'est évident si on se rappelle que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (ici, des polynômes trigonométriques) est continue ! Le *phénomène de Gibbs* permet de *quantifier* ce phénomène dans l'exemple le plus simple d'une fonction créneau.

Exercice 40 (Phénomène de Gibbs)
Soit f la fonction 2π-périodique impaire qui vaut 1 sur $]0,\pi[$ et 0 en π.

1. Vérifier que les seuls coefficients de Fourier non nuls sont : $b_{2k+1} = \dfrac{4}{\pi(2k+1)}$ $(k \in \mathbb{N})$.

   Soit, pour n entier et t réel, $\mathrm{S}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_{2k+1} \sin\big((2k+1)t\big)$.

2. Pour $t \notin \pi\mathbb{Z}$, montrer que $\mathrm{S}_n'(t) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin 2(n+1)t}{\sin t}$. En déduire les variations de S_n.

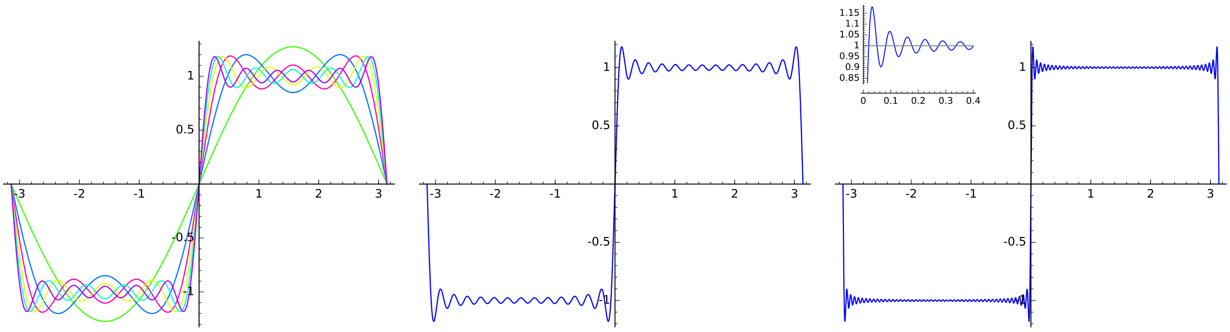


FIGURE 7.1 – Troncatures des séries de Fourier de l'échelon : $(\mathrm{S}_n)_{0\leqslant n\leqslant 5}$, S_{14}, S_{49}

3. Soit $\mathrm{M}_n = \mathrm{S}_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$.
   (a) Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$
   Riemann, on t'a vu, sors de là !
   (b) Montrer que cette limite est strictement supérieure à 1 et conclure.
   On pourra admettre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$.

Soluce

1. Comme f est impaire, les coefficients a_n sont nuls. On calcule alors les coefficients b_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$; par imparité de f, on obtient
   $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}.$$
   Ainsi,
   $$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\mathrm{S}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi(2k+1)}\sin\big((2k+1)t\big),$$
   donc, pour $t \in \mathbb{R}\smallsetminus\pi\mathbb{Z}$, en reconnaissant une série géométrique à $2n+2$ termes, de raison e^{2it},
   $$\begin{aligned}\mathrm{S}_n'(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{4}{\pi}\cos(2k+1)t &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{i(2k+1)t}+\mathrm{e}^{-i(2k+1)t}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{-i(2n+1)t}\sum_{k=0}^{2n+1}\mathrm{e}^{2ikt} \\ &= \frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{-i(2n+1)t}\frac{1-\mathrm{e}^{2i(2n+2)t}}{1-\mathrm{e}^{2it}}\end{aligned}$$

On factorise l'arc-moitié, et l'on obtient :

$$\mathrm{S}_n'(t) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{i(2n+2)t} - \mathrm{e}^{-i(2n+2)t}}{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(2n+2)t}{\sin t}.$$

Les variations de S_n sur $]0,\pi[$ s'en déduisent : comme le sinus est strictement positif sur cet intervalle, seul compte le numérateur. La dérivée S_n' s'annule en changeant de signe aux $2n+1$ points $t_k = \frac{k\pi}{2n+2}$ $(1 \leqslant k \leqslant 2n+1)$; elle est strictement positive au voisinage de 0. Ainsi, S_n est strictement croissante sur $]0,t_1]$, décroissante sur $[t_1,t_2]$, etc., et décroissante sur $[t_{2n+1},\pi[$.

NB : On pourrait vérifier sans trop de peine que $\mathrm{S}_n(t_1) = \mathrm{S}_n(t_{2n+1}) > \mathrm{S}_n(t_3) = \mathrm{S}_n(t_{2n-1}) > \cdots$. *Autrement dit,* M_n *est le maximum de* S_n. *Tout ce que l'on vient de démontrer est attesté par les dessins.*

3. (a) On a :

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{S}_n\Big(\frac{\pi}{2n+2}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin\big(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\big)}{2k+1} = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\big)}{\frac{2k+1}{2n+2}\pi}.$$

Et là, shazam ! On reconnaît une somme de Riemann ! Pour tout k, le point $x_k = \frac{2k+1}{2n+2}\pi$ est le milieu du k-ième intervalle de la subdivision régulière de $[0,\pi]$ en $n+1$ intervalles et le k-ième terme de la somme est $g(x_k)$, où $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \in]0,\pi]$. Comme la fonction g se prolonge par continuité en 0 par $g(0) = 1$, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

(b) Pour montrer que la limite de (M_n) est strictement plus grande que 1, on pourrait se contenter d'un calcul approché, soit 1,179 à 10^{-4} près.
On va le montrer en admettant que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$.
Soit k un entier et soit $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$. Sur $[k\pi,(k+1)\pi]$, le sinus est du signe de $(-1)^k$. Par changement de variable ($u \leftarrow u - k\pi$ ou $u \leftarrow u-(k+1)\pi$),

$$|u_k| = \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{k\pi+u}\mathrm{d}u > \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{(k+1)\pi+u}\mathrm{d}u = |u_{k+1}|.$$

Autrement dit, la série $\sum u_k$, dont la somme vaut $\pi/2$, est alternée. D'après le critère spécial, on a donc $u_0 > \frac{\pi}{2}$, d'où il ressort que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = \frac{2}{\pi}u_0 > 1$.
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{S}_n - f\| \geqslant \frac{2}{\pi}u_0 > 1$, si bien que la convergence n'est pas uniforme.

Remarque. On peut estimer la hauteur limite du deuxième extremum, du troisième ou, pour $p \in \mathbb{N}^*$, du p-ième (si $2n+1 \geqslant p$, il y a bien p extrema). Avec la même idée,

$$\mathrm{S}_n\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big(p\frac{2k+1}{2n+2}\pi\big)}{\frac{2k+1}{2n+2}\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{p\pi} \frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v.$$

Remarque. Ce qui précède permet de montrer que la convergence de S_n vers f est uniforme sur tout domaine $I_\varepsilon = [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ (avec $\varepsilon > 0$; idem sur $[-\pi + \varepsilon, -\varepsilon]$). Écrivons en effet, pour $t_0 = \frac{\pi}{2}$ et $t \in I_\varepsilon$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} S_n(t) &= S_n(t_0) + \frac{2}{\pi}\int_{t_0}^{t} \frac{\sin(2n+2)u}{\sin u} \mathrm{d}u \\ &= S_n(t_0) + \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(2n+2)u}{(2n+2)\sin u}\right]_{t_0}^{t} - \frac{2}{(2n+2)\pi}\int_{t_0}^{t} \frac{\cos u \cos(2n+2)u}{\sin^2 u}\mathrm{d}u\ ; \end{aligned}$$

$$|S_n(t) - 1| \leqslant |S_n(t_0) - 1| + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{(2n+2)\sin\varepsilon} + \frac{2}{(2n+2)\pi}\int_{\pi/2}^{\pi-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u}$$

et les trois termes tendent vers 0 uniformément par rapport à $t \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

Remarque. Ainsi, la différence $\lim_{n\to+\infty} M_n - f(0^+)$ vaut environ 0,18, ce qui représente 9 % du saut $f(0^+) - f(0^-)$.

D'autre part, il est classique que l'on ait $|f - S_n(f)| = O(1/n^r)$ pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^r$. Par suite, la convergence de la série de Fourier d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ est plus rapide que tout polynôme (en n).

Il en résulte que le phénomène de Gibbs est très général pour les fonctions classe $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux qui n'ont qu'un nombre fini de discontinuités. Une telle fonction peut s'écrire comme somme d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et d'une somme de fonctions créneaux semblables à f. La convergence de la série de Fourier est uniforme hors des discontinuités et, en chaque discontinuité, il y a un écart d'environ 9 % du saut entre la limite de la série de Fourier et la limite de la fonction.

Exercice 41 (Polynômes de Bernoulli et fonction zêta)
On va définir une famille de fonctions polynômes, B_n, $n \in \mathbb{N}$, omniprésente en analyse, et tout particulièrement en lien avec la fonction zêta de Riemann.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $B_0 = 1$, $B_n' = nB_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, et $\int_0^1 B_n \,\mathrm{d}t = 0$ pour $n \geqslant 1$. Calculer B_1, B_2 et B_3.
2. Montrer que si $n \geqslant 2$, alors $B_n(0) = B_n(1)$.
3. Pour $n \geqslant 2$, soit f_n la fonction périodique de période 1 telle que $f_n(t) = B_n(t)/n!$ pour $t \in]0,1]$ et de période 1. Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}$, et que ses coefficients de Fourier sont : $c_0(f_n) = 0$; $c_p(f_n) = -1/(2ip\pi)^n$ pour $p \neq 0$.
4. En déduire que pour tout entier naturel non nul k, on a l'égalité
$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}2^{2k-1}\pi^{2k}B_{2k}(0),$$
où la fonction zêta est donnée par $\zeta(s) = \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^s}$, pour $s > 1$.

Soluce

1. L'existence et l'unicité des B_n ($n \in \mathbb{N}$) se fait par récurrence. On suppose le polynôme B_{n-1} défini de façon unique. Alors, la condition $P' = nB_{n-1}$ définit

une famille de polynômes $\mathrm{P} = \mathrm{P}_n + k$, où k est une constante, et un unique polynôme P_n : la primitive de $n\mathrm{B}_{n-1}$ qui s'annule en 0. La condition $\int_0^1 \mathrm{P}\,\mathrm{d}t = 0$ impose une unique constante $k = -\int_0^1 \mathrm{P}_n = 0$. On en déduit l'existence et l'unicité de B_n.

En voici les premiers termes :

— de $\mathrm{B}_1'(t) = 1$, on tire : $\mathrm{B}_1(t) = t + b_1$ avec $\int_0^1 (t+b_1)\mathrm{d}t = 0$, donc $b_1 = -\frac{1}{2}$;

— de $\mathrm{B}_2'(t) = 2t-1$, on tire : $\mathrm{B}_2(t) = t^2 - t + b_2$ avec $\int_0^1 (t^2 - t + b_2)\mathrm{d}t = 0$, donc $b_2 = \frac{1}{6}$;

— de $\mathrm{B}_3'(t) = 3t^2 - 3t + \frac{1}{2}$, on tire : $\mathrm{B}_3(t) = t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2} + b_3$, avec $\int_0^1 \left(t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2} + b_3\right)\mathrm{d}t = 0$, donc $b_3 = 0$;

— (gratos) on trouverait de même : $\mathrm{B}_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}$.

2. Soit $n \geqslant 2$. L'idée, c'est de comparer $\mathrm{B}_n(1)$ et $\mathrm{B}_n(0)$, sachant très peu de choses sur B_n : on en connaît sa dérivée, qui, à un facteur près est un autre polynôme de Bernoulli, donc qui possède une intégrale nulle. Mettons cela en formules :
$$\mathrm{B}_n(1) - \mathrm{B}_n(0) = \int_0^1 \mathrm{B}_n'(t)\mathrm{d}t = n\int_0^1 \mathrm{B}_{n-1}(t)\mathrm{d}t = 0,$$
la dernière égalité étant valable car $n-1 \geqslant 1$.

3. En effet, la fonction f_k est continue sur $\mathbb{Z}$ puisque $\mathrm{B}_k(1) = \mathrm{B}_k(0)$. Elle est donc continue sur tout $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}^1$ par morceaux.
Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $c_0(f_n) = \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\mathrm{d}t = 0$. On note que $f_n' = \frac{1}{n!}\mathrm{B}_n' = \frac{n}{n!}\mathrm{B}_{n-1} = f_{n-1}$. Pour $p \neq 0$, on effectue une intégration par parties :
$$\begin{aligned} c_p(f_n) &= \int_0^1 f_n(t)\mathrm{e}^{-2ip\pi t}\mathrm{d}t = \left[f_n(t)\frac{\mathrm{e}^{-2ip\pi t}}{-2ip\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 f_{n-1}(t)\frac{\mathrm{e}^{-2ip\pi t}}{2ip\pi}\mathrm{d}t \\ &= \frac{f_n(1) - f_n(0)}{-2ip\pi} + \frac{c_p(f_{n-1})}{2ip\pi}. \end{aligned}$$
Pour $n = 1$, le terme intégré vaut
$$c_p(f_1) = \int_0^1 (t-\frac{1}{2})\mathrm{e}^{-2ip\pi t}\mathrm{d}t = \int_0^1 t\mathrm{e}^{-2ip\pi t}\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{\mathrm{e}^{-2ip\pi t}}{-2ip\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-2ip\pi t}}{2ip\pi}\,\mathrm{d}t = -1/(2ip\pi),$$
ce qui amorce une récurrence. Remarquons, pour l'hérédité, que pour $n \geqslant 2$, le terme intégré est nul car $\mathrm{B}_n(0) = \mathrm{B}_n(1)$, ce qui donne $c_p(f_n) = \frac{c_p(f_{n-1})}{2ip\pi}$.

4. La relation résulte directement du théorème de Dirichlet appliqué à f_{2k} en $t = 0$. On déduit du caractère $\mathscr{C}^1$ par morceaux de f_n l'égalité :
$$f_{2k}(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f_{2k})\mathrm{e}^{-2ip\pi t} = -\sum_{p>0} \frac{\mathrm{e}^{-2ip\pi t} + \mathrm{e}^{2ip\pi t}}{(2ip\pi)^{2k}}.$$
En évaluant en 0, cela donne
$$f_{2k}(0) = -\sum_{p>0} \frac{2}{2^{2k}(-1)^k p^{2k}\pi^{2k}}.$$
D'où
$$\frac{\mathrm{B}_{2k}(0)}{(2k)!} = (-1)^{k+1}2^{-2k+1}\pi^{-2k}\sum_{p\geqslant 1} p^{-2k} = (-1)^{k+1}2^{-2k+1}\pi^{-2k}\zeta(2k).$$
Ceci permet de conclure.

Remarque. Si l'on fait la même chose pour la fonction f_{2k+1}, avec $k > 0$, on obtient $f_{2k+1}(0) = 0$, c'est-à-dire, $\mathrm{B}_{2k+1}(0) = 0$. On peut obtenir cette égalité par des moyens plus élémentaires. Par exemple, si l'on pose $\mathrm{U}_n(t) = \mathrm{B}_n(t+\frac{1}{2})$, alors on voit, par la dérivation des fonctions composées, que $\mathrm{U}_n' = n\mathrm{U}_{n-1}$, puis, par récurrence, que U_n est de la parité de n. On en déduit $\mathrm{B}_n(1-x) = (-1)^n\mathrm{B}_n(x)$, ce qui force $\mathrm{B}_n(0)$ à être nul si n est impair.

Remarque. En lien avec cet exercice, il est intéressant de noter le résultat suivant. Si f est une fonction polynomiale par morceaux, alors

1. les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont des $\mathrm{O}(\frac{1}{n})$, même si f n'est pas continue,
2. si f est de classe $\mathscr{C}^k$, alors, les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont des $\mathrm{O}(\frac{1}{n^{k+2}})$,

Le premier point se prouve par récurrence sur le degré de f (le max des degrés de polynômes qui constituent f par morceaux), en effectuant une intégration par partie pour l'hérédité (what else ?). Le second point se fait ensuite par récurrence sur k en utilisant la formule $c_n(f') = \frac{2\pi i n}{\mathrm{T}}c_n(f)$, où T désigne la période.

Exercice 42 (Développement de la cotangente, le sinus comme produit) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que pour tout x dans $]-\pi,\pi]$, $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Calculer la série de Fourier de f_α et en déduire
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2}.$$
2. En déduire que pour $x \in\ ]-\pi,\pi[$, on a : $\sin x = x \prod_{n\geqslant 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

   Penser la cotangente comme une dérivée logarithmique : $\cot = (\ln\circ\sin)'$.

Soluce

1. La fonction f_α est paire sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Comme $f_\alpha(-\pi) = f_\alpha(-\pi+2\pi) = \cos(\alpha\pi) = \cos(-\alpha\pi)$, la fonction f_α est continue en $-\pi$ donc sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

   On en déduit aussi qu'elle est paire sur $[-\pi,\pi]$, et donc paire sur $\mathbb{R}$, puisque, pour tout x réel, il existe k entier tel que $x - 2k\pi \in\ ]-\pi,\pi]$, et donc
$$f_\alpha(x) = f_\alpha(x-2k\pi) = \cos(\alpha x - 2k\pi\alpha) = \cos(-\alpha x + 2k\pi\alpha) = f_\alpha(-x).$$
   Par parité, les coefficients b_n de f_α sont nuls. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, vu que $\alpha \notin \mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\cos(\alpha+n)t + \cos(\alpha-n)t\big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+n)t}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)t}{\alpha-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}(-1)^n\sin\alpha\pi\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi}\,\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2}. \end{aligned}$$

Par le théorème de Dirichlet, il vient, en évaluant en $x = \pi$:

$$\cos \alpha\pi = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} a_n \cos n\pi = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

En choisissant $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$ et en posant $\alpha = \frac{x}{\pi}$ (de sorte que l'on a bien $\alpha \notin \mathbb{Z}$), on en déduit en divisant par $\sin \alpha\pi = \sin x$ (qui est non nul !) et en simplifiant $\frac{2(x/\pi)}{\pi} \frac{1}{(x/\pi)^2 - n^2} = \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$:

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

2. L'idée est de constater que la cotangente est la dérivée logarithmique du sinus. Le sinus est strictement positif sur $]0, \pi[$ donc, sur cet intervalle, on déduit l'égalité $(\ln \circ \sin)'(x) = \cot(x)$.
   Considérons la fonction
   $$g :]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x \prod_{n\geqslant 1} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\Big).$$
   Le produit est bien défini car tous ses facteurs sont strictement positifs et la série $\sum \ln(1 - x^2/n^2\pi^2)$ converge absolument (et même normalement) sur $]-\pi, \pi[$ car, par convexité du logarithme, $\big|\ln(1 - x^2/n^2\pi^2)\big| \leqslant x^2/n^2\pi^2 \leqslant 1/n^2$.
   On a : $\ln g(x) = \ln x + \sum_{n\geqslant 1} \ln\big(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\big)$ pour tout $x \in]0, \pi[$ par continuité du logarithme.
   Chaque fonction $u_n : x \mapsto \ln\big(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\big)$, $n \geqslant 1$, est dérivable sur $]0, \pi[$ et on a :
   $$u_n'(x) = \frac{-\frac{2x}{n^2\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}} = \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$
   Mieux : pour $n \geqslant 2$ et $x \in]0, \pi[$, on a : $|u_n'(x)| \leqslant \frac{2\pi}{n^2\pi^2 - \pi^2}$ de sorte que la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $]0, \pi[$. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que $\ln \circ g$ est dérivable, et que
   $$(\ln \circ g)'(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} = \cot x = (\ln \circ \sin)'(x).$$
   Les fonctions continues $\ln \circ g$ et $\ln \circ \sin$ sont donc égales, à une constante près, sur $]0, \pi[$, et g et $\sin$ sont égales à une constante multiplicative près. Or, lorsque x tend vers 0, on a : $g(x) \sim x$ car, par convergence normale de la série de terme général $\ln\big(1 - x^2/n^2\pi^2\big)$ (par application du théorème de la double limite), le produit dans $g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. Bien sûr, $\sin x \sim x$ aussi donc la constante multiplicative vaut 1.
   On a donc : $g(x) = \sin x$ pour tout $x \in]0, \pi[$. Cette relation est évidente pour $x = 0$ et se prolonge à $]-\pi, \pi[$ par imparité des deux fonctions. Ainsi, pour $x \in]-\pi, \pi[$,
   $$\sin x = x \prod_{n\geqslant 1} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\Big).$$

Exercice 43 (Formule sommatoire de Poisson)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable, et de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $x \mapsto (1+|x|^\alpha)f(x)$ et $x \mapsto (1+|x|^\alpha)f'(x)$ sont bornées. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, et $\mathrm{T} := 2\pi/\omega$. Pour t réel, on pose

$$\mathrm{F}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n\mathrm{T}).$$

Le but de cet exercice est de démontrer la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n\mathrm{T}) = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^*(n)\mathrm{e}^{in\omega t},$$

où $\forall n \in \mathbb{Z}$, f^* désigne la transformée de Fourier de f, définie par

$$f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\mathrm{d}t.$$

1. (a) Justifier l'existence de F.
   (b) Montrer que F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
   (c) Montrer que F est périodique, de période T.
   (d) En déduire la formule de Poisson.
2. **(Application)** Soit $a > 0$.
   (a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-a|x|}$ à l'aide de la formule sommatoire de Poisson.
   (b) En déduire une expression pour $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2}$.
   (c) Retrouver la formule $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Soluce

1. (a) Remarquons tout d'abord que $\left|f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\right| = \left|f(t)\right|$; comme f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}$, f^* est bien définie.

   Pour montrer que la somme existe, on va montrer que la série $\sum f(t+n\mathrm{T})$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Prenons $\mathrm{K} > 0$. Par hypothèse, $t \mapsto (1+|t|^\alpha)f(t)$ est bornée, donc il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $|(1+|t|^\alpha)f(t)| \leqslant \mathrm{M}$. On obtient alors, pour tout $t \in [-\mathrm{K}, \mathrm{K}]$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, en supposant $|n|\mathrm{T} > \mathrm{K}$:

   $$\left|f(t+n\mathrm{T})\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{1+|t+n\mathrm{T}|^\alpha} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\left||n|\,\mathrm{T}-\mathrm{K}\right|^\alpha},$$

   où la seconde inégalité vient de l'inégalité triangulaire et de $|t| \leqslant \mathrm{K}$:

   $$|t+n\mathrm{T}| \geqslant |n|\,\mathrm{T} - |t| \geqslant |n|\,\mathrm{T} - \mathrm{K}.$$

   De plus, on a l'équivalent

   $$\frac{\mathrm{M}}{\left||n|\mathrm{T}-\mathrm{K}\right|^\alpha} \sim \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}^\alpha}\frac{1}{n^\alpha},$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente puisque α a été supposé supérieur à 1. Par suite, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n\mathrm{T})$ converge normalement sur le segment $[-\mathrm{K},\mathrm{K}]$, ce qui entraîne la convergence simple sur le compact $[-\mathrm{K},\mathrm{K}]$. Ceci étant valable pour tout $\mathrm{K}>0$, la convergence est simple sur tout $\mathbb{R}$; F est donc bien définie.

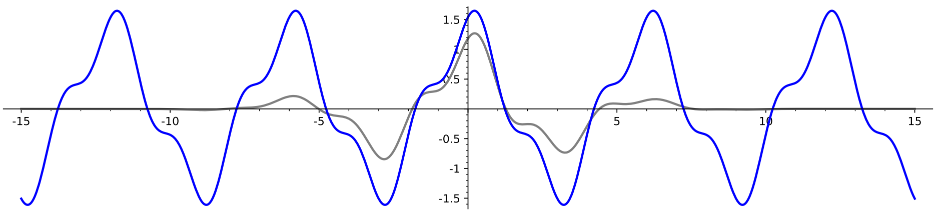


FIGURE 7.2 – Une fonction f et la fonction F associée, avec $\mathrm{T}=6$

(b) Pour montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$, on va utiliser le théorème de dérivation des séries de fonctions.

On a déjà montré que la série converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$. Comme f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $f_n : t \mapsto f(t+n\mathrm{T})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n.

Soit K un réel strictement positif, on se place d'abord sur le segment $[-\mathrm{K},\mathrm{K}]$. On montre que la série de terme général f'_n converge uniformément sur $[-\mathrm{K},\mathrm{K}]$ comme à la question 1, en utilisant l'hypothèse que $x \mapsto (1+|x|)^\alpha f'(x)$ est bornée. Alors, par le théorème de dérivation des séries, la fonction F est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\mathrm{K},\mathrm{K}]$. Ce résultat ne dépendant pas du choix de K, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$.

(c) Fixons $t\in\mathbb{R}$. Alors, pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} f((t+\mathrm{T})+n\mathrm{T}) = \sum_{n=-\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N}+1} f(t+n\mathrm{T}).$$

Vu les majorations de la question 1, les séries $\sum_{n\geqslant 0} f(t+n\mathrm{T})$ et $\sum_{n\geqslant 0} f(t-n\mathrm{T})$ convergent : en faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit que $\mathrm{F}(t+\mathrm{T})=\mathrm{F}(t)$.

(d) Nous avons montré que F est une fonction périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (donc, en particulier, continue sur $\mathbb{R}$). Par le théorème de Dirichlet, la suite des sommes partielles $\big(\mathrm{S}_n(\mathrm{F})\big)$ converge uniformément, donc simplement, vers F. Autrement dit, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\mathrm{F})\mathrm{e}^{i\omega n t} = \mathrm{F}(t).$$

Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients de Fourier de F, et l'affaire est dans le sac. C'est tout droit :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\mathrm{F}) &= \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\mathrm{T}} f(t+k\mathrm{T})\mathrm{e}^{-i\omega n t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{k\mathrm{T}}^{(k+1)\mathrm{T}} f(t)\mathrm{e}^{-in\omega(t-k\mathrm{T})}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}} f^*(n).
\end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième ligne mérite quelques justifications. Comme on l'a vu, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0, \mathrm{T}]$. On peut donc bien intervertir somme et intégrale.

Finalement, on obtient bien la formule sommatoire de Poisson recherchée.

2. (a) La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-a|x|}$ est intégrable, continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et il n'est pas difficile de se convaincre que $x \mapsto (1+|x|^\alpha)f(x)$ et $x \mapsto (1+|x|^\alpha)f'(x)$ sont bornées ; la formule de Poisson s'applique donc [6], et l'on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n\mathrm{T}) = \frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^*(n)\mathrm{e}^{in\omega t}.$$

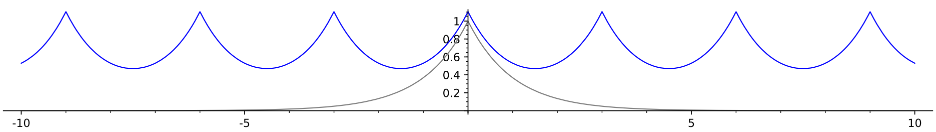


FIGURE 7.3 – Les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-a|x|}$ et F, avec T = 3

Il s'agit maintenant de calculer la seconde somme. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On trouve

$$\begin{aligned}
f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a|t|}\mathrm{e}^{-in\omega t}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-in\omega)t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+in\omega)t}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\mathrm{A}\to\infty} \left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(a-in\omega)t)}}{a-in\omega} \right]_{\mathrm{A}}^{0} + \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(a+in\omega)t)}}{a+in\omega} \right]_0^{\mathrm{A}} \right) \\
&= \frac{1}{a-in\omega} + \frac{1}{a+in\omega} \\
&= \frac{2a}{a^2+n^2\omega^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathrm{F}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-a|t+n\mathrm{T}|} = \frac{2a}{\mathrm{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\mathrm{e}^{in\omega t}}{a^2+n^2\omega^2}.$$

6. Pas directement en fait, car f n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Toutefois, on peut reprendre la preuve de la question 1 : la fonction F est $\mathscr{C}^1$ par morceaux et continue (elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble discret $\mathrm{T}\mathbb{Z}$), et tout fonctionne à l'identique.

(b) En appliquant la formule précédente avec $\omega = 1$ (c'est-à-dire $\mathrm{T} = 2\pi$), et $t = 0$, on obtient :

$$\mathrm{F}(0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2a}{a^2+n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2a|n|\pi} = 2\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{e}^{-2an\pi} - 1 = 2\sum_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{e}^{-2a\pi})^n - 1 = 2\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2a\pi}} - 1.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2a}{a^2+n^2} = \frac{1+\mathrm{e}^{-2a\pi}}{1-\mathrm{e}^{-2a\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{2a\pi}+1}{\mathrm{e}^{2a\pi}-1} = \coth(\pi a).$$

Finalement, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a).$$

(c) Isolons dans la somme le terme en $n = 0$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^2+n^2},$$

et posons

$$g : a \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{a^2+n^2} \quad \text{et} \quad h : a \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^2+n^2}.$$

De l'inégalité $\frac{1}{a^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$, on déduit que la série de fonctions continues $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^2+n^2}$ converge normalement, donc uniformément, et que h est continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme uniformément convergente de la série des fonctions continues $h_n : a \mapsto \frac{1}{a^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$).

Trouvons un développement asymptotique de g en 0 :

$$\begin{aligned}\coth(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}} &= \left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^3)\right) = \frac{1}{x}+\frac{x}{3}+o(x^2).\end{aligned}$$

On a donc, en utilisant la formule précédente :

$$g(a) = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a) = \frac{\pi}{a}\left(\frac{1}{\pi a}+\frac{\pi a}{3}+o(a^2)\right) = \frac{1}{a^2}+\frac{\pi^2}{3}+o(a).$$

Finalement, on a démontré l'égalité

$$\frac{1}{a^2}+2h(a) = g(a) = \frac{1}{a^2}+\frac{\pi^2}{3}+o(a),$$

d'où

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{a^2+n^2} = h(a) = \frac{\pi^2}{6}+o(a).$$

En faisant tendre a vers 0 et, compte tenu du fait que h est continue, on obtient finalement :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} = h(0) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 44 (Noyau de Fejér et théorème de Weierstrass trigonométrique)

Soit E l'espace des fonctions continues, périodiques, de période 2π, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $n \geqslant 0$, on note

$$\sigma_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx},\ \mathrm{K}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sigma_j.$$

La fonction K_n, qui est bien dans E, est appelée noyau[7] de Fejér.

On fixe une fonction f de E ; nous allons montrer que si l'on pose

$$\mathrm{K}_n * f(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\mathrm{K}_n(y)\mathrm{d}y,$$

alors, la suite $(\mathrm{K}_n * f)$ est une suite de fonctions polynomiales trigonométriques tendant vers f pour la norme uniforme de E.

1. Montrer, pour tout entier naturel, les formules

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{K}_n(x)\mathrm{d}x = 1,\ \mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})},\ x \notin \mathbb{Z}.$$

2. (a) Soit $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, montrer que

$$0 \leqslant j \leqslant n-1 \text{ et } -j \leqslant k \leqslant j \text{ est équivalent à } -n+1 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ et } |k| \leqslant j \leqslant n-1.$$

   (b) En déduire l'égalité $\mathrm{K}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n})e^{ikx}$.

3. (a) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 2\pi]$, $|x-y| < \eta$ implique $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   (b) On fixe $\mathrm{M} > 1$. Montrer que $|\mathrm{K}_n * f(x) - f(x)| < \mathrm{M}\varepsilon$ pour n assez grand. En déduire que la suite $(\mathrm{K}_n * f)$ est une suite de fonctions de E tendant vers f pour la norme uniforme.

4. Pour tout $n \geqslant 0$, soit

$$\mathrm{S}_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},\ c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iky}\mathrm{d}y,$$

les sommes partielles de Fourier, où les c_k désignent les coefficients de Fourier. Montrer que $\mathrm{K}_n * f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{S}_k$ et en déduire le théorème de Fejér qui stipule que la moyenne arithmétique des sommes partielles de Fourier de la fonction continue périodique f converge uniformément vers f.

Soluce

1. On sait que pour tout entier k, $\int_0^{2\pi} e^{ikx}\mathrm{d}x = 2\pi\delta_{0k}$. On en déduit $\int_0^{2\pi}\sigma_k(x)\mathrm{d}x = 2\pi$ et la première formule découle de la linéairité de l'intégrale.

   Pour la seconde formule, on note que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ implique $e^{ix} \neq 1$. On peut utiliser la formule de la série géométrique pour prouver que

$$\sigma_n(x) = e^{-inx}\frac{e^{(2n+1)ix}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{(n+1)ix}-e^{-inx}}{e^{ix}-1}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_n(x) &= \frac{1}{n(e^{ix}-1)}\sum_{j=0}^{n-1}\left(e^{(j+1)ix}-e^{-ijx}\right)\\
&= \frac{1}{n(e^{ix}-1)}\left(e^{ix}\frac{e^{nix}-1}{e^{ix}-1} - e^{-(n-1)ix}\frac{e^{nix}-1}{e^{ix}-1}\right)\\
&= \frac{e^{ix}(e^{nix}-1)}{n(e^{ix}-1)^2}(1-e^{-nix}) = \frac{\left(e^{\frac{nix}{2}}-e^{-\frac{nix}{2}}\right)^2}{n(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}})^2} = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{n\sin^2(\frac{x}{2})}.
\end{aligned}$$

2. (a) Si $0 \leqslant j \leqslant n-1$ et $-j \leqslant k \leqslant j$, alors, $-n+1 \leqslant -j \leqslant 0$ et il est clair que $-n+1 \leqslant k \leqslant n-1$. De plus, $|k| \leqslant j \leqslant n-1$.
Réciproquement, si $|k| \leqslant j \leqslant n-1$, alors $-j \leqslant k \leqslant j$ et $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

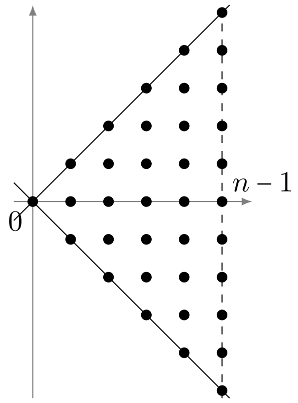


FIGURE 7.4 – Comptage de points du 2 (a)

(b) On a tout d'abord $\mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sigma_j(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j} e^{ikx}$. Par ce qui précède, il vient

$$\mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=-n+1}^{n-1}\sum_{j=|k|}^{n-1} e^{ikx} = \frac{1}{n}\sum_{k=-n+1}^{n-1}(n-|k|)e^{ikx}.$$

Il ne reste plus qu'à ajouter deux termes nuls aux deux extrémités de la somme pour obtenir $\mathrm{K}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n})e^{ikx}$.

3. (a) Comme f est continue sur le compact $[0, 2\pi]$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine. L'existence η en découle.
(b) Par la question 1, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{K}_n(y)\mathrm{d}y$. Ceci implique

$$\mathrm{K}_n * f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x-y)-f(x)\right)\mathrm{K}_n(y)\mathrm{d}y.$$

Par la question 1, $\mathrm{K}_n(x)$ est un réel positif. Il vient alors

$$|\mathrm{K}_n * f(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{K}_n(y)\mathrm{d}y = \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3,$$

avec

$$\mathrm{I}_1 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta}|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{K}_n(y)\mathrm{d}y,\ \mathrm{I}_2 := \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{2\pi-\eta}|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{K}_n(y)\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{I}_3 := \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\eta}^{2\pi}|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{K}_n(y)\mathrm{d}y.$$

Par 1) et 3a), $\mathrm{I}_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{K}_n(y)\mathrm{d}y = \frac{\varepsilon}{2}$, et de même $\mathrm{I}_3 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, comme $\sin(t/2) \geqslant \sin(\eta/2)$ pour $\eta \leqslant t \leqslant 2\pi-\eta$,

$$\mathrm{I}_2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\eta}^{2\pi-\eta}|f(x-y)-f(x)|\,\frac{1}{n\sin^2(\frac{\eta}{2})}\mathrm{d}y \leqslant \frac{2\,\|f\|_\infty}{n\sin^2(\frac{\eta}{2})},$$

où $\|f\|_\infty$ est la borne sup de f. On en déduit en faisant la somme des inégalités

$$|\mathrm{K}_n * f(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{2\,\|f\|_\infty}{n\sin^2(\frac{\eta}{2})}.$$

Comme $\mathrm{M} > 1$ et que $\frac{\|f\|_\infty}{n\sin^2(\frac{\eta}{2})}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on peut trouver n assez grand pour que l'on ait $|\mathrm{K}_n * f(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + (\mathrm{M}-1)\varepsilon = \mathrm{M}\varepsilon$.

Ceci implique bien que la suite $(\mathrm{K}_n * f)$ tend vers f pour la norme uniforme. Le fait que $\mathrm{K}_n * f$ soit périodique résulte de sa définition, et le fait qu'elle soit continue provient des critères de continuité d'une fonction définie par une intégrale ; ici il est suffisant de voir que la fonction $f(x-y)\mathrm{K}_n(y)$ est continue en x et en $t \in [0, 2\pi]$, qui est fermé borné.

4. Par 2π-périodicité des fonctions, on a pour tout x

$$\int_0^{2\pi} f(y)e^{ik(x-y)}\mathrm{d}y = -\int_x^{x-2\pi} f(x-y)e^{iky}\mathrm{d}y = \int_{x-2\pi}^{x} f(x-y)e^{iky}\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{2\pi} f(x-y)e^{iky}\mathrm{d}y$$

On peut écrire

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{S}_k(x) = \frac{1}{n2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-k}^{k}\int_0^{2\pi} f(y)e^{ij(x-y)}\mathrm{d}y = \frac{1}{n2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-k}^{k}\int_0^{2\pi} f(x-y)e^{ijy}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{n2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{2\pi} f(x-y)\sigma_k(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\mathrm{K}_n(y)\mathrm{d}y = \mathrm{K}_n * f(x).$$

Le théorème de Fejér découle alors directement de la question 3.

Remarque. Voici quelques commentaires sur l'exercice. Tout d'abord, on peut voir la fonction K_n tendre vers un "Dirac", ce qui explique le résultat $\mathrm{K}_n * f \to f$ obtenu. Ensuite, sur le résultat lui-même, on peut dire qu'il s'agit d'un théorème de Weierstrass trigonométrique. En effet, la suite $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{S}_n(x)$ est une suite de fonctions trigonométriques (sous forme exponentielle), et cette suite tend uniformément vers la fonction continue f, ce qui l'apparente au théorème de Weierstrass, voir exercices 5 et 109. Pour finir, on note que ce résultat s'inscrit par rapport au théorème

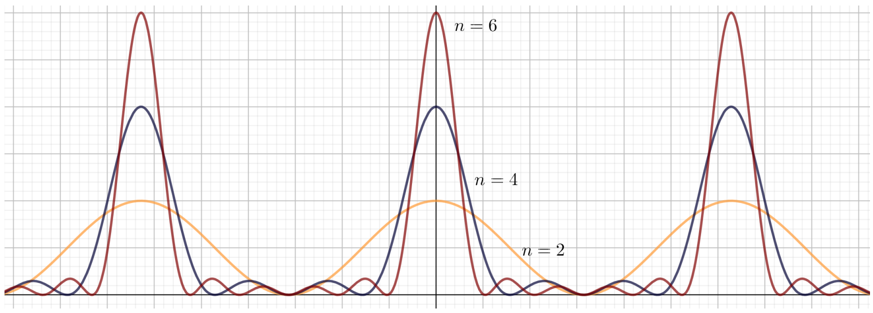


FIGURE 7.5 – Graphe des premiers noyaux de Fejer K_n

de Dirichlet qui, dans le cas d'une fonction continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, assure que la suite de fonctions S_n converge simplement vers f. Par le théorème de Cesàro, la suite des moyennes converge également vers f, mais comme on vient de le voir, la convergence est cette fois-ci uniforme.

Remarque (L'interprétation par le théorème de Korovkin).
Cet exercice devient passionnant si on le regarde à travers le prisme du théorème de Korovkin, voir exercice 4. En effet, il n'est pas bien difficile [8] d'adapter le théorème de Korovkin pour montrer que les fonctions trigonométriques sont denses dans l'espace E des fonctions continues réelles 2π-périodiques.

Eclairons un peu le propos. On voit dans un premier temps qu'une variante facile du théorème de Korovkin dit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'opérateurs linéaires positifs de E (ou, si l'on préfère, d'endomorphismes de E qui envoient une fonction positive sur une fonction positive), et si $u_n(f)$ tend vers f (pour la norme uniforme) lorsque $f = 1, \cos(x), \sin(x)$, alors $u_n(f)$ tend vers f, pour la norme uniforme, quel que soit f dans E.

La première idée est donc d'utiliser l'opérateur u_n qui envoie f sur la somme partielle de Fourier :

$$u_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \text{ avec } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iky}\,\mathrm{d}y.$$

Cet opérateur est bien linéaire, mais malheureusement, il n'est pas positif ! Effectivement, il s'agit de l'opérateur $u_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\sigma_n(y)\,\mathrm{d}y$, (penser à changer $x-y$ en y et utiliser la périodicité) avec

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\frac{e^{(2n+1)ix}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{(n+1)ix}-e^{-inx}}{e^{ix}-1} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Il apparaît clairement que cet opérateur n'est pas positif. L'idée (géniale, avouons-le !) est de moyenner cet opérateur pour le rendre positif : $\mathrm{K}_n(x) = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{n\sin^2(\frac{x}{2})}$.

Ceci explique que l'opérateur $f \mapsto \mathrm{K}_n * f$ est positif et que l'on peut appliquer la variante du théorème de Korovkin pour montrer que $\mathrm{K}_n * f$ tend uniformément vers f. Il suffit de le faire pour les trois fonctions $1, \cos(x), \sin(x)$, dont les sommes partielles de Fourier sont évidentes à calculer.

8. Voir par exemple la vidéo https ://www.youtube.com/watch ?v=7qfhq9-QZ5g

Chapitre 8

Intégrales : généralisées, à paramètre, multiples

8.1 Intégrales généralisées

Cadre (Gauss sous toutes les coutures)
Le but des exercices suivants est d'étudier et calculer l'*intégrale de Gauss* :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

La méthode la plus expéditive reste tout de même l'intégrale double de l'exercice 61.

Exercice 45 (méthode 1 : intégrales de Wallis [1])
La méthode que l'on va suivre ramène le calcul de I aux intégrales de Wallis, en obtenant l'intégrale de Gauss comme limite d'une suite d'intégrales.

Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}.$$

On définit également $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Enfin, on définit une autre suite de fonctions, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(x) = f_n(x^2), \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

1. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \mathrm{I}.$$
2. En utilisant l'équivalent en l'infini des intégrales de Wallis, en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

Soluce

1. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée.

   Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, puisqu'elle est continue sur l'intervalle $\left[0, \sqrt{n}\right]$, et nulle partout ailleurs.

   Fixons maintenant $x \in \mathbb{R}^+$. Pour $x \in \left[0, \sqrt{n}\right]$, les fonctions étant nulles dès que $x > \sqrt{n}$, on a :

   $$g_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(-\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-x^2 + o(1)}.$$

   On en déduit que la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction g.

   À présent, majorons les fonctions $(g_n)_n$. Remarquons déjà que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant g_n(x)$. De plus, fixons $n \in \mathbb{N}^*$; on sait que, si $x \geqslant \sqrt{n}$, on a

   $$g_n(x) = 0.$$

   Ensuite, pour $x \in \left[0, \sqrt{n}\right[$, on a

   $$0 \leqslant 1 - \frac{x^2}{n} \leqslant 1.$$

   Comme, pour tout $u \in [0, 1[$, on a $\ln(1-u) < -u$, par inégalité des accroissements finis, on peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$:

   $$g_n(x) = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{n\left(-\frac{x^2}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-x^2} = g(x),$$

   qui est une fonction continue, et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque, en 0, elle est négligeable devant $x \mapsto 1/\sqrt{x}$, qui est intégrable, par le critère de Riemann, et qu'en l'infini, elle est négligeable devant $x \mapsto 1/x^2$, intégrable, par le même critère.

   Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique, et l'on obtient :

   $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} g_n(t) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t) \mathrm{d}t = \mathrm{I}.$$

2. L'égalité de la première question se réécrit de la façon suivante :

   $$\mathrm{I} = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) \mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

   Il s'agit donc d'étudier le membre de gauche. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

   $$\mathrm{J}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x.$$

   On effectue alors le changement de variables $x/\sqrt{n} = \cos(t)$, qui est un difféomorphisme de $\left]0, \sqrt{n}\right[$ dans $]0, \pi/2[$. On a alors

   $$\mathrm{J}_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2(t)\right)^n \left(-\sqrt{n} \sin(t) \mathrm{d}t\right) = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) \mathrm{d}t.$$

1. Prochainement dans le second TOM, découvrez la méthode Futuna !

On reconnaît ici une intégrale de Wallis, d'indice $2n+1$. Or, par une intégration par parties, et en étudiant le quotient des intégrales de Wallis d'indice pair sur celles d'indice impair, quand n tend vers l'infini, on trouve l'équivalent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc, ici, on a

$$\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement, en rapprochant ce résultat de la première question, on obtient la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\mathrm{I} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 46 (méthode 2 : intégrale à paramètre & équation différentielle)
Tout est résumé dans le titre : la valeur de l'intégrale de Gauss va provenir de l'étude d'une fonction définie par une intégrale solution d'une certaine équation différentielle.

Pour t réel positif ou nul, on pose

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la fonction h est bien définie, et qu'elle est continue.
2. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa dérivée. En déduire que h est solution d'une équation différentielle à déterminer.
3. Résoudre cette équation différentielle.
4. En comparant la limite de la fonction h en $+\infty$ et sa valeur en 0, déterminer la valeur de la constante. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Soluce

1. Dans toute la suite, notons

$$f : (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+x^2},$$

définie sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Fixons $t > 0$. Tout d'abord, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx^2}/(1+x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx^2}/(1+x^2)$ est négligeable devant $x \mapsto 1/x^2$ en l'infini, qui est intégrable par le critère de Riemann ; cela montre que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc que la fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour montrer qu'elle est continue, on utilise le théorème de continuité sous le signe intégrale. Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $f(t,\cdot)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$; pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $f(\cdot,x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, pour tous t et x positifs ou nuls, on a

$$|f(t,x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2} \ :$$

le membre de droite est une fonction indépendante de t et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (c'est la dérivée de l'arc-tangente qui a une limite en l'infini).

Ainsi, par le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction h est bien continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour montrer la dérivabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$, on utilise le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Tout d'abord, pour tout $t > 0$, la fonction $f(t, \cdot)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $f(\cdot, x)$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et la dérivée est

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{-tx^2},$$

qui est une fonction continue en les deux variables. De plus, si l'on fixe $a > 0$, alors, pour tout $(t, x) \in [a, +\infty[\times [0, +\infty[$, on a

$$\left| -\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{-tx^2} \right| \leqslant \mathrm{e}^{-tx^2} \leqslant \mathrm{e}^{-ax^2},$$

fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par le critère de Riemann, toujours.

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on en déduit que la fonction h est dérivable sur $[a, +\infty[$, et sa dérivée est donnée, pour tout $t > 0$, par :

$$h'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x.$$

Ceci étant valable pour tout $a > 0$, la dérivabilité est valable sur tout $\mathbb{R}^{+*}$.

Maintenant, en écrivant $x^2/(1+x^2) = (1+x^2-1)/(1+x^2)$, on trouve alors que la fonction h est solution de l'équation différentielle suivante, sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$h'(t) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x + h(t).$$

En effectuant le changement de variables $u = \sqrt{t}x$, qui est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même, on obtient l'équation différentielle satisfaite par h :

$$h'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{I} + h(t). \tag{$\star$}$$

3. Il s'agit maintenant de résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'équation homogène

$$h' - h = 0$$

se résout de manière classique. Ses solutions sont déterminées par une constante réelle C : pour tout $t > 0$,

$$h(t) = \mathrm{C}\mathrm{e}^t.$$

Quant à la solution particulière, utilisons la méthode de variation de la constante. Si C est une fonction dérivable telle que $h = \mathrm{C}\exp$ est solution de l'équation $(\star)$, alors on a pour tout $t > 0$

$$\mathrm{C}'(t)\mathrm{e}^t + \mathrm{C}(t)\mathrm{e}^t = h'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{I} + \mathrm{C}(t)\mathrm{e}^t,$$

et donc
$$C'(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} I,$$
qui permet d'écrire une solution particulière [2]
$$C(t) = -I \int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

On récrit cette intégrale en effectuant le changement de variables $v = \sqrt{u}$, qui est un difféomorphisme de $]0, t[$ sur $]0, \sqrt{t}[$:
$$C(t) = -2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv.$$

Finalement, on peut affirmer que pour tout t strictement positif,
$$h(t) = Ce^t - 2Ie^t \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv,$$
où C est une constante à déterminer [3].

4. Commençons par étudier la limite de la fonction h en 0 : d'une part, on a par définition de h,
$$h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan(x)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$
D'autre part, l'expression de h obtenue à la question précédente donne :
$$\lim_{t\to 0^+} h(t) = C.$$
En utilisant la continuité de h en 0, on trouve
$$C = \frac{\pi}{2}.$$
Pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on a : $\lim_{t\to+\infty} f(x,t) = 0$. De plus, la majoration uniforme $0 \leqslant f(x,t) \leqslant 1/(1+x^2)$ par rapport à t permet d'appliquer le théorème de convergence dominée et de permuter la limite en l'infini et l'intégrale :
$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x,t) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} f(x,t) dx = 0.$$
On a donc également
$$\lim_{t\to+\infty} h(t)e^{-t} = 0,$$
c'est-à-dire, en utilisant l'expression trouvée précédemment,
$$\lim_{t\to+\infty} \left(C - 2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv \right) = 0,$$

2. Ici, on cherche une solution particulière, pas la peine d'écrire la constante d'intégration.
3. Noter l'abus consistant à changer le statut de C toutes les deux lignes.

ou encore
$$0 = \frac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}^2.$$
Comme I est l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, l'intégrale de Gauss est positive et l'on obtient enfin :
$$\mathrm{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 47 (Intégrale de Fresnel)
Le but assumé de cet exercice est de déduire de l'intégrale de Gauss et de l'inégalité $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$ (où $x \in [0, \pi/2]$) la valeur de l'intégrale de Fresnel :
$$\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ix^2}\mathrm{d}x.$$

Pour r réel positif, on définit un chemin par la concaténation de trois courbes (figure 8.1) :
— S_r le segment $[0, r]$, parcouru de 0 vers r,
— T_r l'arc de cercle de centre 0 et de rayon r compris entre les arguments 0 et $\pi/4$, parcouru dans le sens trigonométrique,
— U_r le segment $[r\mathrm{e}^{i\pi/4}, 0]$ parcouru de $r\mathrm{e}^{i\pi/4}$ vers 0.

1. On veut montrer que pour toute courbe fermée Γ, $\int_\Gamma \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = 0$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute courbe fermée Γ, on a : $\int_\Gamma z^n dz = 0$. *Utiliser le fait que $z^{n+1}/(n+1)$ est une « primitive » de la fonction à intégrer.*
   (b) Développer e^{-z^2} en série entière et justifier la permutation de la série et de l'intégrale. En déduire le résultat annoncé.
2. On veut montrer que $\lim_{r\to+\infty} \int_{\mathrm{T}_r} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = 0$.
   (a) Vérifier que pour $u \in [0, \pi/2]$, $\cos(u) \geqslant 1 - 2u/\pi$.
   (b) Calculer le module de e^{-z^2} lorsque $z \in \mathrm{T}_r$ et en déduire la limite annoncée.
3. Démontrer enfin que J existe et la calculer à l'aide de $\mathrm{I} = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathrm{S}_r} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z$.

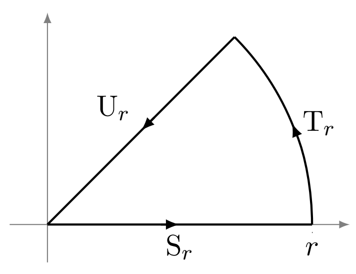


FIGURE 8.1 – Contour pour l'intégrale de Fresnel

Rappel. *Pour* Γ *une courbe paramétrée par* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *(supposée* $\mathscr{C}^1$ *p.m. et* $\mathscr{C}^0$*) et pour* f *une fonction continue sur un voisinage de* Γ*, on définit* l'intégrale curviligne *de* f *le long de* Γ *:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

.

Soluce

1. Supposons que la courbe Γ est paramétrée par $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Dire qu'elle est fermée, c'est dire que $\gamma(a) = \gamma(b)$.
   (a) Posons, pour z complexe, $f(z) = z^n$ et $\mathrm{F}(z) = z^{n+1}/(n+1)$. Pour $t \in [a,b]$, on a[4] :
   $$(\mathrm{F}\circ\gamma)'(t) = \gamma'(t)\big(\gamma(t)\big)^n = f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t).$$
   Il vient, puisque $\gamma(a) = \gamma(b)$:
   $$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\mathrm{d}t = \big[\mathrm{F}\big(\gamma(t)\big)\big]_a^b = \mathrm{F}\big(\gamma(a)\big) - \mathrm{F}\big(\gamma(b)\big) = 0.$$
   (b) La courbe Γ est compacte donc contenue dans un disque de centre l'origine et, disons, de rayon R. On a :
   $$\int_\Gamma \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = \int_\Gamma \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-z^2)^n}{n!}\mathrm{d}z = \int_a^b \sum_{n\geqslant 0} \gamma'(t)\frac{\big(-\gamma(t)^2\big)^n}{n!}\mathrm{d}t.$$
   Posons, pour $t \in [a,b]$, $f_n(t) = \gamma'(t)\big(-\gamma(t)^2\big)^n/n!$. Pour tout t, on a la majoration :
   $$\big|f_n(t)\big| \leqslant \mathrm{C}\frac{\mathrm{R}^{2n}}{n!} \quad \text{et} \quad \int_a^b \big|f_n(t)\big|\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{C}(b-a)\frac{\mathrm{R}^{2n}}{n!},$$
   où $\mathrm{C} = \sup_{t\in[a,b]}\big|\gamma'(t)\big|$. La convergence de la série $\sum \int_a^b |f_n|$ permet d'échanger la somme et l'intégrale, et on voit que chaque terme est nul :
   $$\int_\Gamma \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = \sum_{n\geqslant 0}\int_\Gamma \frac{(-z^2)^n}{n!}\mathrm{d}z = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}\int_\Gamma z^{2n}\mathrm{d}z = 0.$$
2. (a) Cela vient de la concavité du cosinus sur $[0,\pi/2]$ car sa dérivée seconde y est négative.
   (b) Un point T_r est de la forme $z = r\mathrm{e}^{it}$ où $t \in [0,\pi/4]$. On a :
   $$\big|\mathrm{e}^{-z^2}\big| = \big|\mathrm{e}^{-r^2\mathrm{e}^{2it}}\big| = \mathrm{e}^{-r^2\cos 2t} \leqslant \mathrm{e}^{-r^2\left(1-\frac{4t}{\pi}\right)}.$$
   On a donc :
   $$\begin{aligned}\left|\int_{\mathrm{T}_r}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^{-r^2\mathrm{e}^{2it}}ir\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant r\mathrm{e}^{-r^2}\int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^{\frac{4r^2}{\pi}t}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\pi\mathrm{e}^{-r^2}}{4r}\big(\mathrm{e}^{r^2}-1\big) \leqslant \frac{\pi}{4r}.\end{aligned}$$

4. Abus : ce qui est écrit n'est vrai qu'en-dehors des points de discontinuité, il faudrait recoller.

Remarque. L'estimation est assez bonne puisque d'après des calculs numériques, le module de l'intégrale semble être équivalent à $1/(2r)$ (exercice...).

3. On paramètre S_r par $z = x$ pour $x \in [0, r]$... Vu le sens de parcours, l'intégrale sur U_r est l'opposée de l'intégrale sur le segment paramétré par $z = t\mathrm{e}^{i\pi/4}$ pour $t \in [0, r]$. On a alors : $\mathrm{e}^{-z^2} = \mathrm{e}^{-it^2}$. On a donc :
$$0 = \int_\Gamma \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = \int_0^r \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{T}_r} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z - \int_0^r \mathrm{e}^{-it^2}\mathrm{e}^{i\pi/4}\mathrm{d}t.$$
Or on sait que quand r tend vers l'infini, la première intégrale tend vers l'intégrale de Gauss, la deuxième tend vers 0. Par conséquent, la troisième a une limite, ce qui prouve l'existence de l'intégrale de Fresnel et donne :
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-it^2}\mathrm{d}t = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r \mathrm{e}^{-it^2}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-i\pi/4}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$
ce que l'on peut écrire :
$$\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 48
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale :
$$\mathrm{I} := \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-{}^t\mathrm{XAX})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{où l'on a noté } \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Soluce
Comme A est symétrique définie et positive, on sait, par le théorème de Sylvester, qu'il existe une matrice réelle inversible P telle que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PP}$, ce qui implique en particulier $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{P})^2$.

Comme l'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{PX}$ est un difféomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^2$, le changement de variables $\mathrm{U} = \mathrm{PX}$ est licite (son jacobien est le déterminant de P) ; il donne, en notant $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:
$$\mathrm{I} = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-{}^t\mathrm{UU})\det(\mathrm{P})^{-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \det(\mathrm{P})^{-1}\iint_{\mathbb{R}^2}\exp(-u^2 - v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$
On passe alors en coordonnées polaires : $u = r\cos(\theta)$, $v = r\sin(\theta)$, pour obtenir
$$\mathrm{I} = \det(\mathrm{P})^{-1}\iint_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi[}\exp(-r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Par le théorème de Fubini (on est dans un cas de séparation de variables, avec deux fonctions continues, respectivement, en u et v), on a :
$$\mathrm{I} = \det(\mathrm{P})^{-1}\int_0^{+\infty}\exp(-r^2)r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta.$$
Une primitive de $\exp(-r^2)r$ est $-\frac{1}{2}\exp(-r^2)$. On obtient en définitive :
$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{\sqrt{\det(\mathrm{A})}}.$$

Exercice 49 (Wallis et les hyperboules)
On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On veut calculer le volume $\mathrm{V}_n(\mathrm{R})$ de l'hyperboule $\mathrm{B}_n(\mathrm{R})$ de rayon R définie par

$$\mathrm{B}_n(\mathrm{R}) := \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \mathrm{R}^2\right\}$$

On propose de montrer les formules suivantes

$$\mathrm{V}_n(\mathrm{R}) = \mu_n \mathrm{R}^n, \text{ avec } \mu_1 = 2,\ \mu_2 = \pi,\ \mu_n = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2}.$$

Puis,

$$\mathrm{V}_n(\mathrm{R}) = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!}\mathrm{R}^{2m} & \text{si } n = 2m \text{ est pair,} \\ \frac{2^{2m+1} m! \pi^m}{(2m+1)!}\mathrm{R}^{2m+1} & \text{si } n = 2m+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Vérifier la formule pour $n = 1$ et 2.
2. On veut calculer l'intégrale de Wallis $\mathrm{I}_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer, par une intégration par parties, que $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$. En déduire, au passage, que $n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
   (b) Calculer I_{2m+1}, puis, I_{2m}.
3. En vous ramenant à l'intégrale de Wallis après changement de variable, montrer par récurrence la formule proposée.
4. Etudier les variations du volume de la boule $\mathrm{B}_n(1)$ en fonction de n.

Soluce

1. Pour $n = 1$, on trouve $\mathrm{B}_1(\mathrm{R}) = 2\mathrm{R}$, qui correspond bien à la longueur du segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$, et pour $n = 2$, on a $\mathrm{B}_2(\mathrm{R}) = \pi\mathrm{R}^2$, la surface du disque, formule qui n'est plus à présenter, et qui en a séduit plus d'un, d'Archimède à Grothendieck.
2. (a) On peut commencer par décomposer,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t)(1-\cos^2(t))\mathrm{d}t = \mathrm{I}_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t.$$

On suppose $n > 1$ et on intègre par parties en posant $u' = \sin^{n-2}(t)\cos(t)$, $v = \cos(t)$, et donc, $u = \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(t)$, $v' = -\sin(t)$, pour obtenir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = [\frac{\cos(t)}{n-1}\sin^{n-1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1}\mathrm{I}_n.$$

D'où l'égalité $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-2} - \frac{1}{n-1}\mathrm{I}_n$, et donc, $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$.
On en déduit alors, en multipliant par I_{n-1} cette égalité, que la suite de terme général $n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1}$ est constante. Il vient donc

$$n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_0 = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, on trouve, en intégrant $\sin(t)$, que $\mathrm{I}_1 = 1$,

(b) On a par récurrence $\mathrm{I}_{2m+1} = \frac{(2m)(2m-2)\cdots(2)}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3}\mathrm{I}_1$. Comme $\mathrm{I}_1 = 1$, il vient :

$$\mathrm{I}_{2m+1} = \frac{(2m)(2m-2)\cdots(2)}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} = \frac{(2m)^2(2m-2)^2\cdots(2^2)}{(2m+1)!} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Puis, la relation $(2m+1)\mathrm{I}_{2m+1}\mathrm{I}_{2m} = \frac{\pi}{2}$, prouvée plus haut, montre que

$$\mathrm{I}_{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\frac{\pi}{2}$$

3. La boule $\mathrm{B}_n(\mathrm{R})$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \mathrm{R}^2$, inéquation que l'on peut aussi écrire

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant \mathrm{R}^2 - x_n^2.$$

Ceci implique

$$\mathrm{B}_n(\mathrm{R}) = \{(u, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R},\ u \in \mathrm{B}_{n-1}\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 - x_n^2}\right),\ -\mathrm{R} \leqslant x_n \leqslant \mathrm{R}\}.$$

Par un corollaire classique du théorème de Fubini, il vient

$$\mathrm{V}_n(\mathrm{R}) = \int_{\mathrm{B}_n(\mathbb{R})} \mathrm{d}v = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \int_{\mathrm{B}_{n-1}\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 - x_n^2}\right)} \mathrm{d}u\mathrm{d}x_n.$$

On suppose, par récurrence sur n, que $\mathrm{V}_n(\mathrm{R}) = \mu_n \mathrm{R}^n$, pour un réel μ_n dépendant de n. Notons cette hypothèse H_n. L'hypothèse H_1 est vraie, avec $\mu_1 = 2$. Supposons H_n vraie, alors, d'après ce qui précède,

$$\mathrm{V}_{n+1}(\mathrm{R}) = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \int_{\mathrm{B}_n\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 - x_{n+1}^2}\right)} \mathrm{d}u\mathrm{d}x_{n+1} = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \mu_n(\mathrm{R}^2 - x_{n+1}^2)^{n/2}\mathrm{d}x_{n+1}.$$

Le changement de variables $x_{n+1} = \mathrm{R}\cos(t)$ donne

$$\mathrm{V}_{n+1}(\mathrm{R}) = -\mu_n \int_{\pi}^{0} \mathrm{R}^n \sin^n(t)\mathrm{R}\sin(t)\mathrm{d}t = \mathrm{R}^{n+1}\mu_n \int_0^{\pi} \sin^{n+1}(t)\mathrm{d}t.$$

Notre récurrence est donc bien établie, avec

$$\mu_{n+1} = \mu_n \int_0^{\pi} \sin^{n+1}(t)\mathrm{d}t = 2\mu_n \mathrm{I}_{n+1},$$

en utilisant $\sin(\pi - t) = \sin(t)$. En particulier, cela implique

$$\mu_n = 2\mu_{n-1}\mathrm{I}_n = 4\mu_{n-2}\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2}.$$

Comme $\mu_1 = 2$ et $\mu_2 = \pi$, on trouve les formules annoncées.

4. Le volume de la boule unité en dimension n est $\mathrm{V}_n(1) = \mu_n$.
Comme $\mu_n = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2}$, on constate, par exemple en prenant le logarithme, que μ_n tend vers 0, ce qui ne manque pas de décevoir sur la représentation intime que l'on pourrait se faire d'une *hyperboule*.
Plus précisément, comme la fonction sin est comprise entre 0 et 1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on voit que $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ sur ce même intervalle, et donc, la suite I_n

décroît. On peut noter, par un petit calcul utilisant les formules de 2)b) que $2I_5 > 1 > 2I_6$. On obtient alors, puisque $\mu_n = 2I_n\mu_{n-1}$, que la suite μ_n croît jusqu'à μ_5, puis, décroît pour tendre vers 0.

On peut, par pur voyeurisme, regarder cela de plus près, en calculant $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \pi \simeq 3,14$, $\mu_3 = \frac{4\pi}{3} \simeq 4,19$, $\mu_4 = \frac{\pi^2}{2} \simeq 4,93$, $\mu_5 = \frac{8\pi^2}{15} \simeq 5,26$, $\mu_6 = \frac{\pi^3}{6} \simeq 5,16$, $\mu_7 = \frac{16\pi^3}{105} \simeq 4,72$.

Remarque. On peut voir facilement à l'aide de la formule de duplication de Legendre (exercice 52) que $V_n(R) = \mu_n R^n$, avec $\mu_n = V_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

Remarque. Les hyperboules expliquées aux amateurs de « Petits Lu ». Voyons un Petit Lu comme un carré plein. Quand on en grignote les « oreilles » pour n'en laisser que le disque intérieur, on en mange en proportion $1 - \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire 21,46 % environ. Si on prend un Petit Lu cubique (en dimension 3), alors, le grignotage passe à une proportion de 47,62 %, puis 69,19 % pour un Hyper Lu en dimension 4... Et ce nombre ne fait qu'augmenter en atteignant rapidement quelque chose de proche du 100 %. Moralité, il faut se méfier du grignotage, surtout en grande dimension !

Remarque. On peut trouver un équivalent de μ_n à l'aide de la formule de Stirling, pour voir que μ_n converge rapidement vers 0. On peut aussi décliner sans peine le problème avec des boules pour la norme N_p, donnée par

$$N_p(x_1, \ldots, x_n) = (|x_1|^p + \cdots |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque. Et l'« hypersurface » de l'hyperboule, alors ? Il suffit de dériver la formule du volume que l'on vient de déterminer !

8.2 Intégrales à paramètres

8.2.1 Fonction gamma

Exercice 50 (Formule des compléments)
On fixe $z \in]0,1[$, si bien que $\Gamma(z)$ et $\Gamma(1-z)$ sont bien définis.

Le but de cet exercice est de démontrer la *formule des compléments* :

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Plus précisément, nous allons montrer qu'elle est une conséquence de la *formule de duplication de Legendre*, qui fait l'objet des exercices 52 et 53 de ce recueil.

On rappelle que, dans l'exercice 53 en question est démontrée la formule suivante, valable pour $z \in]0,1[$ fixé, et lorsque $n \to +\infty$,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

1. Démontrer la formule suivante, qui donne un développement de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$ en un produit infini :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \sin(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

2. À l'aide de la formule rappelée ci-dessus, en déduire la formule des compléments.

Soluce

1. On ne présente plus la formule suivante, qui donne l'exponentielle comme une limite polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

ainsi que la formule reliant exponentielle et sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

Cela donne l'idée de poser, pour $z \in \mathbb{R}$, et pour tout n entier naturel [5],

$$\mathrm{P}_n(z) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1}\right)$$

Par une étude classique de limite, on voit que, pour $z \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(z) = \sin(z),$$

comme attendu. Dans toute la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}$.
Étudions maintenant les racines de ce polynôme ; on cherche les $z \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left(1+\frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\left(\frac{1+\frac{iz}{2n+1}}{1-\frac{iz}{2n+1}}\right)^{2n+1} = 1.$$

Fixons $k \in \{-n,\dots,n\}$; définissons alors z_k par la formule

$$\frac{1+\frac{iz_k}{2n+1}}{1-\frac{iz_k}{2n+1}} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right).$$

Comme le membre de droite $\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)$ n'est jamais égal [6] à -1, quel que soit k entre $-n$ et n, l'égalité précédente équivaut à :

$$z_k = -i(2n+1)\frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}+1} \quad (-n \leqslant k \leqslant n).$$

Enfin, en factorisant l'angle moitié, on obtient :

$$z_k = -i(2n+1)\frac{2i\sin\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)} = (2n+1)\tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right) \quad (-n \leqslant k \leqslant n). \qquad (\star)$$

5. On verra pourquoi choisir $2n+1$ au lieu de n plus tard.
6. C'est là l'intérêt d'avoir considéré les termes impairs, de la forme $2n+1$.

On obtient alors $2n+1$ éléments, distincts, qui annulent le polynôme P_n (il suffit de le vérifier) ; on a bien trouvé les racines de P_n.
Enfin, notons que le polynôme P_n n'est pas nul, au moins à partir d'un certain rang, puisque $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(z) \neq 0$ (en général) ; et son degré est au plus $2n+1$. Cela assure que les $2n+1$ racines (distinctes) exhibées précédemment sont toutes de multiplicité 1.
On peut donc écrire, pour tout $z \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, et en regroupant les termes par paires [7],

$$\mathrm{P}_n(z) = z \prod_{k=-n, k\neq 0}^{n} \left(1 - \frac{z}{(2n+1)\tan\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}\right) = z \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)}\right)$$

On aimerait maintenant pouvoir faire tendre n vers l'infini... Hélas, l'étude d'une suite doublement indicée s'impose. Fixons dans tout ce qui suit $z \in \mathbb{R}$, et posons alors

$$v_k(n) = \begin{cases} z \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi j}{2n+1}\right)}\right) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ \mathrm{P}_n(z) & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Pour $u \in [0, \pi/2[$, on a par convexité de la tangente : $\tan u \geqslant u$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a donc :

$$\left|v_k(n) - v_{k-1}(n)\right| = \frac{|z|^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right)} v_{k-1}(n) \leqslant \frac{|z|^2}{(\pi k)^2} v_{k-1}(n).$$

Par ailleurs, supposons que $z \neq 0$ (le résultat est trivial si $z = 0$) et utilisons l'inégalité $\ln(1-u) \leqslant -u$, valable pour $u \in]0,1[$. On écrit :

$$\begin{aligned} \ln|v_k(n)| &\leqslant \ln|z| + \sum_{j=1}^{k} \ln\left|1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi j}{2n+1}\right)}\right| \\ &\leqslant \ln(|z|) + \sum_{j=1}^{k} \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{\pi j}{2n+1}\right)} \\ &\leqslant \ln|z| + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{(\pi j)^2} < +\infty \end{aligned}$$

(Dans la dernière ligne, on a utilisé à nouveau la majoration $\tan u \geqslant u$ pour $u \in [0, \pi/2[$.) Grâce à cette seconde inégalité, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, le logarithme de $v_k(n)$ est borné, ce qui implique que $v_k(n)$ est borné. Il existe donc un réel C_z, dépendant du réel z, tel que pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left|v_k(n) - v_{k-1}(n)\right| \leqslant \frac{\mathrm{C}_z}{k^2}.$$

Cette majoration est aussi valable pour $k > n$, puisque pour un tel k, on a $v_k - v_{k-1} = 0$. On en déduit que la série de fonctions

$$\sum_{k\geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$$

7. Et sachant que le terme en $k = 0$ vaut 1...

converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{N}$. Or, par télescopage, cette série est égale à la limite de la suite des $(v_k)_k$; on en déduit donc que la suite (v_k) converge uniformément.
Enfin, comme, pour tout $k \geqslant 1$, la suite $\big(v_k(n)\big)_{n\geqslant 1}$ admet une limite finie, le théorème de la double limite s'applique donc, et l'on a, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\sin(z) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(z) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty} v_k(n) = \lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} v_k(n) = z\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 j^2}\right)$$

Finalement, on obtient la formule désirée : pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\sin(z) = z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

2. Observons la formule rappelée dans l'énoncé. Étudions alors le produit :

$$\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}\cdot\frac{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)}{n^{1-z}n!}$$

En distribuant les facteurs de $n!$ dans les facteurs du numerateur, et en regroupant les différents éléments du produit deux par deux pour faire apparaître des égalités remarquables, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}\cdot\frac{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)}{n^{1-z}n!}\\
&\qquad= \frac{z(1+z)(1+\frac{z}{2})\cdots(1+\frac{z}{n})}{n^z}\cdot\frac{(1-z)(1-\frac{z}{2})\cdots(1-\frac{z}{n})(1-z+n)}{n^{1-z}}\\
&\qquad= \frac{z(1-z+n)}{n}(1-z^2)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^n}{n^2}\right)\\
&\qquad= z\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit alors que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z n!}\cdot\frac{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)}{n^{1-z}n!}\\
&= \lim_{n\to+\infty} z\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)\\
&= z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

Or, par la question 1, ceci est égal à $\sin(\pi z)/\pi$. On a donc démontré la formule des compléments : pour tout $z \in]0,1[$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

Exercice 51 (Formule des compléments)
On propose de (re)démontrer la formule des compléments,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

cette fois-ci, à l'aide de la formule de la cotangente obtenue dans l'exercice 42. Au passage, on montre la formule reliant les fonctions bêta et gamma.

1. Pour tout couple de réels strictement positifs α et α', on définit

$$\mathrm{B}(\alpha,\alpha') = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha'-1}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer l'égalité

$$\mathrm{B}(\alpha,\alpha') = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}{\Gamma(\alpha+\alpha')}.$$

2. Soit $\varphi(\alpha) = \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha)$, pour $\alpha \in \,]0,1[$. En utilisant le changement de variables $u = \frac{t}{1+t}$, montrer

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}+u^{-\alpha}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

En déduire

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}.$$

3. En utilisant la redoutable astuce

$$\cot\frac{x}{2} - \cot x = \frac{1}{\sin x},\ x \notin \pi\mathbb{Z},$$

couplée à l'exercice 42, montrer l'égalité

$$\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+n},$$

et conclure.

Soluce

1. On a, par définition de Γ,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha') = \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \int_0^{+\infty} t^{\alpha'-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{s=0}^{+\infty}\int_{t=0}^{+\infty} s^{\alpha-1}t^{\alpha'-1}\mathrm{e}^{-s-t}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

On pose alors le changement de variables $(u,v) \mapsto (uv, u(1-v))$, dont on vérifie qu'il définit bien un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, de $\mathbb{R}^{+*}\times]0,1[$ vers $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$, d'inverse $(s,t) \mapsto (s+t, \frac{s}{s+t})$. On calcule son jacobien

$$\begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u.$$

Par le théorème de Fubini, on obtient :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha') = \iint_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} (uv)^{\alpha-1}u^{\alpha'-1}\mathrm{e}^{-u}u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_u^{+\infty} u^{\alpha+\alpha'-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \int_v^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\alpha'-1}\,\mathrm{d}v.$$

La formule $\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha') = \Gamma(\alpha+\alpha')\mathrm{B}(\alpha,\alpha')$ en découle.

2. Pour $\alpha \in]0,1[$ et $\alpha' = 1-\alpha$, il vient, en constatant que $\Gamma(1) = 1$ et en faisant le changement de variable $t = \frac{u}{u+1}$,

$$\varphi(\alpha) = \mathrm{B}(\alpha,1-\alpha) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

Dans le terme de droite, on pose, façon de parler, « $u = \frac{1}{u}$ », pour obtenir

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}+u^{-\alpha}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

Pour en déduire le développement désiré, on va développer $1/(1+u)$ en série entière : pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $u \in]0,1[$, on écrit :

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n u^n + \frac{(-u)^{\mathrm{N}+1}}{1+u},$$

puis

$$\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \int_0^1 \frac{(-u)^{\mathrm{N}+1}u^{\alpha-1}}{1+u}\mathrm{d}u,$$

$$\text{où } 0 \leqslant \int_0^1 \frac{u^{\mathrm{N}+1}}{1+u}\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 u^{\mathrm{N}+1}\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{N}+2}.$$

En passant à la limite $\mathrm{N} \to +\infty$ et en procédant de même ($\alpha \rightsquigarrow 1-\alpha$) pour la deuxième partie de l'intégrale, on trouve :

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-\alpha+n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}.$$

3. Par ailleurs, pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\cot\frac{x}{2} - \cot x = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{2\cos^2\frac{x}{2}-1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$$

D'après l'exercice 42, en écrivant $x = \pi\alpha$:

$$\pi\cot\pi\alpha = \frac{\pi}{\pi\alpha} + 2\pi^2\alpha\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\pi^2\alpha^2 - n^2\pi^2} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n}\right),$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} &= \pi\cot\frac{\pi\alpha}{2} - \pi\cot\pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{\frac{\alpha}{2}-k} + \frac{1}{\frac{\alpha}{2}+k}\right) - \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha} + \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{2}{\alpha-2k} + \frac{2}{\alpha+2k}\right) - \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\sum_{n=1}^{2\mathrm{N}}\left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n}\right) \\
&\overset{*}{=} \frac{1}{\alpha} + \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\sum_{n=1}^{2\mathrm{N}}\left(\frac{(-1)^n}{\alpha-n} + \frac{(-1)^n}{\alpha+n}\right) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{\alpha-n} + \frac{(-1)^n}{\alpha+n}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{\alpha+n}.
\end{aligned}$$

Justifications :

— de l'antépénultième égalité (notée $\overset{*}{=}$) : pour n pair, $n = 2k$, on trouve

$$\Big(\frac{2}{\alpha - 2k} + \frac{2}{\alpha + 2k}\Big) - \Big(\frac{1}{\alpha - n} + \frac{1}{\alpha + n}\Big) = \frac{1}{\alpha - n} + \frac{1}{\alpha + n}\ ;$$

pour n impair, on trouve juste

$$-\Big(\frac{1}{\alpha \pm n} + \frac{1}{\alpha \pm n}\Big).$$

— de la dernière égalité : elle est justifiée par la convergence des séries alternées $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\alpha \pm n}$.

On peut alors conclure.

Cadre (Formule de duplication de Legendre)
Le but de cet exercice est de démontrer la *formule de duplication de Legendre*. On rappelle tout d'abord que la fonction gamma est définie pour x réel strictement positif par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t.$$

La formule de duplication est alors la suivante :

$$\forall \alpha > 0, \quad 2^{\alpha - 1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha).$$

Exercice 52 (méthode 1 : intégrale multiple et changement de variable)
Partie 1

Pour $a > 0$, et $x \geqslant 0$; on pose

$$\mathrm{H}_a(x) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(at^2 + \frac{x}{t^2})} \mathrm{d}t.$$

On rappelle également le résultat suivant [8] :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. Montrer que la fonction $\mathrm{H}_a : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ est continue.
2. Calculer $\mathrm{H}_a(0)$.
3. Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Calculer, pour $x > 0$, $\mathrm{H}'_a(x)$ en fonction de $\mathrm{H}_a(x)$.
   On pourra utiliser le changement de variables $t = \frac{\alpha}{s}$, pour α convenablement choisi.
5. En déduire que, pour $\mathrm{A} > 0$ et $\geqslant 0$,

$$\mathrm{H}_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ax}}.$$

Partie 2

Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\mathrm{J}(\alpha) := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \mathrm{e}^{-(xy^2+\frac{x}{y^2})} x^{\alpha-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1. En utilisant la partie 1, montrer que

$$\mathrm{J}(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha).$$

2. En effectuant le changement de variables $\begin{cases} u = xy^2 \\ v = \dfrac{x}{y^2}, \end{cases}$ montrer que l'on a

$$\mathrm{J}(\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

3. En déduire la formule de duplication de Legendre, pour tout $\alpha > 0$.

Soluce

Partie 1

1. Il s'agit ici d'utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale. Tout d'abord, pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-(at^2+\frac{x}{t^2})}$ est continue sur $[0, +\infty[$; de même pour la fonction $t \mapsto -(at^2 + \frac{x}{t^2})$ sur $]0, +\infty[$, pour tout $x \geqslant 0$. De plus, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\mathrm{e}^{-(at^2+\frac{x}{t^2})} \leqslant \mathrm{e}^{-at^2},$$

qui est une fonction continue, indépendante de x, intégrable sur $[0, +\infty[$, puisque

$$\mathrm{e}^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ainsi, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction H_a est bien continue sur $[0, +\infty[$.

2. On a, par définition,

$$\mathrm{H}_a(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t.$$

En s'inspirant du résultat sur l'intégrale de Gauss rappelé dans l'énoncé, effectuons le changement de variable $u = \sqrt{a}t$ (on rappelle que $a > 0$), qui est bien un difféomorphisme de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. On obtient alors

$$\mathrm{H}_a(0) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

8. Il s'agit de l'intégrale de Gauss, qui peut se calculer de plusieurs façons : intégrale de Wallis, passage en coordonnées polaires... Voir les exercices 45 et 46.

3. On utilise ici le théorème de dérivation sous le signe intégral. Tout d'abord, pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-(at^2+\frac{x}{t^2})}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En effet, elle est continue, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$; en l'infini, f est équivalente à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at^2}$, qui est, comme on l'a vu précédemment, négligeable devant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, qui elle-même est intégrable en l'infini, par le critère de Riemann. En 0, de même, f est équivalente à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{t^2}} \underset{t\to 0}{=} o\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$, fonction intégrable en 0, par le même critère de Riemann. De plus, pour tout $t > 0$, la fonction f admet une dérivée partielle en x,
$$\forall t > 0,\ \forall x \geqslant 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-1}{t^2}\mathrm{e}^{-(at^2+\frac{x}{t^2})},$$
et cette dérivée partielle est continue en t et en x, respectivement sur $]0,+\infty[$ et sur $[0,+\infty[$, et, pour tout $t > 0, x \geqslant 0$, on a
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-at^2},$$
qui est une fonction continue, indépendante de x, et intégrable sur $]0,+\infty[$. Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction H_a est dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. Dans la question précédente, on vient de démontrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0,+\infty[$; la dérivée est également donnée par le théorème de dérivation sous le signe intégrale : pour tout $x > 0$,
$$\mathrm{H}_a'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-(at^2+\frac{x}{t^2})}\mathrm{d}t.$$
On effectue alors, comme indiqué dans l'énoncé, le changement de variable $t = \alpha/s$, avec $\alpha > 0$ que l'on déterminera plus tard ; c'est un difféomorphisme, de $]0,+\infty[$ dans lui-même ; on obtient alors, pour tout $x > 0$,
$$\mathrm{H}_a'(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{+\infty}^{0} \mathrm{e}^{-(a\frac{\alpha^2}{s^2}+x\frac{s^2}{\alpha^2})}\mathrm{d}s = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a\frac{\alpha^2}{s^2}+x\frac{s^2}{\alpha^2})}\mathrm{d}s.$$
Pour retomber sur l'intégrale $\mathrm{H}_a(x)$, on pose alors $\alpha = \sqrt{\frac{x}{a}}$, bien défini puisque x est strictement positif, et l'on obtient alors, pour tout $x > 0$, :
$$\mathrm{H}_a'(x) = -\sqrt{\frac{a}{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(as^2+\frac{x}{s^2})}\mathrm{d}s = -\sqrt{\frac{a}{x}}\mathrm{H}_a(x).$$
5. Une primitive de la fonction $x \mapsto -\sqrt{\frac{a}{x}}$ est $x \mapsto -2\sqrt{ax}$; l'équation différentielle précédente donne alors :
$$\mathrm{H}_a(x) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ax}},$$
où C est une constante réelle, et où $x > 0$. De plus, par continuité de la fonction H_a en 0 par la question 1, on a
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \mathrm{H}_a(0) = \mathrm{C}.$$
On en déduit que pour $a > 0$ et $x \geqslant 0$,
$$\mathrm{H}_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ax}}.$$

Partie 2

1. En utilisant le théorème de Fubini (la fonction intégrée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est positive), et en se servant du résultat de la partie 1, on écrit, pour $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(\alpha) &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(xy^2+\frac{x}{y^2})}\mathrm{d}y\right]x^{\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{H}_x(x)x^{\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-2x}x^{\alpha-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}x^{\alpha-1}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ne reste plus qu'à faire le changement de variables difféomorphe $u = 2x$, de $[0, +\infty[$ dans lui-même, et l'on tombe sur le résultat désiré :

$$\mathrm{J}(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha).$$

2. On effectue le changement de variables préconisé dans l'énoncé. On vérifie que c'est une bijection de $(\mathbb{R}^{+*})^2$ dans lui-même : la réciproque est donnée par $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{u/v}$. De plus, le jacobien est égal à

$$-2y^2\frac{x}{y^3} - \frac{2xy}{y^2} = -\frac{4x}{y},$$

non nul par hypothèse sur x et y. En l'exprimant en fonction de u et de v, cela donne

$$-4u^{\frac{1}{4}}v^{\frac{3}{4}}.$$

L'intégrale J devient alors, pour $\alpha > 0$,

$$\mathrm{J}(\alpha) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(u+v)}u^{\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2})}v^{\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{4}}v^{-\frac{3}{4}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

soit, en invoquant le théorème de Fubini,

$$\mathrm{J}(\alpha) = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}u^{\frac{\alpha-1}{2}}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v}v^{\frac{\alpha}{2}-1}\mathrm{d}v = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

ce qui est exactement le résultat désiré.

3. Il suffit maintenant de regrouper les deux questions précédentes :

$$\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha),$$

et par simplification, on obtient la *formule de duplication de Legendre*,

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}}\Gamma(\alpha).$$

Exercice 53 (méthode 2 : formule de Weierstrass)
La formule de duplication de Legendre peut être vue comme une conséquence de la *formule de Weierstrass* :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}},$$

où γ désigne la constante d'Euler.

On rappelle que la fonction bêta [9] est définie comme suit :

$$\forall x, y > 0, \quad \mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

1. Commençons par démontrer quelques résultats sur la fonction B.
   (a) Montrer que la fonction bêta satisfait aux équations fonctionnelles suivantes :
   $$\forall x > 0,\ \forall y > 0, \quad \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y).$$
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x > 0$, on pose
   $$\mathrm{I}_n(x) := \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t.$$
   Montrer que, pour tout $x > 0$,
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n(x) = \Gamma(x).$$
   (c) En exprimant la fonction I_n en fonction de bêta, en déduire que pour tout $x > 0$,
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$
2. En utilisant le développement limité du logarithme, démontrer la formule de Weierstrass.
3. En déduire la formule de duplication de Legendre.

Soluce

1. (a) La première égalité s'obtient en effectuant le changement de variables $u = 1-t$, qui est un difféomorphisme de $[0,1]$ dans lui-même ; on obtient bien, pour tout $x, y > 0$,
   $$\mathrm{B}(x,y) = \int_1^0 u^{y-1}(1-u)^{x-1}(-\mathrm{d}u) = \mathrm{B}(y,x).$$
   Quant à la seconde égalité, il suffit d'utiliser une intégration par parties, à condition de régler le problème d'existence en 1 : pour cela, on commence

9. Un bêta majuscule s'écrit B.

par étudier l'intégrale sur un intervalle de type $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$, où tout est défini, puis on fait tendre n vers l'infini ; le problème d'existence de l'intégration par parties en 1 est réglé. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(x,y) &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\right]_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} (1-t)^{x+y}\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y).
\end{aligned}$$

On obtient l'égalité désirée.

(b) Fixons $x > 0$. On définit la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]}(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$$

où $\mathbf{1}_{[0,n]}(t)$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle réel $[0,n]$. Utilisons le théorème de convergence dominée. D'abord, en écrivant pour tout $t > 0$,

$$g_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]}(t)\mathrm{e}^{n\log\left(1-\frac{t}{n}\right)}t^{x-1},$$

et en utilisant un développement limité du logarithme à l'ordre 1, on obtient

$$g_n(t) = \mathbf{1}_{[0,n]}(t)\mathrm{e}^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}t^{x-1} = \mathbf{1}_{[0,n]}(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{o(1)}t^{x-1},$$

ce qui montre que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction

$$t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathbf{1}_{[0,+\infty]}(t).$$

De plus, de l'inégalité

$$\log(1-u) \leqslant -u,$$

valable pour $u \in]0,1[$ et qui s'obtient par l'inégalité des accroissements finis, on tire en posant $u = t/n$,

$$\forall t \in [0,n], \quad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on obtient la majoration

$$|g_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1},$$

qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$, puisque, en l'infini, elle est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$, fonction intégrable, par le critère de Riemann ; et qu'en 0, elle est équivalente à la fonction $t \mapsto t^{x-1}$, qui est intégrable, toujours par le critère de Riemann (on rappelle que x est supposé strictement positif).

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on obtient, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$

(c) Effectuons le changement de variables $u = t/n$, qui est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. On obtient alors, pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{I}_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n\mathrm{d}u = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u = n^x \mathrm{B}(x, n+1).$$

À présent, en utilisant les résultats de la question 1 (a), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{B}(x, n+1) = \mathrm{B}(n+1, x) = \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\mathrm{B}(1,x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

puisque

$$\mathrm{B}(1,x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Finalement, en regroupant les résultats obtenus, on a, pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{I}_n(x) = n^x \mathrm{B}(x, n+1) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

et donc, toujours par la question 1 (c), pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

comme voulu.

2. On rappelle tout d'abord la série harmonique, qui donne un développement limité du logarithme :

$$\log n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + o(1).$$

On en déduit que

$$\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} = x\mathrm{e}^{-x\log n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = x\mathrm{e}^{\gamma x}\mathrm{e}^{xo(1)} \prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

Or, ceci converge vers $1/\Gamma(x)$, d'après la question 1 (c). On en déduit

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} = \lim_{n\to+\infty} x\mathrm{e}^{\gamma x}\mathrm{e}^{xo(1)} \prod_{k=1}^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{k}}\left(1 + \frac{x}{k}\right) = x\mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}},$$

et la formule de Weierstrass est démontrée.

3. Fixons $x > 0$. D'après la question 1 (c) (encore !), et en multipliant par 2^{2n+2} numérateur et dénominateur, on a, lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) &\sim \frac{n^{2x+\frac{1}{2}}(n!)^2}{x(x+\frac{1}{2})\cdots(x+n)(x+n+\frac{1}{2})} = \frac{2^{2n+2}n^{2x+\frac{1}{2}}(n!)^2}{2x(2x+1)\cdots(2x+2n)(2x+2n+1)} \\ &\sim \frac{\Gamma(2x)}{(2n+1)^{2x}(2n+1)!} 2^{2n+2} n^{2x+\frac{1}{2}}(n!)^2 \\ &\sim \frac{\Gamma(2x)2^{2n+2}n^{\frac{1}{2}}(n!)^2}{2^{2x}(2n)!(2n)} = \frac{\Gamma(2x)2^{2n+1-2x}}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Stirling, lorsque $n \to +\infty$,

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}(2\pi n)}{(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}(4\pi n)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\pi n)^{\frac{1}{2}}}{2^{2n}}.$$

Finalement, on en déduit la formule de duplication tant attendue [10]

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) \sim \frac{\Gamma(2x)2^{2n+1-2x}}{n^{\frac{1}{2}}}\frac{(\pi n)^{\frac{1}{2}}}{2^{2n}} = \Gamma(2x)2^{1-2x}\sqrt{\pi}.$$

Remarque. La seconde méthode a l'avantage de pouvoir être utilisée dans la preuve de la *formule des compléments*, voir pour cela l'exercice 50.

Exercice 54 (Propriétés élémentaires de la fonction gamma)
La fonction gamma est définie pour tout réel $x > 0$ par la relation :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. (a) Vérifier que la définition a un sens.
   (b) Vérifier, pour tout réel x strictement positif, la relation
   $$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$
   (c) En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ lorsque n est un entier naturel non nul.
   (d) En admettant provisoirement la continuité de Γ sur $\mathbb{R}^{+*}$, montrer au voisinage de 0^+ l'estimation $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$.
2. (a) Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que l'on a, pour tout entier k et tout réel x strictement positif,
   $$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$
   (b) Décrire les variations de Γ sur $]0,+\infty[$.
3. Soit x un réel strictement positif.
   (a) Montrer que
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$
   (b) Faire un changement de variable affine pour ramener la deuxième intégrale à une intégrale sur le segment $[0,1]$ et montrer la *formule de Gauss* :
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

10. La formule n'est pas exactement celle de l'énoncé de l'exercice ; pas de panique, x a juste été remplacé par $2x$...

Soluce

1. (a) Soit $x > 0$. La fonction $g_x :]0,+\infty[,\ t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue. Au voisinage de 0, on a : $g_x(t) \sim t^{x-1}$ et la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est positive et intégrable sur $]0,1]$. Au voisinage de $+\infty$, $g_x(t)$ est négligeable devant $\mathrm{e}^{-t/2}$, fonction intégrable sur $[1,+\infty[$. Ainsi, la fonction g_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   (b) Soit $x > 0$. Soient a et A deux réels tels que $0 < a < \mathrm{A}$.
   Pour calculer $\int_a^{\mathrm{A}} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$; on pose, pour $t \in [a,\mathrm{A}]$, $u(t) = t^x$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ – c'est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$; on intègre par parties (c'est légitime car les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$) :

   $$\int_a^{\mathrm{A}} t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_a^{\mathrm{A}} + x\int_a^{\mathrm{A}} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{A}^x\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} + a^x\mathrm{e}^{-a} + x\int_a^{\mathrm{A}} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   Puisque $x > 0$, on a aussi $x+1 > 0$ (donc $\Gamma(x+1)$ a un sens) ; quand a tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient : $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

   (c) On a pour initialiser une récurrence :

   $$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!.$$

   Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\Gamma(n) = (n-1)!$. La relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ est vraie en particulier pour tout naturel $n \geqslant 2$, d'où $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\cdot(n-1)! = n!$.

   (d) D'après l'équation fonctionnelle, pour $x > 0$, on a $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. Quand x tend vers 0, en utilisant la continuité en 1 de la fonction Γ et la valeur $\Gamma(1) = 1$, il vient :

   $$\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

2. (a) Prouvons par récurrence sur k que Γ est k fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

   $$\mathscr{P}(k) : \quad \forall x > 0,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   Pour $k = 0$, il n'y a rien à démontrer. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que Γ soit k fois dérivable et que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Considérons un intervalle $]a,b[$ où $0 < a < b$.
   Pour tout entier p, on note

   $$\psi_p :]a,b[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,t) \longmapsto (\ln t)^p t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$

   Remarquons que pour tout x de $]a,b[$, la fonction $t \mapsto \psi_p(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. (Au voisinage de 0, on peut prolonger par continuité si $x > 1$ et si $x \leqslant 1$, on a : $\psi_p(x,t) = o\left(t^{a/2-1}\right)$; au voisinage de $+\infty$, on a encore $\psi_p(t) = o(1/t^2)$).
   Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre :
   — pour tout $x \in]a,b[$, la fonction $t \mapsto \psi_k(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$;

— la fonction ψ_k admet une dérivée partielle continue par rapport à x sur $]a,b[\times]0,+\infty[$ qui est donnée pour $(x,t)\in]a,b[\times]0,+\infty[$ par

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial x}(x,t)=(\ln t)^{k+1}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t};$$

— pour $(x,t)\in]a,b[\times]0,+\infty[$, on a : $t^{x-1}\leqslant t^{a-1}$ si $t\leqslant 1$ et $t^{x-1}\leqslant t^{b-1}$ si $t\geqslant 1$ donc :

$$\left|\frac{\partial\psi_k}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant|\ln t|^{k+1}\left(t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}+t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}\right),$$

qui est une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$ et indépendante de x.

Par hypothèse de récurrence et par le théorème de dérivation sous une intégrale, $\Gamma^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$ et, pour tout $x\in]a,b[$,

$$\Gamma^{(k+1)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^{k+1}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme a et b sont arbitraires, on étend cette relation à $]0,+\infty[$ et on conclut par récurrence.

(b) De l'expression de Γ'' comme l'intégrale d'une fonction positive, il résulte que Γ est convexe (on verra mieux plus bas) et donc que Γ' est strictement monotone sur $]0,+\infty[$. Comme $\Gamma(1)=0!=1!=\Gamma(2)$, la dérivée Γ' s'annule en un point c compris entre 1 et 2 – on trouve numériquement $c\simeq 1{,}46\cdots$. Ainsi, Γ est strictement décroissante sur $]0,c]$ et strictement croissante sur $[c,+\infty[$. Voir la figure 8.3.

3. Soit x un réel strictement positif.

(a) On pose, pour tout n naturel non nul et $t\in]0,+\infty[$:

$$f_n(t)=\begin{cases}t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t\in]0,n[,\\ 0 & \text{si } t\geqslant n.\end{cases}$$

Alors :

— pour tout n, la fonction f_n est continue (et intégrable) sur $]0,+\infty[$;

— pour t fixé, on a : $t<n$ à partir d'un certain rang et, lorsque n tend vers l'infini, $\ln(1-\frac{t}{n})=-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$; par conséquent, $n\ln(1-\frac{t}{n})=-t+o(1)$, donc $\mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{t}{n})}=\mathrm{e}^{-t+o(1)}$ qui tend bien vers e^{-t} car l'exponentielle est continue ; ainsi $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$;

— on va dominer $|f_n|$ par une fonction f indépendante de n et intégrable sur $]0,+\infty[$;
en effet, $\ln(1-u)\leqslant -u$ pour tout $u<1$ (par concavité du logarithme, la courbe de $u\mapsto\ln(1-u)$ est toujours en dessous de sa tangente en zéro) ; d'où, si $0<t<n$, donc $\ln(1-\frac{t}{n})\leqslant-\frac{t}{n}$; en multipliant par $n>0$ et par croissance de la fonction exponentielle, on obtient : $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant\mathrm{e}^{-t}$; finalement, que l'on ait $t<n$ ou $t\geqslant n$, il vient : $|f_n(t)|\leqslant\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$, qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ (condition de domination).

D'après le théorème de convergence dominée, on peut donc intervertir la limite et l'intégrale ; d'où le résultat.

(b) Soit $\mathrm{I}_n(x)$ l'intégrale de f_n. Le changement de variable $u = t/n$ donne :

$$\mathrm{I}_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 u^{x-1} n^{x-1}(1-u)^n\, n\mathrm{d}u = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\,\mathrm{d}u.$$

En posant $v(t) = (1-t)^n$ et $w(t) = \frac{1}{x}t^x$, on peut intégrer par parties (v et w sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$, $v'w$ est intégrable et vw se prolonge par continuité en 0) :

$$\mathrm{J}_n(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(1-t)^n t^x}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 -n(1-t)^{n-1}\frac{t^x}{x}\mathrm{d}t = \frac{n}{x}\,\mathrm{J}_{n-1}(x+1).$$

En utilisant itérativement cette relation, il vient :

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{n(n-1)\cdots\big(n-(n-1)\big)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\,\mathrm{J}_{n-n}(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)\times(x+n)}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{I}_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$$

et donc :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 55 (Fonction gamma dans le plan complexe)
Considérons le demi-plan $\Pi = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Pour $z \in \Pi$, on pose :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier la convergence de l'intégrale ci-dessus et l'équation fonctionnelle :

$$\forall z \in \Pi, \quad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

2. (a) Montrer que la fonction Γ est continue sur Π.
   (b) On définit deux fonctions $\mathrm{P}, \mathrm{Q} : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(x,y) + i\mathrm{Q}(x,y) = \Gamma(x+iy).$$

   Montrer que P et Q admettent des dérivées partielles et que l'on a :

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}.$$

3. (a) Définir un prolongement de Γ à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ à l'aide de l'équation fonctionnelle.
   (b) Déterminer le signe du prolongement ainsi construit sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ et donner un équivalent au voisinage des entiers négatifs ou nuls.

Remarque. La version complexe de Γ n'est pas obligatoire mais le jury pose la question, de même que le prolongement par l'équation fonctionnelle.

Soluce

1. Fixons z dans Π et notons x sa partie réelle. La fonction $t \mapsto t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue. Elle est même intégrable car $\left|t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\right| = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ pour tout t. On en déduit en particulier : $\left|\Gamma(z)\right| \leqslant \Gamma(\operatorname{Re} z)$ pour tout z de Π.
2. (a) Soit $z \in \Pi$. Pour montrer la continuité de Γ en z, il suffit de montrer que pour toute suite (z_n) d'éléments de Π qui converge vers z, la suite $\big(\Gamma(z_n)\big)$ converge vers $\Gamma(z)$. Fixons une telle suite et choisissons a et b réels tels que $0 < a < \operatorname{Re}(z) < b$. Quitte à supprimer les premiers termes, on peut supposer que $a < \operatorname{Re}(z_n) < b$ pour tout n.

   On note, pour t réel strictement positif,
$$g_n(t) = t^{z_n-1}\mathrm{e}^{-t}.$$
   La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers $t \mapsto t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}$.
   Si $0 < t \leqslant 1$, alors $|t^{z_n-1}| \leqslant t^{a-1}$ et si $t \geqslant 1$, alors $|t^{z_n-1}| \leqslant t^{b-1}$. On a donc :
$$\forall t > 0, \quad \left|t^{z_n-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant (t^{a-1} + t^{b-1})\mathrm{e}^{-t}.$$
   Comme $t \mapsto (t^{a-1} + t^{b-1})\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable, le théorème de convergence dominée entraîne que l'intégrale de g_n converge vers $\Gamma(z)$. La continuité de Γ en résulte.

   (b) Introduisons la fonction suivante de trois variables réelles :
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y, t) & \longmapsto & t^{x+iy-1}\mathrm{e}^{-t}. \end{array}$$
   Notons que $\left|h(x, y, t)\right| = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ pour tout (x, y, t) et, bien sûr, que pour tout (x, y),
$$\tilde{\Gamma}(x, y) = \Gamma(x + iy) = \int_0^{+\infty} h(x, y, t)\mathrm{d}t.$$
   Fixons y dans $\mathbb{R}$ et étudions la dérivée partielle par rapport à x. On a, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$:
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, t) = \ln(t)t^{x-1}t^{iy}\mathrm{e}^{-t}.$$
   Ayant fixé $0 < a < b$, on a une inégalité de domination sur la bande définie par $a < x < b$:
$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, t)\right| \leqslant |\ln t|\,(t^{a-1} + t^{b-1})\mathrm{e}^{-t}.$$
   Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, il vient, si $a < x < b$:
$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial x}(x, y) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x+iy-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$
   Comme a et b sont arbitraires, cette relation est vraie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

À présent, fixons x dans $\mathbb{R}^{+*}$ et étudions la dérivée partielle de $\tilde{\Gamma}$ par rapport à y. On trouve, pour tout $(y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,t) = i\ln(t)t^{x-1}t^{iy}\mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,t)\right| \leqslant |\ln t|\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

(rappel : x est fixé). Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres,

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial y}(x,y) = i\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x+iy-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = i\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial x}(x,y).$$

Il n'y a plus qu'à séparer partie réelle et partie imaginaire : avec $\tilde{\Gamma} = \mathrm{P}+i\mathrm{Q}$, l'égalité précédente s'écrit :

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = i\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right),$$

d'où les *relations de Cauchy-Riemann* :

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}.$$

Remarque. On dit que la fonction Γ est *holomorphe*. Cela traduit que la matrice de la différentielle de $\tilde{\Gamma}$ est celle de la multiplication par le nombre complexe $\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial x}(x,y)$ (vérifier ! c'est donc une similitude) et elle entraîne que l'on peut developper Γ en série entière au voisinage de tout point de Π (hors programme).

3. (a) Pour $p \in \mathbb{N}$, notons Π_p le demi-plan $\{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > -p\}$. Ainsi, $\Pi_0 = \Pi$. On note de plus $\dot{\Pi}_p = \Pi_p \smallsetminus \{0,\dots,-p+1\}$ (on enlève les entiers négatifs ou nuls de Π_p, voir la figure 8.2).

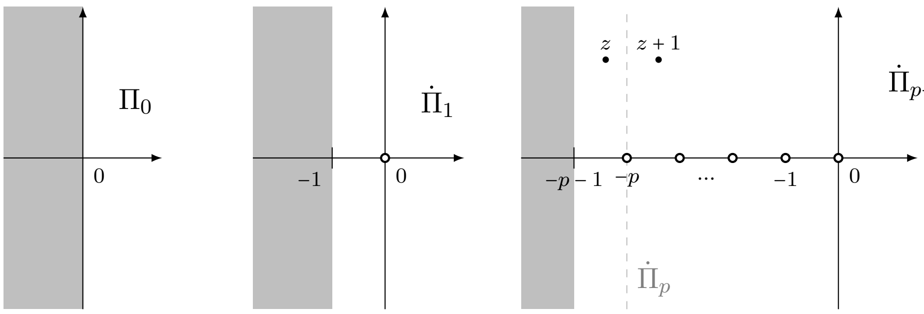


FIGURE 8.2 – Les demi-plans épointés Π_0, $\dot{\Pi}_1$ $\dot{\Pi}_{p+1}$

Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que Γ soit définie sur $\dot{\Pi}_p$ et que l'équation fonctionnelle soit vérifiée (c'est le cas pour $p = 0$). Pour z dans la bande $\dot{\Pi}_{p+1} \smallsetminus \dot{\Pi}_p$, on *définit* $\Gamma(z)$ par :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Cela a un sens pour tout $p \geqslant 1$. En effet, $z \in \dot{\Pi}_p$ si et seulement si $z+1 \in \dot{\Pi}_{p-1}$: par conséquent, $\Gamma(z+1)$ est bien défini et $z \neq 0$. De plus, l'équation fonctionnelle est satisfaite sur $\dot{\Pi}_{p+1}$ puisqu'elle l'est sur $\dot{\Pi}_p$ par hypothèse de récurrence et sur $\dot{\Pi}_{p+1} \smallsetminus \Pi_p$ par construction.

(b) On se restreint désormais à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Comme Γ est strictement positive sur $]0, +\infty[$, elle est strictement négative sur $]-1, 0[$. Lorsque x tend vers 0^-, $\Gamma(x) \sim 1/x$ (mêmes raisons qu'en 0^+) donc $\Gamma(x)$ tend vers $-\infty$. Lorsque x tend vers -1^+, $x+1$ tend vers 0^+ donc $\Gamma(x) \sim -1/(x+1)$, qui tend vers $-\infty$. Plus généralement, une récurrence immédiate fondée sur l'équation fonctionnelle montre que Γ est du même signe que $(-1)^{p-1}$ sur $]-p-1, -p[$ et tend vers l'infini aux bords de l'intervalle (figure 8.3).

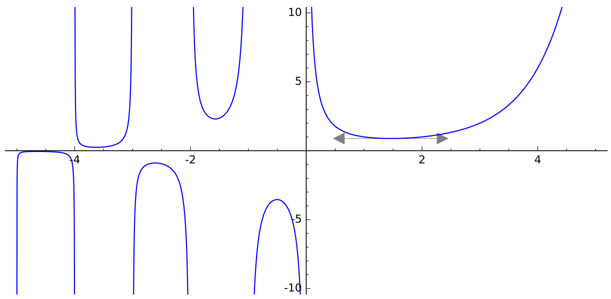


FIGURE 8.3 – Graphe de la fonction gamma (prolongée à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$)

Remarques. Ce prolongement est holomorphe et c'est le seul ! C'est pourquoi il est moins arbitraire qu'il ne pourrait paraître.

On peut, comme le fait parfois le jury, se contenter de prolonger Γ à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ grâce à l'équation fonctionnelle, en procédant sur chaque $]-p-1, -p[$ par récurrence sur p.

Exercice 56 (Log-convexité et théorème de Bohr-Mollerup)

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que Γ est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire que $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur cet intervalle.
2. Soit Φ une fonction définie sur $]0, +\infty[$, strictement positive, de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet intervalle, logarithmiquement convexe et telle que $\Phi(x+1) = x\,\Phi(x)$ pour tout x. On pose $\mathrm{H} = \Phi/\Gamma$.
   (a) Montrer que H est 1-périodique ; exprimer H'/H en fonction de Φ'/Φ et de Γ'/Γ.
   (b) Soit x un élément de $]0, 1]$. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,
   $$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leqslant \frac{\mathrm{H}'(x+n)}{\mathrm{H}(x+n)} \leqslant \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)},$$
   puis que
   $$\frac{\mathrm{H}'(n)}{\mathrm{H}(n)} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} \leqslant \frac{\mathrm{H}'(n+1)}{\mathrm{H}(n+1)} + \frac{1}{n}.$$
   (c) En déduire que, pour tout réel strictement positif x,
   $$\Phi(x) = \Phi(1) \cdot \Gamma(x).$$
   C'est le *théorème d'Artin ou de Bohr-Mollerup.*

3. Application et application de l'application.
   (a) Établir la *formule de duplication de Legendre* :

$$2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(x).$$

   On admet provisoirement que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ *(cf. l'exercice 61).*

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t = \ln\sqrt{2\pi}$.

Soluce

1. Tout d'abord, Γ est bien à valeurs strictement positives car la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$. Cela a un sens de calculer $\ln\circ\Gamma$.

   Montrons que $\ln\circ\Gamma$ est convexe grâce à sa dérivée seconde (puisque $\ln$ et Γ sont $\mathscr{C}^\infty$) :

$$(\ln\circ\Gamma)'' \geqslant 0 \iff \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geqslant 0 \iff \Gamma'^2 \leqslant \Gamma''\Gamma \quad (\text{car } \Gamma^2 > 0).$$

   Or, pour $x > 0$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\Gamma'^2(x) &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^2\\ &= \left(\int_0^{+\infty} \left(\ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)\left(t^{\frac{x-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t\right)^2\\ &\leqslant \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &\leqslant \Gamma''(x)\Gamma(x).\end{aligned}$$

2. (a) Soit $x > 0$, on a :

$$\mathrm{H}(x+1) = \frac{\Phi(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{x\Phi(x)}{x\Gamma(x)} = \mathrm{H}(x)$$

   donc H est périodique de période 1. Par ailleurs,

$$\mathrm{H}' = \frac{\Phi'\Gamma - \Phi\Gamma'}{\Gamma^2} \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \frac{\Phi'\Gamma - \Phi\Gamma'}{\Gamma^2} \times \frac{\Gamma}{\Phi} = \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}.$$

   (b) Soit x un élément de $]0,1]$, soit n un naturel non nul. Comme $\ln\circ\Gamma$ est convexe, $(\ln\circ\Gamma)'$ est croissante ; de même $(\ln\circ\Phi)'$ est croissante. Mais $(\ln\circ\Gamma)' = \Gamma'/\Gamma$ et $(\ln\circ\Phi)' = \Phi'/\Phi$.

   Comme $0 < x \leqslant 1$, on a $n < n + x \leqslant n+1$ et donc, par croissance :

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leqslant \frac{\mathrm{H}'(x+n)}{\mathrm{H}(x+n)} \leqslant \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$

De plus : $\dfrac{\Phi'}{\Phi} = \dfrac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} + \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$,donc :

$$\frac{\mathrm{H}'(n)}{\mathrm{H}(n)} + \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leqslant \frac{\mathrm{H}'(x+n)}{\mathrm{H}(x+n)} \leqslant \frac{\mathrm{H}'(n+1)}{\mathrm{H}(n+1)} + \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}.$$

En dérivant l'équation fonctionnelle $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$ et en divisant par $\Gamma(u+1)$, on obtient :

$$\frac{\Gamma'(u+1)}{\Gamma(u+1)} = \frac{\Gamma(u) - u\Gamma'(u)}{u\Gamma(u)} = \frac{1}{u} + \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}.$$

Cela donne, en remplaçant dans les inégalités précédentes :

$$\frac{\mathrm{H}'(n)}{\mathrm{H}(n)} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\mathrm{H}'(x+n)}{\mathrm{H}(x+n)} \leqslant \frac{\mathrm{H}'(n+1)}{\mathrm{H}(n+1)} + \frac{1}{n}.$$

Comme H est 1-périodique, H' l'est aussi, de même que H'/H, ce qui permet de conclure.

(c) Par périodicité, la fonction H'/H prend en particulier la même valeur K en tous les entiers. Finalement, pour tout n,

$$\mathrm{K} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} \leqslant \mathrm{K} + \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} = \mathrm{K}.$$

Du fait que $(\mathrm{H}'/\mathrm{H})(x+1) = (\mathrm{H}'/\mathrm{H})(x)$ pour tout $x > 0$, l'égalité précédente est vraie sur $]0, +\infty[$. Elle équivaut à dire que la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{K}x}\mathrm{H}(x)$ est nulle sur $]0, +\infty[$. Il existe donc une constante λ telle que $\mathrm{H}(x) = \lambda\mathrm{e}^{\mathrm{K}x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. L'égalité $\mathrm{H}(1) = \mathrm{H}(2)$ donne alors $\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{K}} = \lambda\mathrm{e}^{2\mathrm{K}}$. Comme H est le quotient de deux fonctions strictement positives, on a $\lambda > 0$, d'où $\mathrm{K} = 0$. Ainsi, pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$\Phi(x) = \Phi(1)\,\Gamma(x).$$

3. (a) On pose, pour $x > 0$:

$$\phi(x) = 2^{x-1}\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big).$$

On va montrer que ϕ satisfait aux hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup et donc ϕ est proportionnelle à Γ avec comme coefficient de proportionnalité :

$$\phi(1) = 2^0\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\,\Gamma(1) = \sqrt{\pi}.$$

En effet :

— la fonction ϕ est définie sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$;

— pour $x > 0$,

$$\phi(x+1) = 2^x \Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x+2}{2}\Big) = 2^x \Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x}{2}+1\Big)$$
$$= 2^x \Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\frac{x}{2}\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big) = x2^{x-1}\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = x\phi(x)\ ;$$

ainsi, ϕ est solution de l'équation fonctionnelle.

— enfin, $\ln\circ\phi$ est convexe : pour $x > 0$,

$$\ln\phi(x) = (x-1)\ln 2 + \ln\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big) + \ln\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big),$$

ce qui exprime $\ln\circ\phi$ comme la somme de trois fonctions convexes (si f est convexe et $\mathscr{C}^2$ et si a est affine ($a'' = 0$), alors $f\circ a$ est convexe car $(f\circ a)' = a'\cdot(f'\circ a)$ et $(f\circ a)'' = a'^2(f''\circ a)$).

On peut appliquer le théorème de Bohr-Mollerup, d'où la formule de duplication de Legendre.

(b) Soit $x > 0$. On part de la formule de duplication : $2^{x-1}\Gamma\big(\frac{x}{2}\big)\Gamma\big(\frac{x+1}{2}\big) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(x)$. Comme tout est strictement positif, on prend le logarithme de chaque membre :

$$(x-1)\ln 2 + \ln\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big) + \ln\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = \ln\sqrt{\pi} + \ln\Gamma(x),$$

puis on intègre entre 0 et 1 :

$$-\frac{1}{2}\ln 2 + \int_0^1 \ln\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{\pi} + \int_0^1 \ln\Gamma(s)\,.$$

Dans la première intégrale, on effectue le changement de variable $u = \frac{x}{2}$ et dans la deuxième $s = \frac{x+1}{2}$:

$$-\frac{1}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\Gamma(u)\,\mathrm{d}u + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln\Gamma(s) = \ln\sqrt{\pi} + \int_0^1 \ln\Gamma(s)\,,$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 \ln\Gamma(s)\,\mathrm{d}s = \ln(2^{\frac{1}{2}}) + \ln\sqrt{\pi} = \ln(\sqrt{2\pi}).$$

Remarque. On a passé sous silence l'intégrabilité de $\ln\circ\Gamma$ au voisinage de 0 ! (Ce n'est pas parce que l'on vient de trouver un réel que pour autant cette intégrale existe.)

Au voisinage de 0, on a : $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, avec $\lim_{0^+}\Gamma(x+1) = 1$. Il en résulte que $\ln\Gamma(x) = -\ln x + \ln\Gamma(x+1)$, d'où $\ln\Gamma(x) \sim -\ln x$. Comme $x\mapsto -\ln x$ est intégrable sur $]0,1]$ (sa primitive $x\ln x - x$ admet une limite en 0) et positive, $\ln\circ\Gamma$ l'est aussi.

Exercice 57 (Variante de Bohr-Mollerup)

Soit $f : \mathbb{R}_+^\star \mapsto \mathbb{R}_+^\star$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, log-convexe, telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x+1) = xf(x).$$

On veut prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $f = \lambda\Gamma$ où Γ est la fonction d'Euler.

1. Préliminaire : le théorème des trois pentes. Soit g une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x < y < z$ dans I. Montrer que, pour tout a de I, la fonction $g_a(t) := \frac{g(t)-g(a)}{t-a}$ est croissante sur $\mathrm{I}\cap]a,+\infty[$ et sur $\mathrm{I}\cap]-\infty,a[$. En déduire l'inégalité
$$\frac{g(y)-g(x)}{y-x} \leqslant \frac{g(z)-g(x)}{z-x} \leqslant \frac{g(z)-g(y)}{z-y}.$$
2. En appliquant le théorème des trois pentes à la fonction $\ln f$ pour n, $n+1$, $n+1+x$, puis, pour $n+1$, $n+1+x$, $n+2$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in\,]0,1]$, montrer l'inégalité
$$n^x \leqslant \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \leqslant (n+1)^x\,.$$
3. En déduire l'inégalité
$$1 \leqslant \frac{f(x)}{f(1)\Gamma_n(x)} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^x,$$
où
$$\Gamma_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$
4. En utilisant l'exercice 54, prouver l'assertion annoncée.

Soluce

1. Soit $a < t_1 < t_2$ dans I. On applique l'inégalité de convexité à g avec $\lambda := \frac{t_1-a}{t_2-a} \in\,]0,1[$. On obtient avec élégance
$$\lambda t_2 + (1-\lambda)a = a + \lambda(t_2-a) = t_1$$
et donc,
$$g(t_1) \leqslant \lambda g(t_2) + (1-\lambda)g(a).$$
En divisant des deux côtés par $(t_1-a) > 0$, il vient
$$\frac{g(t_1)}{t_1-a} \leqslant \frac{g(t_2)}{t_2-a} + \frac{g(a)}{t_1-a} - \frac{g(a)}{t_2-a},$$
et ainsi
$$\frac{g(t_1)-g(a)}{t_1-a} \leqslant \frac{g(t_2)-g(a)}{t_2-a}.$$

Si maintenant $t_1 < t_2 < a$, on obtient également la croissance. En effet, $h : t \mapsto g(-t)$ est convexe sur $-\mathrm{I}$ et $-a < -t_2 < -t_1$ implique (avec les notations évidentes)

$$g_a(t_1) = -h_{-a}(-t_1) \leqslant -h_{-a}(-t_2) = g_a(t_2).$$

Cette croissance sur les deux intervalles implique immédiatement le théorème des trois pentes, puisque $x < y < z$ implique

$$g_x(y) \leqslant g_x(z) = g_z(x) \leqslant g_z(y).$$

2. Soit donc $g = \ln f$. Cette fonction est convexe sur $\mathbb{R}_+^\star$, par hypothèse sur f. On applique le théorème des trois pentes à n, $n+1$, $n+1+x$, puis, à $n+1$, $n+1+x$, $n+2$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in]0,1]$. Ceci donne

$$g(n+1) - g(n) \leqslant \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leqslant g(n+2) - g(n+1),$$

ou encore

$$\ln\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right) \leqslant \frac{1}{x}\ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) \leqslant \ln\left(\frac{f(n+2)}{f(n+1)}\right).$$

En utilisant l'égalité satisfaite par f, ceci donne

$$\ln n \leqslant \frac{1}{x}\ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) \leqslant \ln(n+1)$$

En multipliant par x et en passant à l'exponentielle, qui est croissante, on obtient

$$n^x \leqslant \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \leqslant (n+1)^x.$$

3. Par récurrence, on écrit que

$$f(n+1+x) = x(x+1)\cdots(x+n)f(x)$$

et que

$$f(n+1) = n!f(1).$$

L'inégalité ci-dessus devient alors

$$n^x \leqslant \frac{x(x+1)\cdots(x+n)f(x)}{n!f(1)} \leqslant (n+1)^x.$$

En divisant par n^x, ceci donne bien

$$1 \leqslant \frac{f(x)}{f(1)\Gamma_n(x)} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^x.$$

4. Par l'exercice 54, on sait que $\Gamma_n(x) \to \Gamma(x)$ quand $n \to +\infty$. On sait aussi que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \to 1 \,\text{quand}\, n \to +\infty.$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes, on obtient

$$f(x) = f(1)\Gamma(x).$$

Attention, ceci n'est pour l'instant valable que pour $x \in]0,1]$. Le cas général se fait facilement avec l'égalité

$$f(y) = (x+n-1)\cdots x f(x).$$

En effet, soit $y > 1$, on écrit $y = n + x$ avec $0 < x \leqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Par propriété de Γ, on obtient finalement

$$f(y) = (x+n-1)\cdots x f(x) = f(1)\,(x+n-1)\cdots x\Gamma(x) = f(1)\Gamma\,(n+x) = f(1)\Gamma(y).$$

Ceci achève la preuve du théorème.

8.2.2 Autres fonctions

Exercice 58 (Injectivité de la transformation de Laplace)
Le but de cet exercice est de montrer l'injectivité de la transformation de Laplace, $\mathscr{L}$, définie sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles ou complexes, et donnée par la formule :

$$\mathscr{L}(f) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C},\ s \longmapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

1. (a) Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers g. Montrer la convergence suivante :
$$\int_a^b \mathrm{P}_n(t)g(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t.$$
   (b) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_a^b t^n f(t)\mathrm{d}t = 0.$$
   Montrer, à l'aide du théorème de Weierstrass, que f est nulle.
2. Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe un réel strictement positif s_0 telle que :
$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-s_0 t} f(t) = 0.$$
   (a) Montrer que, pour tout $s > s_0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-st}f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   On définit alors la fonction $\mathscr{L}(f)$ sur $]s_0,+\infty[$ par :
$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$
   (b) Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]s_0,+\infty[$.
   (c) Lançons-nous au coeur de la preuve de l'injectivité de $\mathscr{L}$. Supposons que $\mathscr{L}(f)$ est la fonction nulle.

i. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt-(s_0+1)t} f(t)\mathrm{d}t = 0 \ .$$

ii. Soit alors g la fonction définie sur $]0,1]$ par

$$g(u) = u^{s_0} f(-\ln u) \ .$$

Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, et que pour tout entier naturel n :

$$\int_0^1 u^n g(u)\mathrm{d}u = 0.$$

En déduire que g, et donc que f, est la fonction nulle, montrant ainsi que la transformation de Laplace $\mathscr{L}$ est injective.

Soluce

1. (a) Notons que, par hypothèse sur la suite (P_n) :

$$\sup_{t\in[a,b]} |\mathrm{P}_n(t) - g(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \mathrm{P}_n(t)g(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b g(t)\left(\mathrm{P}_n(t) - g(t)\right)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |g(t)\left(\mathrm{P}_n(t) - g(t)\right)| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\mathrm{P}_n(t) - g(t)| \cdot \int_a^b |g(t)| \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient le résultat demandé.

(b) Quitte à écrire $f = h+ig$, avec $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, on peut supposer que f est à valeurs réelles.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_a^b t^n f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

donc, par linéarité de l'intégrale, en effectuant une combinaison linéaire, on en déduit que, pour tout polynôme P,

$$\int_a^b \mathrm{P}(t)f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

De plus, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.
En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit :

$$\int_a^b \mathrm{Q}_n(t)f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède, on a

$$\int_a^b \mathrm{Q}_n(t) f(t) \mathrm{d}t = 0,$$

on en déduit que

$$\int_a^b f^2(t) \mathrm{d}t = 0.$$

Enfin, comme la fonction f^2 est positive, et continue, sur le segment $[a, b]$, on en déduit que f^2, donc f, est la fonction nulle[11].

2. (a) Fixons $s > s_0$. Commençons par noter que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-st} f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

   De plus, on a
   $$|\mathrm{e}^{-st} f(t)| = \mathrm{e}^{-(s-s_0)t} . \mathrm{e}^{-s_0 t} |f(t)|.$$
   Or, par hypothèse,
   $$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-s_0 t} f(t) = 0,$$
   donc il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que, pour t assez grand,
   $$\mathrm{e}^{-s_0 t} |f(t)| \leqslant \mathrm{M}.$$
   Ainsi, on obtient
   $$|\mathrm{e}^{-st} f(t)| = \leqslant \mathrm{e}^{-(s-s_0)t} \mathrm{M}.$$
   Or, pour $s > s_0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-(s-s_0)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, puisque $s - s_0 > 0$. Par comparaison, cela implique que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-st} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Montrons que $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]s_0, +\infty[$ à l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégral. Pour cela, on considère a et b tels que $[a, b] \subset]s_0, +\infty[$. Notons φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times [a, b]$ par
   $$\varphi(t, s) = \mathrm{e}^{-st} f(t).$$
   Tout d'abord, pour tout $s > s_0$, la fonction $\varphi(t, \cdot)$ est continue (donc, par morceaux), et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   De plus, φ admet une dérivée partielle par rapport à s qui est continue en les deux variables sur $\mathbb{R}^+ \times [a, b]$:
   $$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) = -t \mathrm{e}^{-st} f(t).$$
   Enfin, pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^+ \times [a, b]$,
   $$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, s) \right| \leqslant t \mathrm{e}^{-at} |f(t)| = t \mathrm{e}^{-(a-s_0)t} \mathrm{e}^{-s_0 t} |f(t)|.$$
   Or,
   $$\mathrm{e}^{-(a-s_0)t} t \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-s_0 t} |f(t)| \underset{t \to +\infty}{=} o(1),$$

11. Élégant, n'est-il pas ?

d'après l'hypothèse de l'énoncé. Cela montre que la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(t,s)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Cela étant vrai pour tout a et b tels que $s_0 < a < b < +\infty$, $\mathscr{L}(f)$ est donc $\mathscr{C}^1$ sur $]s_0,+\infty[$.

En appliquant ce théorème à toutes les dérivées, on montre que $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]s_0,+\infty[$.

(c) i. Comme, par hypothèse, $\mathscr{L}(f)$ est la fonction nulle, on en déduit le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{L}(f)(n+1+s_0) = 0,$$

ce qui se traduit, par définition, par le résultat souhaité :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt-(s_0+1)t} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

ii. Effectuons le changement de variables $t = -\ln(u)$, qui est un difféomorphisme de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$.

On a alors :

$$g(u) = \mathrm{e}^{-s_0 t} f(t).$$

Comme, par hypothèse, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-s_0 t} f(t) = 0,$$

on en déduit

$$\lim_{u\to 0} g(u) = 0.$$

Le prolongement par continuité sur $[0,1]$ s'obtient alors en posant $g(0) = 0$.

Pour la suite, en effectuant le même changement de variables que précédemment, et en se rappelant que $\mathscr{L}(f)$ est la fonction nulle, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u^n g(u)\mathrm{d}u &= \int_0^1 u^{n+s_0} f(-\ln u)\mathrm{d}u \\
&= -\int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-tn}\mathrm{e}^{-s_0 t} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1+s_0)t} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \mathscr{L}(f)(n+1+s_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Grâce à la question 1 (b), on en déduit que g est nulle sur $]0,1]$. Cela implique alors que la fonction f est nulle sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, la transformation de Laplace est injective.

Exercice 59 (Formule de Stirling)

1. Soit $x > 0$. À l'aide du changement de variable $s = (t - x)/\sqrt{x}$, montrer que

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \mathrm{e}^{\varphi(x,s)} \mathrm{d}s$$

   où, pour $x > 0$ et $s > -\sqrt{x}$,

$$\varphi(x,s) = x \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}.$$

2. Montrer que pour $x > 0$ et $s \in \left]-\sqrt{x}, 0\right]$, $\varphi(x,s) \leqslant -s^2/2$.
3. Montrer que pour $s \geqslant 0$ et $x \geqslant 1$, $\varphi(x,s) \leqslant \varphi(1,s)$.
4. En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \mathrm{e}^{\varphi(x,s)} \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-s^2/2} \mathrm{d}s.$$

5. Conclure : $\Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{2\pi x}$.

Remarque. Cet exercice est tiré d'un document de Patrice Lassère.

Idée-clé. *C'est la méthode de Laplace efficacement présentée. On cherche, à x fixé, pour quelle valeur de t l'argument de l'exponentielle $t^x \mathrm{e}^{-t} = \exp(x \ln t - t)$ est maximal : c'est pour $t = x$. En principe, l'exponentielle rend négligeable les parties de l'intégrale où l'argument est plus petit que le maximum. On ramène ce maximum en 0 par une translation $u = t - x$. On doit calculer l'intégrale de*

$$\exp\big(x\ln(x+u) - x - u\big) = \exp\left(x \ln x - x + x \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - u\right).$$

On factorise $\exp(x \ln x - x) = (x/\mathrm{e})^x$. *Un développement limité autour du maximum $u = 0$ donne :*

$$x \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - u = x\left(\frac{u}{x} - \frac{u^2}{2x^2} + o\left(\frac{u^2}{x^2}\right)\right) - x = -\frac{u^2}{2x} + o\left(\frac{u^2}{x}\right).$$

On fait alors un « changement d'échelle » $s = u/\sqrt{x}$: au voisinage de 0, on est donc à peu près ramené à l'intégrale de $\mathrm{e}^{-s^2/2}$; ce qui est ailleurs (lorsque u n'est plus « très petit ») ne compte pas car c'est « écrasé » par l'exponentielle de quelque chose qui tend vers $-\infty$. Le changement de variable composé est bien celui qui est proposé dans la question 1.

Soluce

1. Ce changement de variable affine est astucieux mais ne pose pas de problème. D'une part, $s = (t - x)/\sqrt{x}$ équivaut à $t = x + s\sqrt{x}$, ce qui donne $\mathrm{d}t = \sqrt{x}\,\mathrm{d}s$. D'autre part, on a :

$$t^x \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{x \ln t - t} = \exp\left(x \ln(x + s\sqrt{x}) - s\sqrt{x} - x\right) = \exp\left(x \ln x - x + \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}\right),$$

d'où

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{x\ln x - x} e^{\varphi(x,s)} \sqrt{x}\, ds = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)} ds.$$

2. Ça fleure bon la formule de Taylor ! Pour $x > 0$ fixé, on a pour tout $s \in \left]-\sqrt{x}, +\infty\right[$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(x,s) = \frac{\sqrt{x}}{1+\frac{s}{\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(x,s) = -\frac{1}{\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)^2}.$$

Fixons également $s \in \left]-\sqrt{x}, 0\right]$ et écrivons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour $u \mapsto \varphi(x,u)$ sur $[0,s]$: il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\varphi(x,s) = \varphi(x,0) + s\frac{\partial\varphi}{\partial s}(x,0) + \frac{s^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(x,\theta s).$$

Comme $\varphi(x,0) = 0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(x,0) = 0$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(x,\theta s) \leqslant -1$ (car $\theta s < 0$), on obtient la majoration voulue.

3. Pour $s \geqslant 0$ et $x \geqslant 1$, on a :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,s) = \ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) + x\,\frac{-\frac{s}{2}}{x\sqrt{x}}\,\frac{1}{1+\frac{s}{\sqrt{x}}} - \frac{s}{2\sqrt{x}}.$$

On s'intéresse, avec $u = s/\sqrt{x}$, à :

$$\Delta(u) = \ln(1+u) - \frac{u+1-1}{2(1+u)} - \frac{u}{2} = \ln(1+u) - \frac{u+1}{2} + \frac{1}{2(u+1)}.$$

On peut dériver cette fonction de u, provisoirement libéré :

$$\Delta'(u) = \frac{1}{u+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(u+1)^2} = \frac{2(u+1)-(u+1)^2-1}{2(u+1)^2} = -\frac{u^2}{2(u+1)^2}.$$

On en déduit que Δ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, d'où $\Delta(u) \leqslant \Delta(0) = 0$, d'où $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \leqslant 0$ tout $s \geqslant 0$ et pour tout x, d'où enfin $\varphi(x,s) \leqslant \varphi(1,s)$ si $x \geqslant 1$.

4. Posons, pour $x > 0$ et s réel quelconque :

$$\psi(x,s) = \begin{cases} e^{\varphi(x,s)} & \text{si } s > -\sqrt{x}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x > 1$ fixé, la fonction $s \mapsto \psi(x,s)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour s réel fixé et x supérieur à s^2, on a : $s > -\sqrt{x}$, et alors un développement limité lorsque x tend vers l'infini donne :

$$\varphi(x,s) = x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x} = s\sqrt{x} - \frac{s^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}, \quad \text{d'où } \lim_{x\to+\infty} \psi(x,s) = e^{-s^2/2}.$$

Enfin, on peut dominer : si $s \leqslant 0$, on a : $\psi(x,s) \leqslant e^{-s^2/2}$ (vu à la question 2 si $s > -\sqrt{x}$, évident sinon) ; si $s \geqslant 0$, $e^{\varphi(x,s)} \leqslant e^{\varphi(1,s)} = (1+s)e^{-s}$, qui est une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et indépendante de x. Par le théorème de convergence dominée, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\psi(x,s)\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}}\lim_{x\to+\infty}\psi(x,s)\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-s^2/2}\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-t^2}\sqrt{2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{2\pi}$$

(on fait un anodin changement de variable $t = \sqrt{2}\,s$ et on utilise la valeur de l'intégrale de Gauss de l'exercice 61).

5. La conclusion saute aux yeux : l'intégrale dans l'expression de la première question a une limite non nulle, ce qui donne l'équivalent souhaité.

Exercice 60 (Convolution et transformée de Laplace)
Soient f et g deux fonctions continues, intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles. Le produit de convolution de f par g est la fonction

$$f\star g\ :\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\int_0^x f(u)g(x-u)\mathrm{d}u.$$

1. Montrer que $f\star g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. En utilisant une intégrale double, montrer que, pour tout réel A positif,

$$\int_0^{\mathrm{A}}\big|f\star g(x)\big|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty}|f|\times\int_0^{+\infty}|g|.$$

   En déduire que $f\star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. En appliquant le théorème de Fubini, montrer que l'intégrale de $f\star g$ est le produit des intégrales de f et g.
4. La transformée de Laplace d'une fonction h continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$, est la fonction définie pour tout x réel positif par :

$$\mathscr{L}(h)(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}h(t)\mathrm{d}t.$$

   Montrer que la transformée de Laplace de la convolée est le produit des transformées :

$$\mathscr{L}(f\star g) = \mathscr{L}(f)\times\mathscr{L}(g).$$

Soluce

1. La variable x se trouve à la fois dans une borne de l'intégrale et dans la fonction intégrée. On fait donc le changement de variables $u = xv$ qui donne :

$$(f\star g)(x) = x\int_0^1 f(xv)g\big(x(1-v)\big)\mathrm{d}v.$$

   Définissons alors

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_+\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (x,v) & \longmapsto & f(xv)g\big(x(1-v)\big).\end{array}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ (« continue par morceaux » suffirait). Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soit A un réel positif. Si $(x,v) \in [0,\mathrm{A}] \times |0,1]$, alors xv et $x(1-v)$ sont dans $[0,\mathrm{A}]$. Mais f et g, continues donc bornées sur tout compact ; on a donc

$$\forall (x,v) \in [0,\mathrm{A}] \times [0,1], \quad \big|h(x,v)\big| \leqslant \mathrm{C}, \quad \text{où } \mathrm{C} = \mathrm{N}_\infty(f|_{[0,\mathrm{A}]})\mathrm{N}_\infty(g|_{[0,\mathrm{A}]}),$$

et la fonction $\phi : v \mapsto \mathrm{C}$ est indépendante de x et intégrable sur $[0,1]$.

Par le théorème de continuité des intégrales à paramètre , $f \star g$ est continue $[0,\mathrm{A}]$; comme A est arbitraire, elle l'est sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour tout $\mathrm{A} \geqslant 0$, la fonction $f \star g$ est intégrable sur $[0,\mathrm{A}]$ car elle est continue sur ce segment et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}} |f \star g(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^{\mathrm{A}} \left(\int_0^x \big|f(u)\big|\,\big|g(x-u)\big|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \iint_{\mathrm{K}} |f(u)|\,|g(x-u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}x\end{aligned}$$

où K est le triangle défini par

$$(u,x) \in \mathrm{K} \iff 0 \leqslant u \leqslant x \leqslant \mathrm{A}.$$

On a appliqué le théorème de Fubini. En l'appliquant de nouveau, on trouve :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{K}} \big|f(u)\big|\,\big|g(x-u)\big|\mathrm{d}u\mathrm{d}x &= \int_0^{\mathrm{A}} \left(\int_u^{\mathrm{A}} \big|f(u)\big|\,\big|g(x-u)\big|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\mathrm{A}} \big|f(u)\big| \left(\int_u^{\mathrm{A}} \big|g(x-u)\big|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\mathrm{A}} \big|f(u)\big| \left(\int_0^{\mathrm{A}-u} \big|g(y)\big|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^{\mathrm{A}} \big|f(u)\big| \left(\int_0^{+\infty} |g|\right)\mathrm{d}u \\ &\leqslant \left(\int_0^{+\infty} |f|\right)\left(\int_0^{+\infty} |g|\right)\end{aligned}$$

Cela prouve bien le résultat demandé ; on peut même dire que

$$\int_0^{+\infty} |f \star g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} |f|\right)\left(\int_0^{+\infty} |g|\right).$$

3. Soit $n \geqslant 0$. Les mêmes calculs et les mêmes applications du théorème de Fubini que dans la question précédente conduisent à l'égalité :

$$\int_0^n f \star g(x)\mathrm{d}x = \int_0^n f(u)\left(\int_0^{n-u} g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u,$$

égalité que l'on peut réécrire, en utilisant une fonction caractéristique :

$$\int_0^n f \star g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \chi_{[0,n]}(u) f(u)\left(\int_0^{n-u} g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}u.$$

Définissons alors la suite de fonctions (ϕ_n) par

$$\phi_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \chi_{[0,n]}(u)f(u) \int_0^{n-u} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

La suite (ϕ_n) converge simplement vers la fonction $u \mapsto f(u)\int_0^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$ et on peut majorer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in [0,+\infty[$,

$$\left|\phi_n(u)\right| \leqslant \left|f(u)\right| \int_0^{+\infty} \left|g(y)\right| \mathrm{d}y.$$

Or la fonction $u \mapsto \left|f(u)\right| \int_0^{+\infty} \left|g(y)\right| \mathrm{d}y$, indépendante de n, est intégrable sur $[0,+\infty[$ car f l'est. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on conclut :

$$\int_0^{+\infty} f \star g(x)\mathrm{d}x = \left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

4. Fixons $y \geqslant 0$, et considérons les deux fonctions

$$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-xy} f(x) \quad \text{et} \quad g_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-xy} g(x).$$

Calculons, pour tout x :

$$\begin{aligned} f_1 \star g_1(x) &= \int_0^x f_1(t) g_1(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^{-ty} f(t) \mathrm{e}^{-(x-t)y} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-xy} f \star g(x) \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0,+\infty[$ de chaque côté, on obtient

$$\int_0^{+\infty} f_1 \star g_1(x)\mathrm{d}x = \mathscr{L}(f \star g)(y).$$

La formule démontrée plus haut, à savoir

$$\int_0^{+\infty} f_1 \star g_1(x)\mathrm{d}x = \left(\int_0^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty} g_1(x)\mathrm{d}x\right),$$

donne alors le résultat.

8.3 Intégrales multiples

Exercice 61 (Valeur de Γ en 1/2 et intégrale de Gauss)
On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} u^{2x-1}\,\mathrm{d}u$.
2. On souhaite calculer $\mathrm{I} = \Gamma(1/2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.
   (a) Écrire I^2 sous forme d'une intégrale double sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Calculer alors I^2 à l'aide d'un changement de variable en coordonnées polaires. En déduire I.

3. La fonction bêta[12] d'Euler est définie par :

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que B est bien définie pour $x > 0$ et $y > 0$ et que

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

(b) À l'aide d'un changement de variable en coordonnées polaires, établir, pour $x > 0$ et $y > 0$, la relation :

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Soluce

1. Soit $x > 0$. On devrait prendre a et A deux réels tels que $0 < a < \mathrm{A}$ afin de travailler sur l'intégrale de a à A et ensuite faire tendre a vers 0^+ et A vers $+\infty$, ce travail a déjà été fait à l'exercice précédent, donc je m'abstiens ici de prendre ces précautions...

   On pose $u(t) = \sqrt{t}$, la fonction u est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$. On a $t = u^2$ soit $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$, donc, pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}u^{2x-1}\mathrm{d}u.$$

   En particulier, $\mathrm{I} = \Gamma(1/2)$ est l'intégrale de Gauss.

2. (a) On a :

$$\mathrm{I}^2 = \left(2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right) \times \left(2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v\right).$$

   Comme les fonctions à intégrer sont continues et positives sur $]0,+\infty[$, d'après le théorème de Fubini, on a :

$$\mathrm{I}^2 = 4\iint_{\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

   (b) Pour $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[$, on pose $(u,v) = \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, ce qui définit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme φ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$ dont le déterminant jacobien vaut classiquement r. Le changement de variable donne :

$$\mathrm{I}^2 = 4\iint_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

12. La lettre B est bien un bêta majuscule.

puis en appliquant de nouveau le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^2 &= 4\int_{]0,\frac{\pi}{2}[} \mathrm{d}\theta \int_{]0,+\infty[} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r \\
&= 4\times\frac{\pi}{2}\times\left[-\frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} \\
&= 4\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Comme I est positive, $\mathrm{I} = \sqrt{\pi}$.

3. (a) Soient $x > 0$ et $y > 0$, la fonction $\phi : t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$, donc les seuls problèmes pour étudier l'intégrabilité sont en 0 et en 1.
En 0, on a $\phi(t) \underset{0^+}{\sim} t^{x-1}$ qui est intégrable au voisinage de 0 pour $x > 0$ (intégrale de Riemann). En 1, on a $\phi(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^{y-1}$ qui est intégrable au voisinage de 1 pour $y > 0$. Donc la fonction bêta d'Euler est définie pour $x > 0$ et $y > 0$.
Ensuite, on effectue le changement de variable $t = \cos^2\theta$ (en effet, la fonction $\theta \mapsto \cos^2\theta$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,\pi/2[$ sur $]0,1[$), ce qui donne $\mathrm{d}t = -2\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 \cos^{2x-2}\theta\sin^{2y-2}\theta(-2\cos\theta\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{J}(x,y).
\end{aligned}$$

(b) Soient $x > 0$ et $y > 0$. D'après la première question, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}u^{2x-1}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-v^2}v^{2y-1}\mathrm{d}v \\
&= 4\iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad \text{(Fubini)} \\
&= 4\iint_{]0,+\infty[\times]0,\pi/2[}\mathrm{e}^{-r^2}r^{2x-1}\cos^{2x-1}(\theta)r^{2y-1}\sin^{2y-1}(\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \quad \text{(polaires)} \\
&= 2\int_0^{+\infty}r^{2x+2y-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\times 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta \quad \text{(Fubini)} \\
&= \Gamma(x+y)\mathrm{B}(x,y).
\end{aligned}$$

Comme Γ est partout non nulle, on peut diviser. Pour tout x et tout y strictement positifs,

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Chapitre 9

Espaces vectoriels normés

9.1 Espaces vectoriels normés en dimension quelconque

La dimension quelconque fournit des topologies relativement contre-intuitives pour ceux qui ont l'habitude de l'ambiance douce et feutrée des espaces vectoriels normés en dimension finie, où les normes sont équivalentes, les sous-espaces fermés, et les boules compactes.

Avant de regarder l'exercice qui suit, il est bon de se demander ce qu'est réellement un hyperplan d'un espace E. En dimension finie, il s'agit d'un sous-espace de dimension $\dim \mathrm{E} - 1$. Mais en dimension infinie, ce nombre n'a pas cours et cette dimension n'a pas de sens. On peut toujours dire qu'un hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, mais on peut aussi dire, et c'est plus intuitif, que H est un sous-espace maximal de E, parmi les sous-espaces distincts de E. Il est facile de voir que les deux définitions coïncident. D'une part, si H est maximal, tout $a \notin \mathrm{H}$ va vérifier, par maximalité $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathbb{K}a$. Il suffit de choisir la forme linéaire f sur E telle que $f(h+ka) = k$, pour obtenir une forme linéaire de noyau H. Réciproquement, si $\mathrm{H} = \ker f$, avec $f \in \mathrm{E}^*$, non nulle, alors, on voudrait montrer que si H' est un sous-espace contenant H et distinct de H, alors $\mathrm{H}' = \mathrm{E}$. En effet, on peut trouver a dans H' tel que $f(a) = \beta \neq 0$, et quitte à diviser a par β, on peut supposer $f(a) = 1$. Si $x \in \mathrm{E}$, alors $x - f(x)a \in \ker f = \mathrm{H}$, ce qui prouve $x \in \mathrm{H}'$, et donc $\mathrm{H}' = \mathrm{E}$.

Exercice 62 (L'alternative fermé-dense pour un hyperplan)

1. Soit E un espace vectoriel normé réel.
   (a) Soit V un sous-espace de E. Montrer que l'adhérence de V est un sous-espace de E.
   (b) Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est soit dense dans E, soit fermé.
2. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et F le sous-espace de E formé par les fonctions qui s'annulent en 0.
   (a) On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que H est fermé.
   (b) On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que H est dense dans E.

Soluce

1. (a) Notons F l'adhérence de V dans E.
   - Il est clair que $0 \in \mathrm{F}$.
   - Soient x, y dans F et λ un réel. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de V convergeant respectivement vers x et y ; la suite $(\lambda x_n + y_n)$ est une suite d'éléments de V ayant pour limite $\lambda x + y$, ce qui prouve que $\lambda x + y$ est dans F.
   - Conclusion : l'adhérence de V est un sous-espace de E.

   (b) Soit H un hyperplan de E. Supposons que H n'est pas fermé, *i.e.* $\mathrm{H} \neq \overline{\mathrm{H}}$, et choisissons a dans $\overline{\mathrm{H}} \setminus \mathrm{H}$. On a alors $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathbb{R}a \subset \overline{\mathrm{H}} + \overline{\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{H}}$, la dernière égalité venant du fait que $\overline{\mathrm{H}}$ est un sous-espace. Donc H est bien dense dans E.

2. (a) On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit (f_n) une suite d'éléments de H convergeant vers f. La convergence uniforme entrainant la convergence simple, on a en particulier, quand $n \to +\infty$, $0 = f_n(0) \to f(0)$, ainsi f est dans H, par suite H est fermé.

   (b) On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit f dans E. Considérons la suite (f_n) (que l'on appréhende mieux avec un dessin) définie par :

   $$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(t) = nf(1/n)t \text{ si } t \in [0,1/n] \text{ et } f_n(t) = f(t) \text{ si } t \in [1/n,1]$$

   Chaque f_n est dans H ; estimons $\|f_n - f\|_1$. On a :

   $$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n - f| = \int_0^{1/n} |f_n - f| &\leqslant \int_0^{1/n} |f_n| + \int_0^{1/n} |f| \\ &\leqslant \frac{|f(1/n)|}{2n} + \frac{\|f\|_\infty}{n} \leqslant \frac{3\|f\|_\infty}{2n} \end{aligned}$$

   La quantité majorante de l'inégalité précédente tendant vers 0 quand $n \to +\infty$, la suite (f_n) converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_1$ prouvant ainsi que H est dense dans E.

Exercice 63 (Normes et formes linéaires non continues)

Soit A une partie fermée de $\mathbb{R}$. On considère l'application sur l'espace $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par

$$\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{A}} = \mathrm{Sup}_{x \in \mathrm{A}} |\mathrm{P}(x)| .$$

1. Montrer que $\|-\|_{\mathrm{A}}$ définit une norme si et seulement si A est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
2. On suppose A compact et on note a un réel quelconque. Montrer que l'application d'évaluation δ_a, définie par $\delta_a(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(a)$, est une forme linéaire continue pour la norme $\|-\|_{\mathrm{A}}$ si et seulement si $a \in \mathrm{A}$

Soluce

1. On suppose que A est un compact infini. Dans ce cas, $\|-\|_{\mathrm{A}}$ est bien définie puisque A est compact. Montrons que c'est bien une norme.

(a) *Séparation.* Si $\|P\|_A = 0$, alors P s'annule sur tout A. Or, A est infini, donc P s'annule sur un ensemble infini ; c'est donc le polynôme nul.

(b) *Homogénéïté.* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $|\lambda P(x)| = |\lambda|\,|P(x)|$, ce qui donne, par positivité de $|\lambda|$, que $\mathrm{Sup}_{x\in A}|\lambda P(x)| = |\lambda|\,\mathrm{Sup}_{x\in A}|P(x)|$, et donc $\|\lambda P\|_A = |\lambda|\,\|P\|_A$.

(c) Inégalité triangulaire. Soient P, Q deux polynômes et $x \in A$. On sait que $|P(x) + Q(x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)|$.
On a donc $|P(x) + Q(x)| \leqslant \mathrm{Sup}_{y\in A}|P(y)| + \mathrm{Sup}_{y\in A}|Q(y)|$. En passant au sup le membre de gauche, il vient $\|P + Q\|_A \leqslant \|P\|_A + \|Q\|_A$.

Conclusion, $\|-\|_A$ est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
Réciproquement, et par la contraposée, on veut montrer que si A n'est pas compact ou n'est pas infinie, alors $\|-\|_A$ n'est pas une norme.
Si A n'est pas compact, alors A n'est pas borné, puisque A est fermé. Donc, en posant $P = X$, on voit que $\|P\|_A$ n'est pas défini.
Si A est fini, alors, on pose $P := \prod_{x\in A}(X - a)$, pour voir que P est non nul, alors que $\|P\|_A = 0$. L'axiome de séparabilité n'est donc pas vérifié.

2. On voit rapidement que δ_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Supposons dans un premier temps $a \in A$. On a donc, par construction, $|\delta_a(P)| = |P(a)| \leqslant \|P\|_A$. La forme linéaire δ_a est alors 1-lipschitzienne, donc continue.
On suppose maintenant $a \notin A$. Nous allons construire une suite de polynômes (P_n) qui tend vers le polynôme nul pour la norme $\|-\|_A$, mais telle que $|\delta_a(P_n)|$ ne tend pas vers 0. Comme $\delta(0) = 0$, cela prouvera la non-continuité de δ_a.
Comme A est fermé et $\alpha \notin A$, il existe $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[$ n'intersecte pas A. Soit m, M deux réels tels que $]a - \alpha, a + \alpha[\cup A \subset [m, M]$, ce qui est possible car A est borné.
Soit f une fonction continue s'annulant sur A et telle que $f(a) = 1$. On peut prendre par exemple la fonction (continue) affine par morceaux

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < x < a - \alpha \\ \frac{x-a+\alpha}{\alpha} & \text{si } a - \alpha \leqslant x < a \\ \frac{-x+a+\alpha}{\alpha} & \text{si } a \leqslant x < a + \alpha \\ 0 & \text{si } a + \alpha \leqslant x \leqslant M \end{cases} \tag{9.1}$$

Le théorème d'approximation de Weierstrass (sur le compact $[m, M]$), voir exercice 5, permet de voir qu'il existe une suite (P_n) de polynômes qui approchent f sur le compact $[m, M]$, plus précisément, telle que

$$\mathrm{Sup}_{x\in[m,M]}|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

En particulier, si $x \in A$, le fait que f s'annule sur A implique

$$|P_n(x)| \leqslant |P_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Il vient que $\mathrm{Sup}_{x\in A}|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, et donc, la suite P_n tend vers 0 pour la norme $\|-\|_A$. Pourtant,

$$|\delta_a(P_n)| = |P_n(a)| \geqslant |f(a)| - |P_n(a) - f(a)| \geqslant 1 - \frac{1}{n},$$

et donc $|\delta_a(P_n)|$ ne tend pas vers 0.

Remarque. On peut même dire ici que la suite $(\mathrm{P}_n(a))$ tend vers 1, puisque par les deux inégalités triangulaires $\mathrm{P}_n(a) = f(a) + (\mathrm{P}_n(a) - f(a))$ implique

$$1 - \frac{1}{n} \leqslant |f(a)| - |\mathrm{P}_n(a) - f(a)| \leqslant |\delta_a(\mathrm{P}_n)| = |\mathrm{P}_n(a)| \leqslant |f(a)| + |\mathrm{P}_n(a) - f(a)| \leqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

On voit alors que si A est une partie compacte de $\mathbb{R}$ et si $a \notin \mathrm{A}$, alors l'hyperplan H_a des polynômes qui s'annulent en a, c'est-à-dire l'hyperplan des polynômes divisibles par $(\mathrm{X}-a)$, est dense dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour la norme $\|-\|_{\mathrm{A}}$. En effet, par l'alternative fermé-dense, voir exercice 62, il suffit pour le montrer de voir que H_a n'est pas fermé pour cette norme. Or, la suite $(\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_n(a))$ est dans H_a, alors que sa limite, pour la norme $\|-\|_{\mathrm{A}}$, est $0 - 1 = -1 \notin \mathrm{H}_a$, ce qui prouve que H_a n'est pas fermé.

Exercice 64 (Norme et espace réel non complet)

Dans l'espace $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\|\mathrm{P}\| = \sum_{k\geqslant 0} \left|\mathrm{P}^{(k)}(k)\right|$.

1. Montrer que l'on obtient bien une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
2. En considérant les polynômes $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]_n$ tels que $\mathrm{P}_n^{(k)}(k) = 2^{-k}$, montrer que l'espace ainsi normé n'est pas complet.

Soluce

1. La norme est bien définie car la somme est finie. Elle est séparable (seule difficulté) car si $\|\mathrm{P}\| = 0$ et (par l'absurde) P est non nul, notons n son degré et a_n son coefficient dominant. Alors $n!a_n = \mathrm{P}^{(n)}(n) = 0$, absurde.
2. On vérifie facilement que les formes linéaires $\varphi_k(\mathrm{P}) = \mathrm{P}^{(k)}(k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]_n$ sont indépendantes : on applique pour cela une combinaison linéaire nulle de ces formes à la base canonique de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]_n$. Elles forment donc une base du dual, et P_n est le polynôme dont les composantes sont 2^{-k} dans cette base.

Exercice 65 (Théorème de Riesz)

On veut montrer le théorème de Riesz qui dit que si E est un espace vectoriel normé sur un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors E est de dimension finie si et seulement si la boule unité est compacte. On notera $\|x\|$ la norme de $x \in \mathrm{E}$.

1. En utilisant la caractérisation d'un compact en dimension finie (fermé-borné), montrer l'implication.
2. On veut montrer la réciproque. On suppose, par la contraposée, que E est un espace de dimension infinie et on veut montrer que la boule unité n'est pas compacte.
   (a) Soit F un sous-espace de dimension finie de E et a dans E . Montrer qu'il existe x dans F qui minimise $\|a - x\|$. On notera dans la suite $d(a, \mathrm{F}) := \|a - x\|$.
   (b) Soit $a \in \mathrm{E}$, $u \in \mathrm{F}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer les égalités
   $$d(a, \mathrm{F}) = d(a - u, \mathrm{F}),\ d(\lambda a, \mathrm{F}) = |\lambda|\, d(a, \mathrm{F}).$$

(c) Montrer alors qu'il existe un vecteur a de norme 1 dans E tel que $d(a, \mathrm{F}) = 1$.

(d) Construire par récurrence une suite $(a_n)_n$ telle que pour tout n, $\|a_n\| = 1$ et $d(a_n, \mathrm{F}_{n-1}) = 1$, avec $\mathrm{F}_{n-1} := \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$, puis conclure.

Soluce

1. Si l'espace E est un espace de dimension finie, la boule de rayon 1 est forcément bornée pour la même norme (on n'a même pas besoin de dégainer le fait que toutes les normes sont équivalentes...)

   Il reste à démontrer que la boule est fermée. Appelons N la norme (pour des raisons d'esthétique), alors la boule n'est rien d'autre que $\mathrm{N}^{-1}([0,1])$. Il suffit donc de montrer que N est continue. Mais ceci est clair car N est 1-lipschitzienne par l'inégalité triangulaire qui dit que $|\mathrm{N}(x) - \mathrm{N}(y)| \leqslant \mathrm{N}(x-y)$.

2. (a) Soit donc $d(a, \mathrm{F}) := \inf_{y \in \mathrm{F}} \|a - y\|$, qui est bien définie puisque $\{\|a-y\|, y \in \mathrm{F}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Par définition de la borne inférieure, pour tout entier $n > 0$, il existe $x_n \in \mathrm{F}$ tel que

$$d(a, \mathrm{F}) \leqslant \|a - x_n\| < d(a, \mathrm{F}) + \frac{1}{n}.$$

   On a donc trouvé une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans F telle que $\lim_{n \to +\infty} \|a - x_n\| = d(a, \mathrm{F})$.

   La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée puisque

$$\|x_n\| = \|x_n - a + a\| \leqslant \|x_n - a\|| + |a\| \leqslant d(a, \mathrm{F}) + 1 + \|a\|.$$

   Comme F est de dimension finie et que la suite est bornée dans F, elle possède une valeur d'adhérence (une boule en dimension finie est compacte) x dans F. Soit $(x_{\gamma(n)})$ une suite extraite qui converge vers x. On a, par continuité de la norme,

$$\|a - x\| = \lim_{n \to +\infty} \|a - x_{\gamma(n)}\| = d(a, \mathrm{F}).$$

   On a montré que la borne inférieure était bien un minimum (car $x \in \mathrm{F}$).

   (b) Pour la première égalité, on va se permettre d'utiliser le changement de variable $y' = -u + y$, $y, y' \in \mathrm{F}$. On a

$$d(a, \mathrm{F}) = \inf_{y \in \mathrm{F}} \|a - y\| = \inf_{y' \in \mathrm{F}} \|a - (y' + u)\| = \inf_{y' \in \mathrm{F}} \|(a - u) - y'\| = d(a - u, \mathrm{F}).$$

   Pour la seconde, on utilise le changement de variables $y = \lambda y'$ (car λ est non nul).

$$d(\lambda a, \mathrm{F}) = \inf_{y \in \mathrm{F}} \|\lambda a - y\| = \inf_{y' \in \mathrm{F}} \|\lambda a - \lambda y'\| = |\lambda| \inf_{y' \in \mathrm{F}} \|a - y'\| = |\lambda|\, d(a, \mathrm{F}).$$

(c) C'est une conséquence directe des deux égalités précédentes : soit b dans E, avec $b \notin \mathrm{F}$, ce qui est possible puisque $\mathrm{E} \neq \mathrm{F}$, par considération de dimension.

On a donc $d(b, \mathrm{F}) \neq 0$. En effet, $d(b, \mathrm{F}) = \|b - x\|$ pour un $x \in \mathrm{F}$, donc, en particulier, $x \neq b$.

On pose $a = \frac{b-x}{\|b-x\|}$. On a alors $\|a\| = 1$ et de plus,

$$d(a, \mathrm{F}) = d\left(\frac{b-x}{\|b-x\|}, \mathrm{F}\right) = \frac{1}{\|b-x\|} d(b-x, \mathrm{F}) = \frac{1}{\|b-x\|} d(b, \mathrm{F}) = 1.$$

(d) On part d'un vecteur non nul arbitraire b_0 que l'on normalise en $a_0 := \frac{b_0}{\|b_0\|}$. Par récurrence, une fois les vecteurs $a_0, a_1, \cdots, a_n$ déterminés, on définit, grâce à la question qui précède, le sous-espace F_n engendré par $a_0, a_1, \cdots, a_n$, et le vecteur a_{n+1} tel que $\|a_{n+1}\| = 1$ et $d(a_{n+1}, \mathrm{F}_n) = 1$.

La suite $(a_n)_n$ est, par construction, dans la boule unité. Montrons que l'on ne peut pas en extraire une sous-suite convergente. On note que, pour tout $n > m$ dans $\mathbb{N}$,

$$\|a_n - a_m\| \geqslant d(a_n, \mathrm{F}_m) \geqslant d(a_n, \mathrm{F}_{n-1}) = 1.$$

Donc, aucune sous-suite de la suite $(a_n)_n$ ne peut être une suite de Cauchy. On en déduit que la boule unité n'est pas compacte.

Remarque (Sur compact=fermé-borné en dimension finie).

Le fait que compact implique fermé-borné est chose claire. Mais, la réciproque se fait classiquement en trois étapes : 1) un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact, 2) le produit cartésien de compacts est compacts et donc le produit d'intervalles fermés bornés est compact, et 3) un fermé borné est un fermé dans un compact, donc compact.

9.2 Distance à un fermé dans un espace de matrices

Exercice 66 (Distance d'une matrice à un sous-groupe)

On considère l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme quadratique N_2 donnée par

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{M})^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij}^2, \ \mathrm{M} := (m_{ij}).$$

Le but de l'exercice est de prouver que si $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{N}_2(\mathrm{M}) \geqslant \sqrt{n}$, avec égalité si et seulement si $\mathrm{M} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

1. **Première méthode : par décomposition polaire**

   (a) Montrer que pour toute matrice M, $\mathrm{N}_2(\mathrm{M})^2 = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{M}\mathrm{M})$. En déduire que si $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{N}_2(\mathrm{M}) = \sqrt{n}$.

   (b) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$ sa décomposition polaire. Montrer, à l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique, que si λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont les valeurs propres de S, alors $\sum_i \lambda_i^2 \leqslant n$ et en déduire l'inégalité $\mathrm{N}_2(\mathrm{M}) \geqslant \sqrt{n}$.

(c) A l'aide du cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique, montrer que l'égalité $N_2(M) = \sqrt{n}$ est atteinte si et seulement si $M \in SO_n(\mathbb{R})$.

2. **Seconde méthode : par les extrema liés**

(a) Soit λ un réel et L la fonction de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$L(M) := \mathrm{tr}({}^t MM) - \lambda(\det(M) - 1).$$

Calculer la différentielle de L en une matrice M.

(b) En utilisant le théorème des extrema liés, déduire le résultat demandé.

Soluce

1. **Première méthode : par décomposition polaire**

(a) Soit $N := {}^t MM$. En posant $N := (n_{ij})$, il vient, pour tout j, $n_{jj} = \sum_i n_{ij} n_{ij} = \sum_j n_{ij}^2$. On en déduit

$$\mathrm{tr}({}^t MM) = \sum_j n_{jj} = \sum_{i,j} n_{ij}^2 = N_2(M)^2.$$

En particulier, si $M \in O_n(\mathbb{R})$, $N_2(M)^2 = \mathrm{tr}(I_n) = n$, ce qui fournit le résultat voulu.

(b) On sait que S est symétrique définie positive et $O \in O_n(\mathbb{R})$. On en déduit $\det(S) > 0$ et $\det(O) = \pm 1$. Comme $\det(M) = 1$, on en déduit que $\det(O) > 0$ et donc $O \in SO_n(\mathbb{R})$. Il vient alors $\det(S) = 1$. L'inégalité arithmético-géométrique [1] donne

$$\left(\frac{1}{n}\sum_i \lambda_i^2\right)^n \geqslant \prod_i \lambda_i^2 = \det(S)^2 = 1,$$

et donc $\sum_i \lambda_i^2 \geqslant n$.

On en déduit le résultat annoncé, puisque

$$N_2(M)^2 = \mathrm{tr}({}^t MM) = \mathrm{tr}({}^t S\, {}^t OOS) = \mathrm{tr}(S^2) = \sum_i \lambda_i^2 \geqslant n.$$

(c) La question précédente prouve que l'égalité $N_2(M) = \sqrt{n}$ est atteinte si et seulement si l'égalité est atteinte dans l'inégalité arithmético-géométrique, c'est-à-dire si et seulement si tous les λ_i^2 sont égaux entre eux. Comme les λ_i sont des réels positifs, ceci implique que tous les λ_i sont égaux, et comme leur produit vaut 1, tous les λ_i valent 1. Comme S est diagonalisable, de spectre réduit à 1, $S = I_n$ et $M = O \in SO_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, si $M \in SO_n(\mathbb{R})$, on a bien $M \in SL_n(\mathbb{R})$ et $N_2(M)^2 = n$ par la question 1.

2. **Seconde méthode : par les extrema liés**

1. L'inégalité arithmético-géométrique dit que pour tout n-uplet (x_i) de réels, la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique, avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux. Elle découle de la stricte concavité du logarithme, qui se prouve avec sa dérivée seconde strictement négative.

(a) On sait, voir [4, V-7.2.1], que la différentielle d'une forme quadratique en un vecteur u vaut $2b(u, ?)$ où b désigne sa forme polaire. On sait également, voir [5, Proposition IX-1.6.7], ou l'exercice 114, que si A est une matrice inversible, alors la différentielle du déterminant est $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{tr}(\widetilde{\mathrm{A}}\mathrm{H})$, où $\widetilde{\mathrm{A}}$ désigne la transposée de la comatrice de A, c'est-à-dire $\det(\mathrm{A})\mathrm{A}^{-1}$. Il vient donc

$$d_{\mathrm{M}}\mathrm{L}(\mathrm{H}) = 2\,\mathrm{tr}({}^t\mathrm{MH}) - \lambda\,\mathrm{tr}(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{H}) = \mathrm{tr}\left(\left(2\,{}^t\mathrm{M} - \lambda\mathrm{M}^{-1}\right)\mathrm{H}\right).$$

(b) Le théorème des extrema liés dit que si le minimum de $\mathrm{N}_2(\mathrm{M})^2$ est atteint avec la contrainte $\det(\mathrm{M}) = 1$, alors $d_{\mathrm{M}}\mathrm{L} = 0$.
D'après la question précédente, soit $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que ce minimum est atteint, alors $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{tr}\left(\left(2\,{}^t\mathrm{M} - \lambda\mathrm{M}^{-1}\right)\mathrm{H}\right)$ est nulle. Comme la forme bilinéaire $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{AB})$ est non dégénérée, voir [CVA ? ?], cela signifie que $2\,{}^t\mathrm{M} - \lambda\mathrm{M}^{-1} = 0$ et donc $2\,{}^t\mathrm{MM} = \lambda\mathrm{I}_n$. En prenant le déterminant, il vient $2^n = \lambda^n$, donc $\lambda = 2$ puisque λ est réel, et qu'il est positif, car ${}^t\mathrm{MM}$ est une matrice symétrique positive. On en déduit ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{I}_n$ et donc $\mathrm{M} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, puisque $\det(\mathrm{M}) = 1$. La réciproque est claire.

Exercice 67 (La matrice orthogonale la plus proche de chez vous !)

On considère l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme quadratique N_2 donnée par

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{M})^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij}^2 \quad \text{pour } \mathrm{M} = (m_{ij}).$$

Soit A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et S l'unique matrice symétrique positive telle que $\mathrm{S}^2 = {}^t\mathrm{AA}$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{A} - \mathrm{M}) \geqslant \mathrm{N}_2(\mathrm{A})^2 + n - 2\,\mathrm{tr}(\mathrm{S}),$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si $\mathrm{M} = \mathrm{O}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$ est une décomposition polaire[2] de A.

1. Prouver l'inégalité proposée.
2. On suppose $\mathrm{O} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$. Montrer que l'égalité a lieu pour $\mathrm{M} = \mathrm{O}$.
3. Réciproquement, soit $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que l'égalité ait lieu. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{MS}$ est une décomposition polaire de A.

Soluce

1. On a vu dans l'exercice 66 que $\mathrm{N}_2(\mathrm{B})^2 = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{BB})$ pour toute matrice B. Il en résulte que pour tout M de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_2(\mathrm{A} - \mathrm{M})^2 &= \mathrm{tr}\left({}^t(\mathrm{A} - \mathrm{M})(\mathrm{A} - \mathrm{M})\right) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AA}) + \mathrm{tr}({}^t\mathrm{MM}) - \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AM}) - \mathrm{tr}({}^t\mathrm{MA}) \\ &= \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AA}) + \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) - 2\,\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AM}) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AA}) + n - 2\,\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AM}).\end{aligned}$$

2. Attention, si A n'est pas inversible cette décomposition n'est pas unique.

Soit A = OS une décomposition polaire de A (on sait qu'alors nécessairement ${}^t\mathrm{AA} = \mathrm{S}^2$ et qu'il existe une unique S positive qui vérifie l'égalité). Par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^{-1}$, avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$, où r est le rang de S (et, au passage, le rang de A), et où, pour tout i de 1 à r, $d_i > 0$. Il vient

$$\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AM}) = \mathrm{tr}(\mathrm{S}\,{}^t\mathrm{OM}) = \mathrm{tr}(\mathrm{PDP}^{-1}\,{}^t\mathrm{OM}) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{D}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{O}^{-1}\mathrm{MP})\big) = \mathrm{tr}(\mathrm{DN}),$$

avec $\mathrm{N} := \mathrm{P}^{-1}\mathrm{O}^{-1}\mathrm{MP} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Posons $\mathrm{N} = (n_{ij})$, ce qui implique $n_{ij} \leqslant 1$ (puisque toutes les colonnes de N sont de norme 1). Par positivité des d_i :

$$\mathrm{tr}(\mathrm{DN}) = \sum_{i=1}^{r} d_i n_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{r} d_i = \mathrm{tr}(\mathrm{D}) = \mathrm{tr}(\mathrm{S}).$$

L'inégalité en résulte. Notons pour la suite que l'égalité est équivalente à $\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AM}) = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$.

2. Si A = OS, alors $\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AO}) = \mathrm{tr}(\mathrm{S}\,{}^t\mathrm{OO}) = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$, ce qui fournit le résultat demandé.
3. On suppose M dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AM}) = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$, et on veut montrer A = MS. On rappelle les notations ci-dessus. On a fixé une décomposition polaire A = OS de A, S la racine carrée de ${}^t\mathrm{AA}$, $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^{-1}$, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$, et enfin $\mathrm{N} = (n_{ij})$, avec $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{O}^{-1}\mathrm{MP} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de sorte que si l'égalité $\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AM}) = \mathrm{tr}(\mathrm{S})$ a lieu, alors $\mathrm{tr}(\mathrm{DN}) = \mathrm{tr}(\mathrm{D})$. Ceci entraîne $\sum_i d_i n_{ii} = \sum_i d_i$ et comme $d_i > 0$ avec $n_{ii} \leqslant 1$, l'égalité force $n_{ii} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Comme N est une matrice orthogonale, ses colonnes sont de norme 1, et il vient que N est de la forme
$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{N}' \end{pmatrix}.$$
Cette forme implique l'égalité ND = D et donc
$$\mathrm{MS} = \mathrm{OPNP}^{-1}\mathrm{S} = \mathrm{OPNP}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{OPNDP}^{-1} = \mathrm{OPDP}^{-1} = \mathrm{OS} = \mathrm{A}.$$
Voilà qui achève la preuve.

Remarque. Pour continuer sur ce thème de distance d'une matrice à un fermé, on vous invite à regarder l'exercice 115 qui utilise le théorème des extrema liés.

Chapitre 10

Equations différentielles linéaires

10.1 Généralités

Exercice 68 (Entrelacement des zéros d'une équation différentielle)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $p, q : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues données, on considère une fonction f, solution non partout nulle de l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{E}$$

1. Montrer que f ne peut pas avoir de zéro commun avec sa dérivée.
2. Montrer que tout zéro t_0 de f possède un voisinage ouvert sur lequel f ne s'annule qu'en t_0.
3. Soit J un segment inclus dans I. Montrer que f ne possède qu'un nombre fini de zéros dans J.
4. Soit g une autre solution de l'équation (E), linéairement indépendante de f .
   (a) Montrer que leur wronskien $w = fg' - f'g$ ne s'annule pas sur I.
   (b) Montrer que f et g ne possèdent pas de zéro en commun.
   (c) Montrer que, si f et g sont réelles, alors g possède un unique zéro dans tout intervalle de la forme $]t_0, t_1[$, où t_0 et t_1 sont deux zéros consécutifs de f (s'il en existe).

Soluce

1. Supposons, par l'absurde, que la fonction f possède un zéro commun avec sa dérivée ; il existe alors $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(t_0) = 0 = f'(t_0)$. Le problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$
admet alors deux solutions : la fonction f et la fonction nulle. Comme p et q sont des fonctions continues sur l'intervalle I, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : la fonction f est alors la fonction nulle. Contradiction avec l'hypo-

thèse de l'énoncé. On en déduit que les fonctions f et f' n'ont pas de zéro en commun, comme voulu.

2. Au voisinage du zéro t_0 de f, on a :

$$f(t_0+h) = f(t_0) + f'(t_0)h + o(h) = f'(t_0)h + o(h).$$

Ainsi, si $h = 0$, on en déduit que $f(t_0+h) = 0$, et si $h \neq 0$, alors $f(t_0+h) = f'(t_0)h + o(h)$, avec $f'(t_0) \neq 0$ par la question précédente. Il existe donc un réel $h > 0$ tel que le seul zéro de f dans l'intervalle ouvert $]t_0-h, t_0+h[$ soit t_0. On a bien démontré que tout zéro t_0 de f possède un voisinage ouvert sur lequel f ne s'annule qu'en t_0.

3. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite injective $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de f dans un segment J. Comme il est compact, on peut extraire une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel $\ell \in [a,b]$. Comme la fonction f est continue sur I, on en déduit par passage à la limite que $f(\ell) = 0$. Ainsi, ℓ est un zéro de f et tout voisinage de ℓ contient des zéros de f ; cela contredit la question précédente. Ainsi, f n'admet qu'un nombre fini de zéros dans J.

4. (a) C'est une conséquence du rappel de la page 175 : comme les fonctions f et g sont linéairement indépendantes, leur wronskien ne s'annule par sur I ; cela s'écrit

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad w_{f,g}(t) \neq 0.$$

(b) Supposons, par l'absurde, que f et g possèdent un zéro en commun, t_0. Alors on a

$$0 = w_{f,g}(t_0) = f(t_0)g'(t_0) - f'(t_0)g(t_0),$$

avec $t_0 \in \mathrm{I}$: contradiction avec la question précédente. Ainsi, f et g ne possèdent pas de zéro en commun.

(c) Supposons qu'il existe t_0 et t_1 deux zéros consécutifs de f dans I. On a donc $f(t_0) = 0 = f(t_1)$, ce qui implique

$$w_{f,g}(t_0) = -f'(t_0)g(t_0) \neq 0. \tag{1}$$

De même,

$$w_{f,g}(t_1) = -f'(t_1)g(t_1) \neq 0. \tag{2}$$

De plus, puisque,d'après ce qui précède, le wronskien de f et de g ne s'annule pas sur I, on en déduit que $w_{f,g}(t_0)$ et $w_{f,g}(t_1)$ sont de même signe, soit :

$$w_{f,g}(t_0)w_{f,g}(t_1) > 0. \tag{3}$$

De plus, t_0 et t_1 étant deux zéros consécutifs de f, fonction continue, $f'(t_0)$ et $f'(t_1)$ sont de signe contraire, c'est-à-dire :

$$f'(t_0)f'(t_1) < 0,$$

ce qui implique, en combinant (1), (2) et (3) :

$$g(t_0)g(t_1) < 0.$$

Cela signifie que que $g(t_0)$ et $g(t_1)$ sont de signe contraire ; la fonction g étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence de $\alpha \in]t_0, t_1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. L'existence est démontrée.

Quant à l'unicité, supposons qu'il existe au moins deux zéros de g dans $]t_0, t_1[$, que l'on nomme x_0 et x_1. En inversant les rôles de f et de g, on montre alors qu'il existe un zéro de f, disons ρ, compris entre x_0 et x_1 : contradiction avec le fait que t_0 et t_1 sont deux zéros consécutifs de f. L'unicité est ainsi démontrée.

Exercice 69 (Équations à coefficients constants, un théorème chapeau)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\mathscr{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables de I dans $\mathbb{C}$. On note $\mathrm{D} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, $y \mapsto y'$ l'opérateur de dérivation.

1. Soit $y : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $y' = 0$.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation différentielle $y^{(m)} = 0$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit $e_\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$.
   (a) Soit $y \in \mathscr{E}$ et soit $z = y/e_\alpha$. Comparer $y' - \alpha y$ et z'.
   (b) En déduire, pour tout m entier et pour tout y dans $\mathscr{E}$, une expression simple de $(\mathrm{D} - \alpha \,\mathrm{Id})^m(y)$.
   (c) Décrire les éléments du noyau de $(\mathrm{D} - \alpha \,\mathrm{Id})^m$.
   (d) Soit $g_{\alpha,k} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x^k \mathrm{e}^{\alpha x}$. Montrer que $(g_{\alpha,k})_{0 \leqslant k < m}$ est une base de $\ker(\mathrm{D} - \alpha \,\mathrm{Id})^m$.
3. Soit un entier n non nul et soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des complexes. On note $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathrm{X}^i$ et $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions $y : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ qui sont n fois dérivables et telles que
$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0. \qquad \text{(E)}$$
   Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace de $\mathscr{E}$ et qu'une base de $\mathscr{S}$ est formée par les fonctions $g_{k,\alpha}$, où α parcourt l'ensemble des racines du polynôme P et k est un entier inférieur à la multiplicité de α comme racine de P.
4. Soit ℓ un entier et soit β un complexe. Indiquer comment trouver une solution particulière de l'équation
$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = g_{\ell,\beta}.$$

Soluce

1. (a) Si $y' = 0$, alors y est constante sur tout intervalle I. En effet, par le théorème des accroissements finis, pour a et b dans I avec $a < b$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $y(b) - y(a) = y'(c)(b - a) = 0$.
   (b) On montre par récurrence que si $y^{(m)} = 0$, alors y est sur chaque intervalle I une fonction polynomiale de degré au plus $m - 1$. On vient de traiter

le cas $m = 1$. Pour l'hérédité, on peut fixer $x_0 \in \mathrm{I}$ et écrire : $y(x) = \int_{x_0}^{x} y^{(m-1)}(x)\mathrm{d}t + y(x_0)$.

2. (a) Comme e_α ne s'annule pas et est dérivable, z est bien définie et indéfiniment dérivable. On a : $y = ze_\alpha$, d'où :

$$y' = z'e_\alpha + \alpha\, ze_\alpha = z'e_\alpha + \alpha y,$$

ce que l'on peut récrire ainsi :

$$(\mathrm{D} - \alpha\,\mathrm{Id})y = (\mathrm{D}z)e_\alpha.$$

(b) On montre par récurrence que pour m entier non nul,

$$(\mathrm{D} - \alpha\,\mathrm{Id})^m y = (\mathrm{D}^m z)e_\alpha.$$

On a vu le cas $m = 1$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $(\mathrm{D}-\alpha\,\mathrm{Id})^m y = (\mathrm{D}^m z)e_\alpha$. On applique la relation connue pour $m = 1$ à $\tilde{z} = \mathrm{D}^m z$ et $\tilde{y} = (\mathrm{D}^m z)e_\alpha = \tilde{z}e_\alpha$, il vient :

$$(\mathrm{D} - \alpha\,\mathrm{Id})^{m+1} y = (\mathrm{D} - \alpha\,\mathrm{Id})\tilde{y} = (\mathrm{D}\tilde{z})e_\alpha = \big(\mathrm{D}(\mathrm{D}^m z)\big)e_\alpha = (\mathrm{D}^{m+1} z)e_\alpha,$$

ce qui permet de conclure.

(c) Soit $y \in \mathscr{E}$ et soit $z = y/e_\alpha$. Comme e_α ne s'annule jamais, on a l'équivalence :

$$y \in \ker(\mathrm{D} - \alpha\,\mathrm{Id})^m \iff (\mathrm{D}^m z)e_\alpha = 0 \iff z \in \ker \mathrm{D}^m,$$

ce qui équivaut à dire que z est un polynôme de degré au plus $m - 1$. Autrement dit, y est le produit de e_α par un polynôme de degré au plus $m - 1$.

(d) On vient de montrer que $(g_{\alpha,k})_{0 \leqslant k < m}$ est une famille génératrice de $\ker(\mathrm{D}-\alpha\,\mathrm{Id})^m$. Comme e_α ne s'annule jamais, une relation de dépendance linéaire entre les $g_{\alpha,k}$ entraînerait une sur les monômes $g_{0,k} : x \mapsto x^k$ dont on sait [1] qu'ils sont linéairement indépendants.

3. Soit $y \in \mathscr{S}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note H_k l'assertion : « y, y',. . ., $y^{(n-1)}$ sont k fois dérivables ». Elle est vraie pour $k = 1$ par hypothèse et, comme y appartient à $\mathscr{S}$ et que par conséquent $y^{(n)}$ est une combinaison linéaire de $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, on peut en déduire que H_k implique H_{k+1}. D'où, par récurrence, le caractère indéfiniment dérivable de y. Ceci montre que $\mathscr{S} \subset \mathscr{E}$. Comme D est un endomorphisme de $\mathscr{E}$, on a :

$$\mathscr{S} = \ker \mathrm{P}(\mathrm{D}).$$

Notons $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ les racines distinctes de P et $(m_1, \ldots, m_r)$ leurs multiplicités respectives, de sorte que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \prod_{j=1}^{r} (\mathrm{X} - \alpha_j)^{m_j}.$$

1. Par exemple parce qu'un polynôme non nul a un nombre fini de racines ou grâce au déterminant de Vandermonde.

Comme les polynômes $(X-\alpha_i)^{m_j}$ sont deux à deux premiers entre eux, on a par le lemme des noyaux :

$$\mathscr{S} = \ker P(D) = \bigoplus_{j=1}^{r} \ker(D-\alpha_j \operatorname{Id})^{m_j}.$$

Autrement dit, toute solution de l'équation différentielle E s'écrit de façon unique comme somme d'éléments des $\ker(D-\alpha_j \operatorname{Id})^{m_j}$, c'est-à-dire comme combinaison linéaire des $g_{\alpha_j,k}$ où $j \in \{1,\dots,r\}$ et $k \in \{0,\dots,m_j-1\}$.
En particulier, on a la relation :

$$\dim \mathscr{S} = \sum_{j=1}^{r} m_j = n.$$

4. Soit m la multiplicité de β comme racine de P (avec $m=0$ si $P(\beta) \neq 0$). On sait que l'équation admet pour solution une combinaison linéaire des $g_{k,\beta}$ avec $0 \leqslant k \leqslant \ell + m$.

Exercice 70 (Équation de Hill-Mathieu)
On s'intéresse ici au caractère borné des solutions de l'équation

$$y'' + q(t)y = 0, \tag{E}$$

où q est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, π-périodique, et paire.

On note (y_1, y_2) la base de l'espace des solutions de (E) associées aux conditions initiales

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, & y_1'(0) = 0 \\ y_2(0) = 0, & y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

On note $W \subset \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des solutions complexes de (E). On considère l'application

$$A : \begin{array}{ll} W & \to W \\ y & \mapsto y(\cdot + \pi) \end{array}$$

Dans la base (y_1, y_2), l'application A sera notée $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, et on nomme T la trace de A.

1. (a) Justifier l'existence de la base (y_1, y_2) telle que décrite dans l'énoncé.
   (b) Montrer que A est bien définie, et que sa matrice dans la base (y_1, y_2) s'écrit
   $$\begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$
2. Montrer les assertions suivantes :
   (i) y_1 est paire ;
   (ii) y_2 est impaire ;
   (iii) $\det(A) = 1$;

(iv) $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$ (*ie* $a = d$).

3. On va maintenant pouvoir s'intéresser au caractère borné des solutions de (E), comme annoncé. On va voir que cela dépend de la valeur de la trace T. Montrer que :
   (i) si $|\mathrm{T}| < 2$, alors toutes les solutions de (E) sont bornées ;
   (ii) on a l'équivalence $|\mathrm{T}| = 2 \iff bc = 0$;
   (iii) si $|\mathrm{T}| = 2$, alors (E) possède une solution non nulle bornée ;
   (iv) si $|\mathrm{T}| > 2$, alors toutes les solutions non nulles de (E) sont non bornées.

Soluce

1. (a) L'existence d'une telle base repose essentiellement sur le thèorème de Cauchy-Lipschitz. On considère le problème de Cauchy suivant [2] :

$$\begin{cases} y'' & = -q(t)y \\ y(0) & = 0 \\ y'(0) & = 1 \end{cases}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème admet une et une seule solution maximale. En d'autres termes, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{W} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \big(x(0), x'(0)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme de l'ensemble des solutions W vers $\mathbb{R}^2$. On en déduit que l'image réciproque d'une base de $\mathbb{R}^2$ est une base de W. L'existence de y_1 et de y_2 est alors assurée : y_1, resp. y_2, est l'image réciproque de l'élément $(0,1)$, resp. $(0,1)$, de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(b) Pour montrer que A est bien définie, il suffit de se rappeler que q est une fonction π-périodique ; donc, si y est dans l'ensemble des solutions, la fonction $y(\cdot + \pi)$ l'est également.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$y_1(x+\pi) = \mathrm{A}y_1(x) = ay_1(x) + by_2(x),$$

qui donne en dérivant

$$y_1'(x+\pi) = ay_1'(x) + by_2'(x).$$

Il n'y a plus qu'à évaluer ces deux égalités en 0, puis en 1, pour trouver

$$\begin{array}{ll} a & = y_1(\pi) \\ b & = y_1'(\pi) \end{array}$$

On remplace enfin y_1 par y_2, et on trouve les expression souhaitées pour c et d.

2. En fait, on aurait pu prendre le problème de Cauchy avec des conditions initiales quelconques, pas forcément $(0,1)$; ce qui importe, c'est d'obtenir l'isomorphisme qui suit, entre W et $\mathbb{R}^2$.

2. (i) On considère la fonction $z(x) = y_1(-x)$. Comme la fonction q a été supposée paire, et que la fonction y_1 vérifie l'équation (E), en dérivant deux fois, on obtient :

$$z''(x) + q(x)z(x) = y_1''(-x) + q(-x)y_1(-x) = 0.$$

De plus, $z(0) = y_1(0) = 1$, et $z'(0) = -y_1'(0) = 0$. Ainsi, la fonction z vérifie le même problème de Cauchy que la fonction y_1 ; par unicité de la solution dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient $z = y_1$; autrement dit : y_1 est une fonction paire.

(ii) On raisonne de façon similaire que dans le (i), avec cette fois $z(x) = -y_2(-x)$.

(iii) On pose $w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$. On dérive w : pour x réel, on a

$$w'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x) = -q(x)y_1(x)y_2(x) + q(x)y_1(x)y_2(x) = 0.$$

Ainsi, w est constante, égale à $w(0) = 1$. On obtient finalement :

$$\det(\mathrm{A}) = w(\pi) = w(0) = 1.$$

(iv) On étudie la réciproque de A, qui à y associe $y(\cdot - \pi)$. Une rapide étude nous donne l'expression de sa matrice dans la base (y_1, y_2) :

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct de A^{-1} donne :

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

qui nous donne l'égalité $a = d$, comme voulu.

3. (i) On invoque le théorème de Cayley-Hamilton :

$$0 = \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^2 - (\mathrm{tr}(\mathrm{A}))\mathrm{A} + \det(\mathrm{A})\,\mathrm{Id} = \mathrm{A}^2 - \mathrm{T.A} + \mathrm{Id}\,.$$

Ainsi, si le module de T est strictement inférieur à 2, le discriminant de χ_{A} est strictement négatif, ce qui implique que χ_{A} a deux racines complexes distinctes, conjuguées, ρ et $\bar{\rho}$; et ces racines sont de module 1, car $|\rho|^2 = \rho\bar{\rho} = \det(\mathrm{A}) = 1$, d'après la question 2 (iii).

Soit alors (u_1, u_2) une base de W formée de vecteurs propres de A, respectivement associés à ρ et à $\bar{\rho}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}u_1(x) &= u_1(x+\pi) &= \rho u_1(x) \\ \mathrm{A}u_2(x) &= u_2(x+\pi) &= \bar{\rho} u_2(x) \end{aligned}$$

Cela implique que, pour $j = 1, 2$, $u_j(\cdot + \pi)$ et u_j sont de même module ; comme u_1 et u_2 sont continues et π-périodique (car appartenant à l'ensemble W), on obtient que u_1 et u_2 sont bornées. Tout élément de W s'écrivant comme combinaison linéaire de u_1 et u_2, toute solution de (E) est ainsi bornée.

(ii) Dans le sens direct, si on suppose que $T = \pm 2$, on en déduit, grâce à la question 2 (iv) :

$$a + d = \pm 2 \Rightarrow a = d = \pm 1 \Rightarrow 1 = \det(A) = ad - bc = 1 - bc \Rightarrow bc = 0.$$

Réciproquement, si $bc = 0$, alors,

$$1 = \det(A) = ad = a^2 \Rightarrow a = d = \pm 1 \Rightarrow T = \pm 2.$$

(iii) On raisonne comme dans le (i) : si $|T| = 2$, c'est-à-dire $T = \pm 2$, alors, le discriminant est nul, ce qui nous permet d'exhiber une solution, u, non nulle, telle que $u(x+\pi) = \pm u(x)$, et comme dans le (i), on en déduit que cette solution u est bornée.

(iv) Si $|T| > 2$, alors de même, le discriminant du polynôme caractéristique de A est strictement positif, ce qui permet d'obtenir deux valeurs propres pour A, ρ et ρ^{-1}, où $\rho \in \mathbb{R}$, de module strictement supérieur à 1. On note u_1 et u_2 les deux vecteurs propres associés aux valeurs propres ρ et ρ^{-1} ; notons que (u_1, u_2) forme une base de W.

Soit y une solution non nulle de (E) ; alors y s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 ; notons α et β tels que $y = \alpha u_1 + \beta u_2$. Si α est non nul, alors, soit x tel que $u_1(x) \neq 0$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n(x) = y(x + n\pi) = \alpha\rho^n u_1(x) + \beta\rho^{-n} u_2(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\rho^n u_1(x),$$

et comme le module de ρ est strictement supérieur à 1, cela implique que y est non bornée.

De même, si $\beta \neq 0$, on obtient, pour x tel que $u_2(x) \neq 0$,

$$A^n(x) = y(x + n\pi) \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta\rho^{-n} u_2(x),$$

et donc, ici encore, y est non bornée. L'assertion est démontrée.

10.2 Fonctions de Bessel

Exercice 71 (Fonctions de Bessel : définition des fonctions J_k)
Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Le but de cet exercice est d'étudier des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \mu)y = 0 \qquad (E_\mu)$$

dit *équation de Bessel* possède une solution développable en série entière au voisinage de 0.

1. Études d'abord les conditions nécessaires à l'existence d'une telle fonction. On fixe dans la suite $\mu \in \mathbb{C}$.
   (a) En supposant y développable en série entière et solution de (E_μ), déterminer une relation entre les coefficients de la série.

(b) Supposons dans cette question que μ n'est pas le carré d'un entier. En déduire que l'équation (E_μ) n'admet pas de solution développable en série entière non nulle.

(c) *A contrario*, si μ est le carré d'un entier, montrer que l'éventuelle solution y a les propriétés suivantes :

(i) la parité de y est celle de k ;

(ii) tous les coefficients de la série d'indice strictement inférieur à k sont nuls ;

(iii) les coefficients restants satisfont à la relation de récurrence

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad a_{k+2\ell} = \frac{(-1)^\ell}{\prod_{m=1}^{\ell}\big((k+2m)^2-\mu\big)} a_k. \tag{♣}$$

2. Inversement, montrer qu'une fonction définie par les relations des questions précédentes possède un rayon de convergence infini et est solution de l'équation (E_{k^2}).

3. Donner une expression de l'unique solution J_k de (E_{k^2}) développable en série entière telle que $\mathrm{J}_k(x) \sim x^k/(2^k\, k!)$ au voisinage de 0.

Soluce

1. (a) Soit donc $y : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur un intervalle non vide de type $\mathrm{I} :=]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, où $\mathrm{R} \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $x \in \mathrm{I}$, on obtient classiquement :

$$y'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}, \quad xy'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^n,$$
$$y''(x) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-2}, \quad x^2y''(x) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} n(n-1)a_n x^n.$$

Pour que toutes les sommes partent du même indice, on pose de plus

$$a_{-2} = a_{-1} = 0.$$

On obtient alors

$$x^2 y(x) = \sum_{n\geqslant 2} a_n x^{n+2} = \sum_{n\geqslant 0} a_{n-2} x^n.$$

Ainsi, y est solution de (E_μ) sur I si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \sum_{n\geqslant 0} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^n + \sum_{n\geqslant 0} a_{n-2}x^n + \sum_{n\geqslant 0} -\mu a_n x^n = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \sum_{n\geqslant 0}\big((n^2-\mu)a_n + a_{n-2}\big)x^n = 0.$$

Comme le développement en série entière de y est unique, si elle est solution de l'équation (E_μ), alors nécessairement

$$\forall n \geqslant 0, \quad (n^2-\mu)a_n = -a_{n-2}, \tag{♠}$$

où, rappelons-nous, a_{-2} et a_{-1} ont tous deux été définis comme étant nuls.

(b) Dire que μ n'est pas le carré d'un entier c'est dire que $n^2 - \mu \neq 0$ pour tout entier n. Pour $n = 0$, on a fixé $a_{-2} = a_{-1} = 0$; par une récurrence immédiate fondée sur la relation obtenue à la question 1a, cela implique que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = 0.$$

Autrement dit, si μ n'est pas le carré d'un entier, la fonction nulle est la seule solution développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation (E_μ).

(c) Soit k un entier naturel et soit $\mu = k^2$. Soit y une solution de (E_{k^2}) développable en série entière au voisinage de 0.

(i) Étudions la parité de la fonction y. Remarquons que pour tout $n \neq k$, on a $n^2-\mu \neq 0$. C'est le cas de tous les entiers de la forme $n = q+2\ell$, où $q \in \{-1,-2\}$ est l'entier qui n'a pas la même parité que k et ℓ est un entier quelconque. Par récurrence sur ℓ, on déduit de la relation $(\spadesuit)$ que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $a_{q+2\ell} = 0$. Ainsi, si k est pair, alors $q = -1$, et tous les coefficients d'indice impair de la série y s'annulent ; la fonction y est donc paire. De même, si k est impair, alors la fonction y est impaire.

(ii) On applique la relation $(\spadesuit)$ à $n = k$; on obtient alors $a_{k-2} = 0$. De même, en prenant cette fois $n = k-2$, on obtient $a_{k-4} = 0$, et ainsi de suite par récurrence. Suivant la parité de k, on en déduit bien que tous les coefficients d'indice $n < k$ sont nuls.

(iii) Calculons les coefficients $a_{k+2\ell}$ ($\ell \in \mathbb{N}$). Pour $\ell = 0$, rien à démontrer, et pour $\ell = 1$, c'est exactement la relation $(\spadesuit)$ de la question 1a. Soit ℓ un entier, supposons connaître $a_{k+2\ell}$. Par hypothèse de récurrence, on a (en prenant $n = k + 2\ell + 2$) :

$$\begin{aligned} a_{k+2(\ell+1)} = a_{k+2\ell+2} &= -\frac{1}{(k+2\ell+2)^2 - \mu} a_{k+2\ell} \\ &= -\frac{1}{(k+2\ell+2)^2 - \mu} \times \frac{(-1)^\ell}{\prod_{m=1}^{\ell}\big((k+2m)^2 - \mu\big)} a_k, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité.

Cette relation exprime que l'ensemble des solutions de l'équation (E_{k^2}) développables en série entière au voisinage de 0 est au plus une droite vectorielle, puisque toute solution éventuelle est multiple de la solution caractérisée par la condition $a_k = 1$.

2. On suppose toujours que $\mu = k^2$ pour un entier k et on considère la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ définie par

$$\begin{cases} a_k \in \mathbb{R} & \text{(fixé) ;} \\ a_n = 0 & \text{si } n < k \text{ ou si } n \not\equiv k\ [2] \text{ ;} \\ a_{k+2\ell} = \dfrac{(-1)^\ell}{\prod_{m=1}^{\ell}\big((k+2m)^2 - \mu\big)} a_k & \text{pour } \ell \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert assure que le rayon de convergence de la série est infini puisque pour $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{k+2(\ell+1)}}{a_{k+2\ell}} = \frac{1}{\big(k+2(\ell+1)\big)^2 - \mu} \underset{\ell\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, par construction, une telle série entière vérifie bien l'équation (E_{k^2}).

3. On a, les lettres étant quelconques :

$$(k+2m)^2 - k^2 = (k+2m-k)(k+2m+k) = 4m(m+k),$$

ce qui donne pour nos solutions :

$$y(x) = \sum_{\ell\geqslant 0} \frac{(-1)^\ell x^{k+2\ell}}{\prod_{m=1}^{\ell} 4m(m+k)} a_k = \sum_{\ell\geqslant 0} \frac{(-1)^\ell x^{k+2\ell}}{2^{2\ell}\ell!} \times \frac{k!}{(k+\ell)!} a_k = 2^k k!\, a_k \sum_{\ell\geqslant 0} \frac{(-1)^\ell}{\ell!(k+\ell)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\ell}.$$

L'unique valeur de a_k pour laquelle $y(x) \sim x^k/(2^k\, k!)$ en 0 est $a_k = 1/(2^k\, k!)$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_k(x) = \sum_{\ell\geqslant 0} \frac{(-1)^\ell}{\ell!(k+\ell)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\ell}.$$

Remarque. Pour k complexe quelconque, on peut grâce à la fonction gamma définir la fonction de Bessel J_k sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{J}_k(x) = \sum_{\ell\geqslant 0} \frac{(-1)^\ell}{\ell!\Gamma(k+\ell+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\ell}.$$

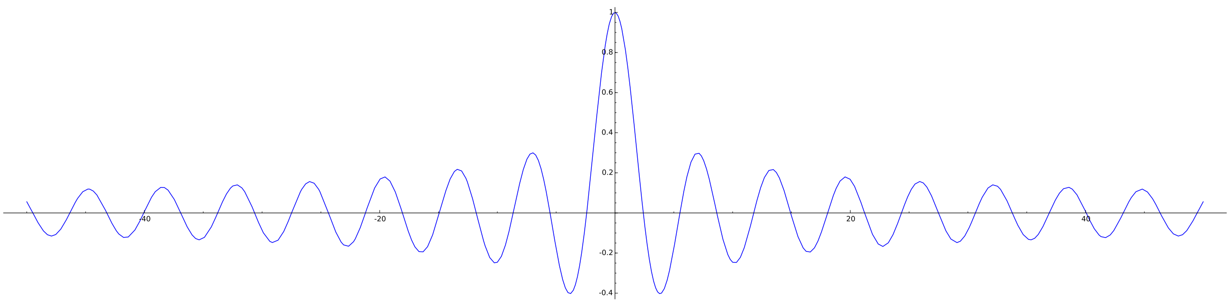


FIGURE 10.1 – Fonction J_0 de Bessel

Exercice 72 (Fonctions de Bessel : expression intégrale)
Pour k entier naturel et x réel, on pose :

$$\mathrm{J}_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(kt - x\sin t)\mathrm{d}t.$$

1. (a) Justifier la dérivation sous le signe intégrale et donner une expression de J_k' et J_k''.

(b) Démontrer que J_k est solution de l'équation de Bessel (E_{k^2}) de l'exercice 71.
On pourra récrire $k^2\mathrm{J}_k(x)-x^2\big(\mathrm{J}_k(x)+\mathrm{J}_k''(x)\big)$ sous une forme qui permet une intégration par parties.

2. (a) Calculer, pour k et n entiers naturels,

$$\gamma_{k,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-ikt}\sin^n t\mathrm{d}t.$$

(b) Démontrer que J_k admet un développement en série entière et que c'est bien la fonction définie à l'exercice 71.

Soluce

1. (a) Soit $f:\mathbb{R}\times[0,\pi]$, $(x,t)\mapsto\cos(kt-x\sin t)$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc toutes ses dérivées sont bornées sur les compacts de la forme $[-\mathrm{X},\mathrm{X}]\times[0,2\pi]$ pour tout X réel positif. Une application routinière du théorème de dérivation sous le signe intégrale donne (en commençant sur $[-\mathrm{X},\mathrm{X}]$ pour majorer les dérivées partielles uniformément puis en étendant le résultat à $\mathbb{R}$), pour x réel quelconque :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_k(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(kt-x\sin t)\mathrm{d}t\ ;\\ \mathrm{J}_k'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\sin(kt-x\sin t)\mathrm{d}t\ ;\\ \mathrm{J}_k''(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin^2(t)\cos(kt-x\sin t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Fixons x. On regroupe ensemble les termes de l'équation (E_k) qui se ressemblent, le critère étant ici que la fonction de $(kt-x\sin t)$ est la même. Cela conduit à considérer :

$$x^2\big(\mathrm{J}_k(x)+\mathrm{J}_k''(x)\big) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos^2(t)\cos(kt-x\sin t)\mathrm{d}t,$$

puis, en factorisant $k^2-x^2\cos^2 t$:

$$k^2\mathrm{J}_k(x)-x^2\big(\mathrm{J}_k(x)+\mathrm{J}_k''(x)\big) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (k+x\cos t)(k-x\cos t)\cos(kt-x\sin t)\mathrm{d}t,$$

On reconnaît dans les deux derniers facteurs la dérivée de $v:t\mapsto\sin(kt-x\sin t)$. On fait une intégration par parties en posant $u:t\mapsto k+x\cos t$ et v comme ci-dessus. Le terme intégré est miraculeusement nul :

$$\begin{aligned}x^2\big(\mathrm{J}_k(x)+\mathrm{J}_k''(x)\big) &= \Big[(k+x\cos t)\sin(kt-x\sin t)\Big]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -x\sin t\sin(kt-x\sin t)\mathrm{d}t\\ &= x\mathrm{J}_k'(x).\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction J_k définie par l'intégrale est bien solution de (E_k).

2. (a) La question revient à calculer les coefficients de Fourier complexes de $t \mapsto \sin^n t$. Il est donc commode d'exprimer cette fonction comme somme d'exponentielles, d'où l'idée de développer pour t réel :

$$\sin^n t = \left(\frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}\right)^n = \frac{1}{2^n i^n} \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \binom{n}{q} \mathrm{e}^{i(n-2q)t}.$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g$ le produit scalaire hermitien habituel sur les fonctions continues 2π-périodiques et $\mathbf{e}_p : t \mapsto \mathrm{e}^{ipt}$ pour p entier, on a donc :

$$\gamma_{k,n} = \left\langle \mathbf{e}_k, \frac{1}{2^n i^n} \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \binom{n}{q} \mathbf{e}_{n-2q} \right\rangle.$$

Or la famille $(\mathbf{e}_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. Par suite, si $k \not\equiv n \mod 2$ ou si $n < k$, alors $k \neq n - 2q$ pour tout $q \in \{0, \dots, n\}$, donc $\gamma_{k,n} = 0$. De plus, si n est de la forme $k + 2q$ avec q entier naturel, alors

$$\gamma_{k,k+2q} = \frac{(-1)^q}{2^{k+2q} i^{k+2q}} \binom{k+2q}{q} = \frac{1}{2^{k+2q} i^k} \binom{k+2q}{q}.$$

(b) Pour faire apparaître des coefficients de Fourier, on remplace l'intégrale sur $[0, \pi]$ par une intégrale sur $[-\pi, \pi]$ en exploitant la parité de la fonction intégrée. Puis on écrit, pour x réel fixé :

$$\mathrm{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(x \sin t) \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin(x \sin t) \mathrm{d}t.$$

On développe pour t réel le cosinus et le sinus qui dépendent de x :

$$\cos(x \sin t) = \sum_{p \geqslant 0} \sin^{2p}(t) \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad \sin(x \sin t) = \sum_{p \geqslant 0} \sin^{2p+1}(t) \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Répétons que x est fixé. Soient, pour p entier et t réel,

$$u_p(t) = \cos(kt) \sin^{2p}(t) \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p!)} \quad \text{et} \quad v_p(t) = \sin(kt) \sin^{2p+1}(t) \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Chacune des fonctions u_p et v_p ($p \in \mathbb{N}$) est continue sur $[-\pi, \pi]$ et

$$|u_p(t)| \leqslant \frac{|x|^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad |v_p(t)| \leqslant \frac{|x|^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

pour tout p et tout t et les séries $\sum |x|^{2p}/(2p)!$ et $\sum |x|^{2p+1}/(2p+1)!$ convergent, de sorte que les séries de fonctions $\sum u_p$ et $\sum v_p$ convergent normalement sur $[-\pi, \pi]$ (le membre de droite est indépendant de t). Comme l'intervalle d'intégration est compact, on peut permuter somme et intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_k(x) &= \sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \sin^{2p}(t) \mathrm{d}t \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + \\
&\qquad \sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin^{2p+1}(t) \mathrm{d}t \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\
&= \sum_{p \geqslant 0} \mathrm{Re}(\gamma_{k,2p}) \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} - \sum_{p \geqslant 0} \mathrm{Im}(\gamma_{k,2p+1}) \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}.
\end{aligned}$$

Si k est pair, disons $k = 2k'$, tous les $\gamma_{k,2p+1}$ sont nuls et $\gamma_{k,2p}$ est nul si $2p < k$. Il ne reste plus que les termes de la somme paire de la forme $2p = k + 2q$ ($q \in \mathbb{N}$) :

$$\mathrm{J}_k(x) = \sum_{q \geqslant 0} \frac{1}{2^{k+2q} i^k} \binom{k+2q}{q} \frac{(-1)^{k'+q} x^{k+2q}}{(k+2q)!} = \sum_{q \geqslant 0} \frac{(-1)^q}{q!(k+q)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{k+2q}.$$

Si k est impair, disons $k = 2k' + 1$, tous les $\gamma_{k,2p}$ sont nuls et $\gamma_{k,2p+1}$ est nul si $2p + 1 < k$. Il ne reste plus que les termes de la somme impaire de la forme $2p + 1 = k + 2q$ ($q \in \mathbb{N}$). Les signes sont pénibles à suivre : $p = k' + q$, $1/i^k = (-1)^{k'}/i = -(-1)^{k'} i$, d'où :

$$\mathrm{J}_k(x) = -\operatorname{Im} \sum_{q \geqslant 0} \frac{1}{2^{k+2q} i^k} \binom{k+2q}{q} \frac{(-1)^{k'+q} x^{k+2q}}{(k+2q)!} = \sum_{q \geqslant 0} \frac{(-1)^q}{q!(k+q)!} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{k+2q}.$$

On retrouve ainsi, indépendamment de la parité de k, le développement en série entière de l'exercice 71.

Exercice 73 (Développement asymptotique des fonctions de Bessel)

1. (a) Vérifier que pour tout x réel, $\mathrm{J}_k(x)$ est la partie réelle de

$$\mathrm{H}_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{ikt - ix\sin t} \mathrm{d}t.$$

   (b) Démontrer que

$$\mathrm{H}_k(x) = \frac{2}{\pi} \mathrm{e}^{-ix + ik\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(ku) \mathrm{e}^{ix(1-\cos u)} \mathrm{d}u.$$

   (c) Justifier que l'égalité $1 - \cos u = v^2/2$ définit un changement de variable classe $\mathscr{C}^2$. L'effectuer pour démontrer que

$$\mathrm{H}_k(x) = \frac{2}{\pi} \mathrm{e}^{-ix + ik\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} g(v)\, \mathrm{e}^{ixv^2/2}\, \mathrm{d}v,$$

   pour tout x réel, où g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\big[0, \sqrt{2}\big]$ que l'on précisera.

2. (a) Vérifier que la fonction $h : v \mapsto \big(g(v) - g(0)\big)/v$ est de classe $\mathscr{C}^1$. En déduire par une intégration par parties que

$$\int_0^{\sqrt{2}} g(v) \mathrm{e}^{ixv^2/2} \mathrm{d}v - g(0) \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{ixv^2/2} = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

   où la constante dans le « O » dépend de g.

   (b) Grâce à l'exercice 47, en déduire que lorsque x tend vers l'infini :

$$\mathrm{J}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\Big(x - k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + o\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big).$$

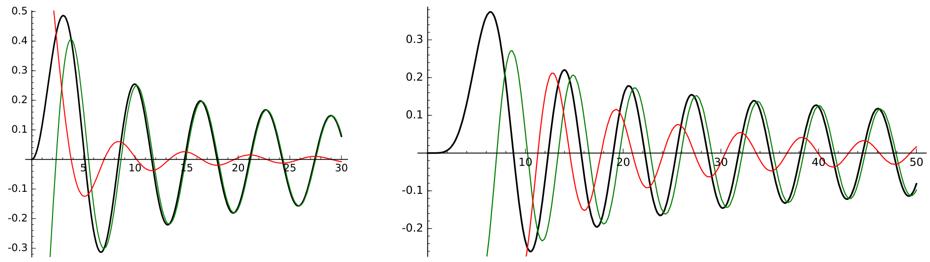


FIGURE 10.2 – Fonctions de Bessel J_2 et J_5, leur développement asymptotique et la différence

Remarque. Ce développement asymptotique n'est pas un équivalent car $J_k(x)$ et $\cos\left(x - k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ne s'annulent pas aux mêmes points : le quotient n'est pas défini, *a fortiori* il ne tend pas vers 1. Les courbes de J_2 et J_5 et celles du premier terme de leur développement asymptotique sont représentées sur la figure 10.2.

C'est un cas particulier de la *méthode de la phase stationnaire*, analogue de la méthode de Laplace employée pour la formule de Stirling dans l'exercice 59. Dans une intégrale $\int_I f(t)e^{ix\phi(t)}$, seules comptent les zones où la phase ϕ est « presque constante », c'est-à-dire le voisinage des points critiques. Ici, il y en a un seul, le changement de variable $u = t - \pi/2$ le ramène en 0. Au voisinage de 0, on a : $1 - \cos u \sim u^2/2$. Le choix de v transforme cet équivalent en égalité : $1 - \cos u = v^2/2$. Cela ramène à une intégrale $\int_J g(v)e^{ixv^2/2}dv$, où seul compte le voisinage de 0.

Soluce

1. Soit x réel.
   (a) L'intégrale de la partie réelle (de $e^{ikt - ix\sin t}$) est la partie réelle de l'intégrale. D'où :
   $$J_k(x) = \operatorname{Re} H_k(x) \quad \text{où} \quad H_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ikt - ix\sin t}dt.$$
   (b) On fait le changement de variable $t = u + \pi/2$ (noter que $-\sin t = -\sin(u + \pi/2) = -\cos u$) et on décale la phase $-ix\cos u$ d'une constante pour que son maximum soit nul :
   $$H_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{iku + ik\pi/2}e^{-ix\cos u}du = \frac{1}{\pi}e^{-ix + ik\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{iku}e^{ix(1-\cos u)}du.$$
   On coupe l'intégrale et on la replie comme une omelette (en posant $v = -u$ puis $u = v$) :
   $$\begin{aligned} H_k(x) &= \frac{1}{\pi}e^{-ix+ik\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2} e^{iku}e^{ix(1-\cos u)}du + \int_0^{\pi/2} e^{-iku}e^{ix(1-\cos u)}du\right) \\ &= \frac{2}{\pi}e^{-ix+ik\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos(ku)e^{ix(1-\cos u)}du. \end{aligned}$$
   (c) Pour justifier que le changement de variable est licite, on pose pour $u \in [0, \pi/2]$
   $$\varphi(u) = \sqrt{2(1 - \cos u)}.$$

Notons qu'au voisinage de 0^+, on a : $\varphi(u)^2 \sim u^2$ donc $\varphi(u)^2/u^2$ tend vers 1 ; comme $\varphi(u) > 0$ et $u > 0$, cela entraîne : $\varphi(u) \sim u$ (diviser $\varphi(u)^2/u^2 - 1$ par $\varphi(u)/u + 1$).
La fonction φ est strictement croissante, continue sur $[0, \pi/2]$ et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ car $2(1 - \cos u) \neq 0$ sur cet intervalle. On a pour $u \in]0, \pi/2]$:

$$\varphi'(u) = \frac{2\sin u}{2\varphi(u)} \quad \text{d'où } \lim_{u\to 0} \varphi'(u) = 1.$$

Par le théorème[3] dit de la limite de la dérivée, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective. De plus, sa dérivée est partout non nulle donc c'est un difféomorphisme.
On a pour tout $u \in]0, \pi/2]$ et $v = \varphi(u)$:

$$\varphi'(u) = \frac{\sqrt{1-\cos^2 u}}{\varphi(u)} = \frac{\sqrt{(1-\cos u)(1+\cos u)}}{\varphi(u)} = \frac{\sqrt{\frac{v^2}{2}\left(2 - \frac{v^2}{2}\right)}}{v} = \frac{\sqrt{4-v^2}}{2}.$$

On en déduit que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ puisque $4 - \varphi^2$ ne s'annule pas sur $[0, \pi/2]$.
Le changement de variable donne :

$$\int_0^{\pi/2} \cos(ku)\mathrm{e}^{ix(1-\cos u)}\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{2}} \cos\left(k \arccos\left(1 - \frac{v^2}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{ixv^2/2}\frac{2}{\sqrt{4-v^2}}\mathrm{d}v.$$

Cela donne l'expression souhaitée avec, pour $v \in \left[0, \sqrt{2}\right]$:

$$g(v) = \cos\left(k \arccos\left(1 - \frac{v^2}{2}\right)\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{4-v^2}}.$$

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ car le facteur qui contient l'arccosinus n'est autre que la composée de φ^{-1} (qui est bien de classe $\mathscr{C}^2$ car φ l'est et φ' ne s'annule pas) avec $u \mapsto \cos(ku)$ et l'autre facteur est sans problème sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$.

2. On peut par exemple écrire, en faisant dans l'égalité $g(v) - g(0) = \int_0^v g'(u)\mathrm{d}u$ le changement $u = tv$ (avec v fixé), que $h(v) = h(0) + \int_0^1 g'(tv)\mathrm{d}t$, puis appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Il vient : $h'(v) = \int_0^1 tg''(tv)\mathrm{d}t$ pour tout $v \in \left[0, \sqrt{2}\right]$.
Une intégration par parties donne alors, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} g(v)\mathrm{e}^{ixv^2/2}\mathrm{d}v - g(0)\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{ixv^2/2}\mathrm{d}v &= \frac{1}{ix}\int_0^{\sqrt{2}} h(v)\cdot ixv\,\mathrm{e}^{ixv^2/2}\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{ix}\left[h(v)\mathrm{e}^{ixv^2/2}\right]_0^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ix}\int_0^{\sqrt{2}} h'(v)\mathrm{e}^{ixv^2/2}\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^{\sqrt{2}} g(v)\mathrm{e}^{ixv^2/2}\mathrm{d}v - g(0)\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{ixv^2/2}\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(\left|h(\sqrt{2})\right| + \left|h(0)\right| + \int_0^{\sqrt{2}}\left|h(t)\right|\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi, la différence est bien un $\mathrm{O}(1/x)$.

3. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sauf peut-être en a. Si φ est continue en a et si φ' admet une limite ℓ en a, alors φ est dérivable en a et $\varphi'(a) = \ell$. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis, que l'on applique sur $[a, x]$ avant de faire tendre x vers a.

3. Notons que $g(0) = 1$. Le changement de variable $t = v\sqrt{x/2}$ (avec $x > 0$ fixé) donne :
$$\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{ixv^2/2} \mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{it^2} \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{2}{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2} \mathrm{d}t.$$
En effet, l'intégrale de Fresnel n'est pas nulle et, d'après l'exercice 47, elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$.
Au voisinage de l'infini, on a donc en recollant les morceaux :
$$\mathrm{H}_k(x) \sim \frac{2}{\pi} \mathrm{e}^{-ix+ik\pi/2} \sqrt{\frac{2}{x}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{e}^{i\pi/4} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \mathrm{e}^{i\left(-x+k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)},$$
En notant $\mathrm{E}(x)$ cet équivalent, cela signifie que $\left|\mathrm{H}_k(x) - \mathrm{E}(x)\right|$ est négligeable devant $\left|\mathrm{E}(x)\right|$. Comme la partie réelle de la différence est plus petite que son module, cela donne :
$$\mathrm{J}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Cadre
L'équation (E_0) admet un point singulier en 0 : on ne peut pas la mettre sous forme normale $y'' = f(x, y, y')$ au voisinage de $x = 0$ à cause du coefficient x^2. Elle admet toutefois une solution définie sur $\mathbb{R}$, c'est la fonction de Bessel J_0 définie dans l'exercice 71.

On a montré que J_0 est la seule solution de (E_0) développable en série entière sur un voisinage de 0. On va montrer que c'est la seule solution *définie* et deux fois dérivable sur un voisinage de 0. Plus précisément, on va montrer que toute solution définie sur un intervalle de la forme $]0, a[$ avec $a > 0$ et non proportionnelle à J_0 explose en 0.

Rappel (wronskien). *Soit* I *un intervalle et soit* $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *une fonction matricielle continue. Soient deux fonctions dérivables* $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ *solutions de* $\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}$. *Leur* wronskien *est la fonction*[4] $\mathrm{W} = \det(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2) : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. *C'est une solution de l'équation*
$$\mathrm{W}' - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\mathrm{W} = 0.$$
Il est de la forme $\mathrm{W}(x) = \mathrm{C} \exp \alpha(x)$, *où* C *est une constante et* α *est une primitive de* $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$. *En particulier, il est partout nul ou partout non nul*[5].

Une équation scalaire d'ordre deux, disons $y'' + by' + cy = 0$ *avec* $b, c : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, *se ramène à un système d'ordre deux :*
$$\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}, \quad \text{où } \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}.$$
Le wronskien de deux solutions y_1 *et* y_2, *défini comme* $\mathrm{W} = y_1 y_2' - y_1' y_2$, *est solution de* $\mathrm{W}' = -b\mathrm{W}$.

4. Le déterminant est relatif à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
5. Les solutions sont donc partout indépendantes ou liées pour la vie.

Exercice 74 (Équation de Bessel : unicité de solution prolongeable en 0) On s'intéresse au comportement au voisinage de 0 d'une solution y définie sur un intervalle de la forme $]0, a[$ (avec $a \in]0, +\infty]$) de l'équation E_0 :

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \tag{E_0}$$

1. Calculer le wronskien de J_0 et y.
2. Résoudre l'équation $\mathrm{J}_0 y' - \mathrm{J}_0' y = \mathrm{W}$ sur un intervalle où J_0 ne s'annule pas.
3. Montrer que si y n'est pas proportionnelle à J_0, alors $\lim_{x \to 0^+} |y(x)| = +\infty$ (« y explose »).

Soluce

1. Sur l'intervalle $]0, a[$, l'équation (E_0) se met sous forme normale
$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0.$$
D'après le rappel, le wronskien $\mathrm{W} = \mathrm{J}_0 y' - \mathrm{J}_0' y$ des deux solutions J_0 et y est solution de l'équation $\mathrm{W}'(x) = -\mathrm{W}(x)/x$, si bien qu'il est de la forme
$$\mathrm{W}(x) = \mathrm{C} \mathrm{e}^{-\ln x} = \frac{\mathrm{C}}{x}$$
(où x décrit $]0, a[$) pour une constante C fixée.
2. Comme on s'intéresse au comportement en 0, on se restreint à un intervalle $\mathrm{I}' =]0, a'[$ inclus dans $]0, a[$ sur lequel J_0 ne s'annule pas, ce qui existe, car $\mathrm{J}_0(0) = 1$ (voir l'exercice 71). On va donner une expression de y à partir de l'équation du premier ordre $\mathrm{J}_0 y' - \mathrm{J}_0' y = \mathrm{W}$. L'équation homogène associée admet pour solutions évidentes les fonctions de la forme $z\mathrm{J}_0$, avec $z \in \mathbb{R}$ constante ; par la méthode de la variation de la constante, on cherche donc une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $x \mapsto z(x)\mathrm{J}_0(x)$.
Plus formellement, posons $z = y/\mathrm{J}_0$. Comme y est solution de $\mathrm{J}_0 y' - \mathrm{J}_0' y = \mathrm{W}$, on a : $\mathrm{J}_0(z\mathrm{J}_0)' - \mathrm{J}_0'(z\mathrm{J}_0) = \mathrm{W}$, c'est-à-dire : $z'\mathrm{J}_0^2 + z\mathrm{J}_0'\mathrm{J}_0 - z\mathrm{J}_0'\mathrm{J}_0 = \mathrm{W}$; par la question précédente, il existe une constante C telle que
$$\forall x \in \mathrm{I}', \quad z'(x)\mathrm{J}_0^2(x) = \frac{\mathrm{C}}{x}.$$
Fixons $\alpha \in \mathrm{I}'$. Il existe donc une constante D telle que pour $x \in \mathrm{I}'$:
$$y(x) = \mathrm{J}_0(x) \int_\alpha^x \frac{\mathrm{C}}{t\,\mathrm{J}_0(t)^2} \mathrm{d}t + \mathrm{D}\mathrm{J}_0(x).$$
3. Il y a deux cas selon la valeur de C. La constante C est nulle si et seulement si z est constante, c'est-à-dire si y est proportionnelle à J_0.
Si C n'est pas nul, on a au voisinage de zéro : $z'(x) \sim \mathrm{C}/x$ (rappelons que $\mathrm{J}_0(0) = 1$). Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge, ceci donne par intégration un

équivalent des parties principales [6] : pour un point α de I' quelconque, on obtient lorsque x tend vers 0 :

$$\big(z(x) - z(\alpha)\big) \sim \mathrm{C}\big(\ln(x) - \ln(\alpha)\big) \sim \mathrm{C}\ln x.$$

Cela montre que $z(x) \sim \mathrm{C}\ln x$, et donc, que $z(x)$ diverge vers l'infini lorsque x tend vers 0.

Ainsi, les seules solutions de l'équation (E_0) qui ne divergent pas sont les multiples de J_0.

Exercice 75 (Entrelacement des zéros des fonctions de Bessel)
On pose

$$\mathrm{J}_1 = -\mathrm{J}_0'.$$

Nous allons étudier le lien entre cette fonction et les zéros de J_0. Mais avant, un petit résultat préliminaire.

1. **(Préliminaire : le théorème de relèvement)** Pour la suite, on a besoin de démontrer le théorème suivant [7] :

   Soit $u : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment. Alors, il existe une application continue $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ telle que : $u = \exp\circ f$.

   Supposons donc $u : [a,b] \to \mathbb{C}^*$, de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^c = u(a)$. On pose :

   $$\forall t \in [a,b], \quad f(t) = c + \int_a^t \frac{u'(s)}{u(s)}\mathrm{d}s.$$

   Montrer que f est un relèvement de u (c'est-à-dire $u = \exp\circ f$), de classe $\mathscr{C}^1$ également.
2. Montrer que les fonctions J_0 et J_1 ne s'annulent jamais simultanément.
3. On définit $r = \sqrt{\mathrm{J}_0^2 + \mathrm{J}_1^2}$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'on ait le système paramétré :

   $$\begin{cases} \mathrm{J}_0 = r\cos\theta \\ \mathrm{J}_1 = r\sin\theta = -\mathrm{J}_0'. \end{cases}$$

   (b) Montrer que le rayon r est une fonction décroissante.
4. Établir une expression pour la dérivée de θ, et en déduire les zéros de J_0. Que peut-on alors dire des zéros de J_1 ?

6. Rappelons le théorème. Soit $a > 0$ et soient f et g deux fonctions continues et positives sur $]0,a]$ telles que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de 0. Si $\int_0^a f$ est divergente, alors $\int_x^a f \sim \int_x^a g$; si $\int_0^a f$ est convergente, alors $\int_0^x f \sim \int_0^x g$.

7. Ce théorème s'énonce plus généralement en supposant uniquement u continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}^*$; voir [10].

Soluce

1. La définition de f a un sens car u ne s'annule pas. Pour tout $t \in [a,b]$, on a
$$f'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)},$$
donc la fonction f ainsi définie est bien de classe $\mathscr{C}^1$.
Posons alors, pour $t \in [a,b]$:
$$\varphi(t) = u(t)\mathrm{e}^{-f(t)}\ ;$$
on a $\varphi'(t) = u'(t)\mathrm{e}^{-f(t)} - f'(t)u(t)\mathrm{e}^{-f(t)} = 0$, donc, la fonction φ est constante égale à, disons K (non nul !). De plus, la condition $\mathrm{e}^c = u(a)$ implique
$$\varphi(a) = u(a)\mathrm{e}^{-f(a)} = \mathrm{e}^c\mathrm{e}^{-c} = 1,$$
et ainsi, $u(t) = \exp\circ f(t)$, pour tout $t \in [a,b]$, comme voulu.
2. On sait déjà que J_0 ne s'annule pas en 0 car $\mathrm{J}_0(0) = 1$. De plus, sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, c'est une solution non uniformément nulle de l'équation (E_0) sous forme normale :
$$y'' = -y'/x - y.$$
Soit alors x_0 un réel non nul, disons positif pour fixer les idées. Définissons le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{y'}{x} - y \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0. \end{cases}$$
La fonction nulle est une solution évidente et, par unicité de la solution à un problème de Cauchy, c'est la seule. Par suite, J_0 et J_1 ne s'annulent pas en x_0.
3. (a) Considérons la fonction $u = \mathrm{J}_0 + i\mathrm{J}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ puisque, d'après la question précédente, J_0 et J_1 ne s'annulent pas simultanément. On peut donc lui appliquer le théorème du relèvement de la question 1. Pour éviter un argument abstrait pour passer d'un segment à $\mathbb{R}$, on remarque que $u(0) = 1$ $(c = 0)$ et on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $f(t) = \int_0^t \frac{u'}{u}$: c'est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $u = \exp\circ f$. Le module de u est $r = |u| = \exp\operatorname{Re} f$. Posons $\theta = \operatorname{Im}(f)$. On a donc $\mathrm{J}_0 + i\mathrm{J}_1 = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} f}\mathrm{e}^{i\theta} = r\mathrm{e}^{i\theta}$, c'est-à-dire :
$$\begin{cases} \mathrm{J}_0 = r\cos\theta, \\ \mathrm{J}_1 = -\mathrm{J}_0' = r\sin\theta. \end{cases}$$
   (b) Remarquons déjà que, d'après la question 2, la fonction r ne s'annule jamais. En tant que composée d'une somme de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de la racine carrée, dérivable partout sauf en 0, on en déduit que la fonction r est une dérivable sur $\mathbb{R}$.
   De plus, comme $r^2 = \mathrm{J}_0^2 + \mathrm{J}_1^2 = \mathrm{J}_0^2 + (\mathrm{J}_0')^2$, et que J_0 est solution de (E_0), on a
$$\begin{aligned}(r^2)'(x) &= 2\mathrm{J}_0(x)\mathrm{J}_0'(x) + 2\mathrm{J}_1(x)\mathrm{J}_1'(x) = 2\mathrm{J}_0(x)\mathrm{J}_0'(x) + 2\mathrm{J}_0'(x)\mathrm{J}_0''(x) \\ &= 2\mathrm{J}_0'(x)\Big(\mathrm{J}_0(x) - \frac{\mathrm{J}_0'(x)}{x} - \mathrm{J}_0(x)\Big) = -2\frac{\mathrm{J}_0'(x)^2}{x},\end{aligned}$$

ce qui montre que r^2 est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, en posant $g(x) = x^2 r^2(x)$, définie sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$g'(x) = 2xr^2(x)+2x^2r(x)r'(x) = 2x\big(\mathrm{J}_0(x)^2+\mathrm{J}_1(x)^2\big)-2x^2\mathrm{J}_1(x)^2 = 2x\mathrm{J}_0(x)^2,$$

de sorte que g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et même strictement).
Ce résultat nous montre que la courbe $x \mapsto (\mathrm{J}_0(x), \mathrm{J}_1(x))$ forme une spirale autour de l'origine (figure 10.3).

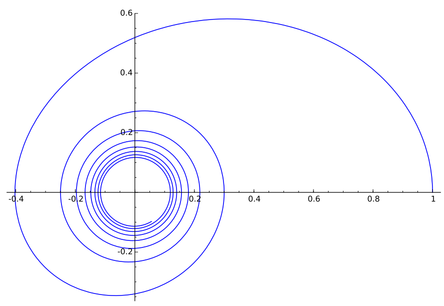


FIGURE 10.3 – Courbe $\big(\mathrm{J}_0(x), \mathrm{J}_1(x)\big)$ $(x \in [0, 50])$

4. Comme $\mathrm{J}_0 = r\cos\theta$, on a

$$\mathrm{J}_0' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta.$$

Trouver les zéros de J_0, c'est trouver les valeurs de θ telles que $\cos\theta = 0$. Si l'on essaie d'isoler, dans l'égalité précédente, la dérivée θ', on se rend compte que l'expression dépendra de r', et qu'il y aura du $r\sin\theta$ au dénominateur. À éviter, donc. À la place, on dérive $\mathrm{J}_0' = -\mathrm{J}_1 = -r\sin\theta$. On trouve :

$$\begin{cases} \mathrm{J}_0' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta & \times(-\sin\theta) \\ \mathrm{J}_0'' = -r'\sin\theta - r\theta'\cos\theta & \times(-\cos\theta) \end{cases}$$

On voit cela comme un système linéaire d'inconnues (r', θ') dont on veut éliminer r'. Pour ce faire, on multiplie la première équation par $(-\sin\theta)$, la seconde par $(-\cos\theta)$, et l'on obtient, pour $x > 0$, en soustrayant les deux lignes :

$$\begin{aligned} r(x)\theta'(x) &= -\sin\theta(x)\,\mathrm{J}_0'(x) - \cos\theta(x)\,\mathrm{J}_0''(x) \\ &= -\sin\theta(x)(-r(x)\sin\theta(x)) - \cos\theta(x)\Big(\frac{r(x)\sin\theta(x)}{x} - r(x)\cos\theta(x)\Big), \end{aligned}$$

ce qui donne après simplification (division par r et $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$) :

$$\theta'(x) = 1 - \frac{\cos\theta(x)\,\sin\theta(x)}{x}.$$

On voit que, pour $x > 1$, $\theta'(x) > 0$. En fait, $\theta'(x) \geqslant 1/2$ pour x assez grand, de sorte que $\theta(x)$ tend vers l'infini avec x.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que θ prend une infinité de valeurs de la forme $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ce qui donne autant de zéros de J_0, puisque $\mathrm{J}_0(x_k) = r(x_k)\cos(x_k) = 0$ pour tout k.

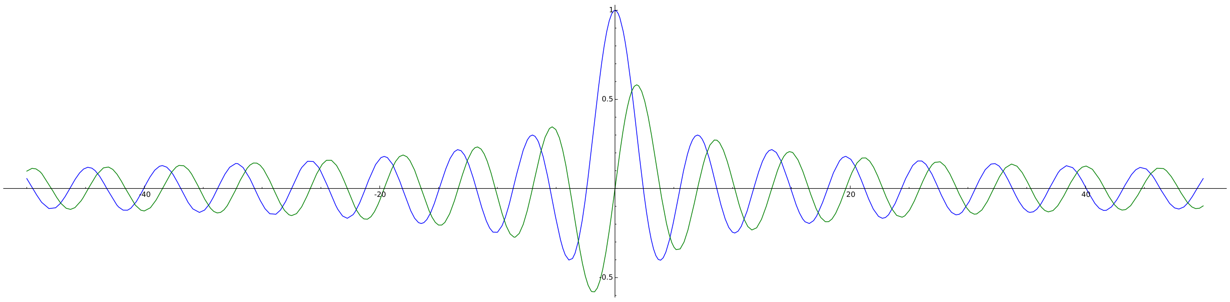


FIGURE 10.4 – Fonctions J_0 et $J_1 = -J_0'$ de Bessel (entrelacement des zéros)

Enfin, comme θ' est strictement positif, la fonction θ est strictement croissante. Or, $J_1 = r \sin\theta$; on en déduit que J_1 possède également une infinité de zéros, et que ceux-ci alternent avec les zéros de J_0 (figure 10.4).

Remarque. Bessel a démontré que toutes les fonctions J_n ($n \in \mathbb{N}$) admettent une infinité de zéros. La conjecture de Bourget, démontrée par Carl Siegel, exprime qu'ils sont tous différents[8] à l'exception de $J_n(0) = 0$ pour $n \geqslant 1$.

Remarque. Les fonctions de Bessel sont les héroïnes d'un traité de plus de 800 pages de G. N. Watson, qui en a en particulier donné des développements asymptotiques et qu'il ne faudrait pas confondre avec H. W. Watson, qui est à l'origine du processus de Galton-Watson de l'exercice 12.2.

Exercice 76 (Fonctions de Bessel - une autre approche)
Soit μ un nombre complexe. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \mu)y = 0. \tag{E_μ}$$

1. Montrer que l'équation E_μ possède une solution développable en série entière si et seulement si μ est le carré d'un entier et que dans ce cas, la solution est unique à un coefficient près.
2. Prouver de *deux* façons que l'unique solution J_0 de l'équation E_0 telle que $J_0(0) = 1$ est :
$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) \mathrm{d}t.$$

Soluce

1. Soit y une fonction développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence R strictement positif. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients. Par

8. Ainsi, on peut dire que tous les zéros non nuls sont différents. Quel charabia !

le théorème de dérivation des séries entières, on a, pour $x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\,; \qquad x^2 y(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n\,;$$
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\,; \qquad x y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n;$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \qquad x^2 y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

Alors, y est solution de E_μ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ si et seulement si pour tout $x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} -\mu a_n x^n = 0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$-\mu a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big(n(n-1)a_n + n a_n + a_{n-2} - \mu a_n\big) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, c'est équivalent aux relations :

$$\mu a_0 = 0, \quad a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ (n^2 - \mu) a_n = -a_{n-2}.$$

Si μ n'est pas le carré d'un entier, alors $\mu \neq 0$ et $a_n^2 - \mu \neq 0$ pour tout n. On en déduit que $a_0 = a_1 = 0$ et, par une récurrence que l'on vient d'initialiser, que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, si μ n'est pas le carré d'un entier, la seule solution de E_μ développable en série entière au voisinage de 0 est la solution nulle.

On traite à part le cas où $\mu = 0$ parce qu'il est légèrement plus simple. Pour $n \geqslant 2$, il vient : $a_n = -a_{n-2}/n^2$ pour tout n non nul. Une récurrence immédiate donne l'annulation des termes impairs et, pour $n = 2k$:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)^2(2k-2)^2 \cdots \times 2^2}\, a_0 = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \times k!^2}\, a_0.$$

Cela montre que toute solution éventuelle est un multiple de la fonction définie par

$$\mathrm{J}_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} \times k!^2}\, x^{2k}.$$

Or cette série entière a un rayon de convergence infini ($a_{2k} \leqslant 1/k!$ pour tout k et $\sum |x|^{2k}/k!$ converge pour tout x) et on vérifie que sa somme J_0 est bien solution en reprenant les calculs précédents à l'envers.

Supposons à présent que $\mu = p^2$ pour un entier naturel $p \geqslant 1$. Alors $\mu \neq 0$, d'où $a_0 = 0 = a_1$.

Exemple. Pour $p = 4$ et $\mu = 16$, les conditions sur la suite (a_n) s'écrivent :

$$\begin{cases} 16a_0 = 0,\ -12a_2 = -a_0,\ 0a_4 = -a_2,\ 20a_6 = -a_4,\ 48a_8 = -a_6 \ldots \\ a_1 = 0,\ -7a_3 = -a_1,\ 9a_5 = -a_3,\ 33a_7 = -a_5,\ 65a_9 = -a_7 \ldots \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression $n^2 - \mu$ ne s'annule que si $n = p$. Ainsi, si p est pair (resp. impair), $n^2 - p^2 \neq 0$ pour tout p impair (resp. pair) ; par récurrence, tous les termes impairs (resp. pairs) sont donc nuls. Autrement dit, y a la même parité que p.

Comme $a_0 = a_1 = 0$ et que $n^2 - p^2 \neq 0$ pour $n < p$, une récurrence finie montre que pour tout $n < p$ de même parité que p, on a : $a_n = 0$. Il n'y a pas de contrainte sur a_p (l'équation d'indice p s'écrit : $0a_p = a_{p-2}$). Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n = p + 2k + 2$, on a : $n^2 - p^2 \neq 0$ d'où,

$$a_{p+2k+2} = \frac{-1}{(p+2k+2)^2 - p^2}\, a_{p+2k} = \frac{-1}{2^2(p+k+1)(k+1)}\, a_{p+2k}.$$

Par récurrence, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{p+2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \prod_{\ell=1}^{k}\big((p+\ell)\times \ell\big)}\, a_p = \frac{(-1)^k\, p!}{2^{2k}\,(p+k)!\,k!}\, a_p;$$

de plus, rappelons-le, les autres termes de la suite (a_n) sont nuls. Le rayon de convergence de la série entière ainsi définie est infini, d'où l'existence d'une solution de E_{p^2} développable en série entière au voisinage de zéro, unique à un coefficient multiplicatif près, qui se trouve être définie sur $\mathbb{R}$.

Il est d'usage de noter J_p la solution où $a_p = 1/(2^p\, p!)$, ce qui revient à définir $\mathrm{J}_p^{(p)}(0) = 1/2^p$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\,(p+k)!\,k!}\, x^{2k+p}.$$

Exercice 77 (Fonctions de Bessel - une autre approche, la suite)
Considérons l'équation différentielle suivante (c'est bien E_0 dans l'exercice précédent) :

$$xy'' + y' + xy = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

1. Calculer le wronskien de deux solutions y_1 et y_2 de E_0 sur un intervalle I ne contenant pas 0.
2. Justifier l'existence d'une solution de E_0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ non proportionnelle à J_0.
3. Soit y une solution de E_0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ non proportionnelle à J_0. Déterminer un équivalent de y au voisinage de 0.
4. En déduire que J_0 est l'unique solution de E_0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ bornée au voisinage de 0.

Idée-clé. *Comme on connaît une solution de l'équation* E_0*, on en trouve une deuxième grâce au wronskien en résolvant une équation différentielle d'ordre* 1.

Soluce

1. Posons $b(x) = 1/x$ pour $x \in \mathrm{I}$. Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 sur I. Leur wronskien est la fonction $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$. On a en dérivant :

$$\begin{aligned} w' &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= y_1\big(-b y_2' - y_2\big) + (b y_1' + y_1) y_2 = -b(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -bw. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad w'(x) = -\frac{1}{x}\, w(x).$$

On intègre cette équation différentielle d'ordre 1. Fixons $x_0 \in \mathrm{I}$. Il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad w(x) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t}} = \frac{\mathrm{C}}{x}.$$

Remarque. On retrouve l'équation satisfaite par le wronskien défini par $\mathrm{W} = \det(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ d'une famille $(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ de solutions d'un système homogène $\mathrm{Y}' = \mathrm{AY}$ défini par une matrice (de fonctions) $\mathrm{A} : \mathrm{I} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et d'inconnue le vecteur $\mathrm{Y} : \mathrm{I} \to \mathbb{C}^n$:

$$\mathrm{W}'(x) = -\operatorname{tr}\big(\mathrm{A}(x)\big)\, \mathrm{W}(x).$$

2. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation E_0 est équivalente à l'équation écrite sous forme normale :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0,$$

à laquelle on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires. Celui-ci exprime que l'espace des solutions est de dimension 2.

3. Prenons $y_1 = \mathrm{J}_0$ (cf. exercice p. 180) et soit $y_2 = y$ une solution de E_0 non proportionnelle à J_0. Alors, $w(0) \neq 0$. (Cette propriété bien connue du wronskien résulte de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.) Ainsi, y est solution de l'équation différentielle

$$\mathrm{J}_0 y' - \mathrm{J}_0' y = w.$$

L'équation homogène associée, $\mathrm{J}_0 y' - \mathrm{J}_0' y = 0$ possède une solution évidente : J_0. Par variation de la constante, on cherche donc une autre solution sous la forme $y = \mathrm{J}_0 z$.

Plus précisément, la continuité de J_0 et le fait que $\mathrm{J}_0(0) = 1$ donne l'existence d'un voisinage V de 0 sur lequel J_0 ne s'annule pas. Sur $\mathrm{V} \cap \mathbb{R}^{+*}$, on pose $z = y/\mathrm{J}_0$, de sorte que $y = \mathrm{J}_0 z$. Alors z est dérivable et $y' = \mathrm{J}_0 z' + \mathrm{J}_0' z$. Il vient :

$$w = \mathrm{J}_0 y' - \mathrm{J}_0' y = \mathrm{J}_0^2 z' + \mathrm{J}_0 \mathrm{J}_0' z - \mathrm{J}_0' \mathrm{J}_0 z = \mathrm{J}_0^2 z'.$$

Ainsi, pour $x \in \mathrm{V} \cap \mathbb{R}^{+*}$, on a (en fixant $x_0 \in \mathrm{V} \cap \mathbb{R}^{+*}$) :

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{w(t)}{\mathrm{J}_0^2(t)} \mathrm{d}t + z(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{C}}{t\, \mathrm{J}_0^2(t)} \mathrm{d}t + z(x_0).$$

Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{t\, \mathrm{J}_0^2(t)} \sim \frac{1}{t},$$

et comme $\int_{x_0}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\infty$, on peut comparer les parties principales des intégrales :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{C}}{t\, \mathrm{J}_0^2(t)} \mathrm{d}t \sim \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{C}}{t}\, \mathrm{d}t \sim \mathrm{C} \ln x.$$

(Rappelons que $\mathrm{C} \neq 0$.) On en déduit que

$$y(x) \sim \mathrm{C} \ln x$$

4. L'équivalent précédent montre qu'une solution y définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{+*}$ non proportionnelle à J_0 n'est pas bornée au voisinage de 0.

10.3 Inclassables

Exercice 78 (Endomorphismes nilpotents et équations différentielles)
Soit Q un polynôme de degré $n \geqslant 0$ et a dans $\mathbb{R}^{+*}$. On veut trouver une solution particulière, dans l'espace $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur à n, à l'équation différentielle

$$y' - ay = \mathrm{Q}.$$

1. Donner la décomposition de Dunford de l'endomorphisme $\delta_a : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' - a\mathrm{P}$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. En déduire que δ_a est inversible et expliciter son inverse.
3. Conclure. Pourquoi la solution trouvée dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est-elle unique ?

Soluce

1. L'endomorphisme dérivation δ_0 de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ qui envoie P sur P′ est bien entendu nilpotent, et commute avec $-a\,\mathrm{Id}$. Donc, la décomposition cherchée est $-a\,\mathrm{Id} + \delta_0$.
2. L'endomorphisme δ_a est inversible puisque la partie diagonalisable de δ_a, nommément $-a\,\mathrm{Id}$, est inversible. On a
$$\delta_a^{-1} = (-a\,\mathrm{Id} + \delta_0)^{-1} = -\frac{1}{a}(\mathrm{Id} - \frac{1}{a}\delta_0)^{-1} = -\frac{1}{a}\left(\mathrm{Id} + \frac{1}{a}\delta_0 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 \delta_0^2 + \cdots + \left(\frac{1}{a}\right)^n \delta_0^n\right).$$
3. Une solution particulière cherchée est donc
$$\mathrm{P}_a := -\frac{1}{a}\mathrm{Q} + \frac{1}{a^2}\mathrm{Q}' + \left(\frac{1}{a}\right)^2 \mathrm{Q}'' + \cdots \left(\frac{1}{a}\right)^n \mathrm{Q}^{(n)}.$$
Soit $\tilde{\mathrm{P}}_a$ une autre solution polynomiale. Alors, $\tilde{\mathrm{P}}_a - \mathrm{P}_a$ est une solution de l'équation homogène associée. D'où $\tilde{\mathrm{P}}_a(t) = \mathrm{P}_a(t) + \mathrm{K}e^{at}$, pour un réel K. En dérivant un nombre de fois N suffisant pour annuler les parties polynomiales, on obtient $\mathrm{K}a^{\mathrm{N}}e^{at} = 0$, donc $\mathrm{K} = 0$. D'où l'unicité.

Remarque. Bien entendu, il faut savoir que cette équation différentielle n'a nullement besoin de Dunford pour s'en sortir comme une grande. Cet exercice est juste là pour le plaisir (et l'opportunisme) de la transversalité.

Remarque. Si a est nul, alors, on doit intégrer pour obtenir une solution particulière. Si a est non nul, on doit dériver. Va savoir [9]...

Exercice 79
Soit I un intervalle et soit y une fonction indéfiniment dérivable de I dans $\mathbb{C}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

9. C'est à mettre dans le même sac que le fait qu'une matrice inversible A a pour inverse un polynôme en A. Ce sont des phénomènes typiques de la dimension finie.

(i) la fonction y est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont des complexes fixés ;

(ii) le sous-espace engendré par la famille $(y, y', \ldots, y^{(n)}, \ldots)$ est de dimension finie ;

(iii) la fonction y est combinaison linéaire d'une famille finie de fonctions de la forme $g_{k,\alpha} : x \mapsto x^k \mathrm{e}^{\alpha x}$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Soluce

(i)⇒(ii) Supposons (i) satisfaite. Soit E l'espace engendré par $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ Montrons par récurrence sur k que toutes les dérivées $y, y', \ldots, y^{n+k}$ sont dans E. Pour $k = 0$, c'est une conséquence de (i). Soit k un entier pour lequel l'assertion est satisfaite. Par linéarité de la dérivation et par (i), on a : $y^{(n+k+1)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i+k+1)}$, qui est une combinaison linéaire d'éléments de E d'après l'hypothèse de récurrence. D'où l'hérédité, puis la conclusion.

(ii)⇒(i) Soit d la dimension de l'espace engendré par les $y^{(i)}$ ($i \in \mathbb{N}$). La famille $(y, y', \ldots, y^{(d)})$ est liée donc il existe une combinaison linéaire $\sum_{i=0}^{d} b_i y^{(i)}$ uniformément nulle dont au moins un coefficient n'est pas nul. Soit n le plus grand indice des coefficients non nuls ($n = \max\{i \leqslant d,\ b_i \neq 0\}$). Alors $y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}$ avec $a_i = -b_i/b_n$ pour tout i.

(i)⟺(iii) On a vu cette équivalence dans l'exercice 69.

Chapitre 11

Calcul numérique

11.1 Méthode de Newton

11.1.1 La méthode

Rappelons le théorème, voir [9, théorème 14.2.2] qui escorte la méthode de Newton, ou disons les conditions qui assurent la convergence de la méthode.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $[a,b]$. Posons $\mathrm{F}(t) := t - \frac{f(t)}{f'(t)}$ (sans se soucier de son domaine de définition) et supposons qu'il existe x dans l'intervalle tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$. Alors, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, si $x_0 \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, la suite des itérés

$$x_{n+1} = \mathrm{F}(x_n)$$

est bien définie, reste dans l'intervalle $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ et converge vers x.

Plus précisément, puisque f' est continue et ne s'annule pas en x, il existe α, telle que f' ne s'annule pas sur $[x-\alpha, x+\alpha]$ (a priori, on a l'existence de l'intervalle ouvert, mais quitte à prendre α plus petit, on peut choisir l'intervalle fermé). Soit m_1 le minimum de $|f'|$ (forcément non nul) et M_2 le maximum de $|f''|$ sur $[x-\alpha, x+\alpha]$. En posant $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{M}_2}{2m_1}$, ε peut être pris quelconque sur $\left]0, \min\{\alpha, \frac{1}{\mathrm{K}}\}\right[$ (et donc $]0,\alpha[$ si jamais K est nul, ce qui serait étonnant !).

En effet, supposons $0 < \varepsilon \leqslant \min\{\alpha, \frac{1}{\mathrm{K}}\}$. Le théorème de Taylor-Lagrange montre que pour tout t de $[x-\alpha, x+\alpha]$:

$$0 = f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-t)^2$$

avec θ situé entre x et t. Comme $f'(t) \neq 0$ sur l'intervalle, il vient

$$\mathrm{F}(t) - x = \frac{f''(\theta)}{2f'(t)}(x-t)^2.$$

Ceci nous donne bien

$$|\mathrm{F}(t) - x| \leqslant \mathrm{K}(t-x)^2.$$

Si $\varepsilon < \frac{1}{\mathrm{K}} \leqslant \alpha$, alors $|t-x| < \varepsilon$ implique $|\mathrm{F}(t) - x| \leqslant \mathrm{K}\varepsilon^2 < \frac{1}{\mathrm{K}} = \min\{\alpha, \frac{1}{\mathrm{K}}\}$.

Si $\varepsilon < \alpha < \frac{1}{\mathrm{K}}$, alors $|\mathrm{F}(t) - x| \leqslant \mathrm{K}\varepsilon^2 < \frac{1}{\alpha}\alpha^2 = \alpha = \min\{\alpha, \frac{1}{\mathrm{K}}\}$.

Donc, par récurrence, la suite reste dans l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

La convergence est alors quadratique [1], puisque

$$|x_{n+1} - x| \leqslant \mathrm{K}\,|x_n - x|^2 .$$

La méthode de Newton s'illustre dans des approximations célèbres :
— la racine carrée de a (non nul), avec $f(x) = x^2 - a$. La récurrence est alors $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$;
— le merveilleux nombre π, avec $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$. On obtient la récurrence suivante : $x_{n+1} = x_n + 2\cot(\frac{x_n}{2})$.

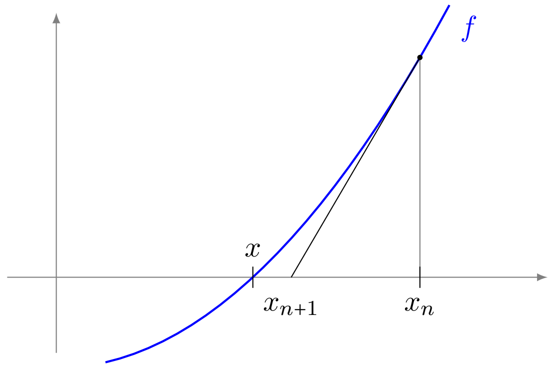


FIGURE 11.1 – Méthode de Newton

Exercice 80 (Approximation d'une racine carrée, approximation de π)

1. Soit a un réel strictement positif. On s'intéresse à la suite récurrente donnée par $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, avec $x_0 > 0$ fixé.
   (a) Montrer que $x_n > 0$ pour tout n et que la suite est bien définie.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2$.
   (c) En déduire que la suite (x_n) tend vers $\sqrt{a}$.
2. Montrer que la suite des itérés de Newton associée à la fonction $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$ est donnée par la récurrence $x_{n+1} = x_n + 2\cot(\frac{x_n}{2})$. Montrer, en utilisant le théorème ci-dessus, que si $x_0 \in\,]0, 2\pi[$, alors la suite x_n tend vers π.

Soluce

1. (a) Par récurrence, $x_n > 0$, ce qui prouve, en particulier, que $x_n \neq 0$ pour tout n, et donc, que la suite est bien définie.
   (b) On trouve

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}) = \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a}) - \frac{a}{2x_n\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a}) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a})(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}) = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2. \end{aligned}$$

   On voit donc que $x_n \geqslant \sqrt{a}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Cela signifie, en gros, que le nombre de décimales correctes double (au minimum) à chaque itération.

(c) Primo, on voit que si la suite (x_n) converge, alors sa limite l vérifie, par continuité de $\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, la relation $l = \frac{1}{2}(l+\frac{a}{l})$, et donc $l=\sqrt{a}$ car $l \geqslant 0$. Deuzio, on a

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})-x_n = \frac{1}{2}(-x_n+\frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2x_n}(\sqrt{a}-x_n)(\sqrt{a}+x_n)$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante et minorée.
La suite x_n converge vers $\sqrt{a}$.

2. La fonction f s'annule uniquement en π dans l'intervalle $[a,b]=[0,2\pi]$. On a $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2})$ et $f''(x) = -\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{2})$. Avec les notations ci-dessus, on choisit $\alpha \in]0,\pi[$, afin que f' ne s'annule pas, puis $m = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi-\alpha}{2}) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\alpha}{2})$, et enfin $\mathrm{M} = \frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{4}\sin(\frac{\alpha}{2})$. On a

$$\frac{2m}{\mathrm{M}} = 4\cot(\frac{\alpha}{2}) > 4\cot(\frac{\pi}{4}) = 4 > \pi > \alpha.$$

Conclusion, on peut choisir $0<\varepsilon<\alpha$, pour tout $\alpha \in]0,\pi[$, ce qui permet de conclure.

Remarque. L'inconvénient du choix de la fonction $\cos(\frac{x}{2})$ pour trouver π est qu'elle est non polynomiale. Mais la suite se programme facilement et converge très rapidement.

Exercice 81 (Méthode de Newton pour la décomposition polaire)
Soit M une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont on souhaite trouver la décomposition polaire $\mathrm{M}=\mathrm{OS}$ de M, par un algorithme rapide.

1. On considère la suite (S_m), avec $\mathrm{S}_0 = {}^t\mathrm{M}\mathrm{M}$ et $\mathrm{S}_{m+1} = \frac{1}{2}(\mathrm{S}_m+\mathrm{S}_0\mathrm{S}_m^{-1})$. Montrer que la suite (S_m) est bien définie et converge vers S. En déduire O.
2. (Variante) On considère la suite (O_m), avec $\mathrm{O}_0 = \mathrm{M}$ et $\mathrm{O}_{m+1} = \frac{1}{2}(\mathrm{O}_m+{}^t\mathrm{O}_m^{-1})$. Montrer que la suite (O_m) converge vers O. En déduire S.

Soluce

1. On considère la suite (S_m), avec $\mathrm{S}_0 = {}^t\mathrm{M}\mathrm{M}$ et $\mathrm{S}_{m+1} = \frac{1}{2}(\mathrm{S}_m+\mathrm{S}_0\mathrm{S}_m^{-1})$. Montrer que la suite (S_m) converge vers S. En déduire O.

   On sait de la preuve du théorème de décomposition polaire que
   — S_0 est symétrique définie positive, et donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ en base orthonormée : $\mathrm{S}_0 = \mathrm{P}\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\mathrm{P}^{-1}$, avec ${}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}$ et $\lambda_i>0$ pour tout i.
   — S est l'*unique* matrice symétrique définie positive telle que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{S}_0$ et elle est donnée par
   $$\mathrm{S} = \mathrm{P}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})\mathrm{P}^{-1}.$$

   Soit f la fonction qui envoie A dans GL_n sur $f(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{S}_0\mathrm{A}^{-1})$. La fonction f vérifie

$$\begin{aligned} f(\mathrm{PAP}^{-1}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{PAP}^{-1}+\mathrm{S}_0(\mathrm{PAP}^{-1})^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathrm{PAP}^{-1}+\mathrm{P}\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\mathrm{A}^{-1}\mathrm{P}^{-1}) \\ &= \mathrm{P}\big(\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\mathrm{A}^{-1}\big)\mathrm{P}^{-1}. \end{aligned}$$

Or, si A est une matrice diagonale $A := \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, avec $\mu_i > 0$, on a

$$\frac{1}{2}(A + \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)A^{-1}) = \mathrm{diag}(f_1(\mu_1), \dots, f_n(\mu_n)),$$

avec $f_i(x) := \frac{1}{2}(x + \lambda_i x^{-1})$.
On pose donc $A_m = P^{-1}S_mP$, et donc $A_0 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. De la positivité des λ_i, on déduit, par l'exercice 80 1a) et 1c), que A_m est bien définie et a pour limite $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Donc, la suite (S_m) est bien définie et, par continuité de la conjugaison :

$$\lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} PA_mP^{-1} = P \lim_{m\to+\infty} A_mP^{-1} = S.$$

2. Si on pose $S_m = {}^t O_m M$, ou, comme S_m est symétrique, $S_m = {}^t M O_m$. En notant que S_m commute avec S_0 pour tout m (ce sont tous des polynômes en S_0), la récurrence précédente donne

$$\begin{aligned} {}^tO_{m+1}M &= \frac{1}{2}(S_m + S_0S_m^{-1}) = \frac{1}{2}(S_m + S_m^{-1}S_0) \\ &= \frac{1}{2}\left({}^tO_mM + ({}^tMO_m)^{-1}S_0\right) = \frac{1}{2}({}^tO_mM + O_m^{-1}M). \end{aligned}$$

En simplifiant par M, il vient $O_{m+1} = \frac{1}{2}({}^tO_m + O_m^{-1})$, avec $O_0 = {}^t(S_0M^{-1}) = M$. Par continuité de la multiplication par M^{-1} et de la transposition, la suite (O_m) converge vers ${}^t(SM^{-1}) = {}^t(O^{-1}) = O$.

11.1.2 Méthode des sécantes, méthode de quasi-Newton

Voici quelques variantes de la méthode de Newton. Comme à l'accoutumée dans la ruche bouillonnante du calcul numérique, ces variantes n'interviennent, ni par caprice, ni pour une question de morale ou d'éthique. Les mots d'ordre de ce monde sont « complexité » et « fiabilité ».

Exercice 82 (Méthode des sécantes)
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un x, que l'on supposera fixé, dans l'intervalle $[a, b]$, tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$. On définit, pour tout couple (x_0, x_1) dans $[a, b]$ une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}, \text{ avec } f[u, v] := \frac{f(u) - f(v)}{u - v}.$$

On va montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si x_0 et x_1 sont choisis dans l'intervalle $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, la suite (x_n) est bien définie et converge vers x. Plus précisément, nous allons voir qu'il existe des constantes $K > 0$ et $a \in]0, 1[$ telles que

$$|x_n - x| \leqslant K a^{\phi^n},$$

où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

1. Soit s_0, s_1 dans $[0,1[$, et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $s_{n+1} = s_n s_{n-1}$. Montrer qu'il existe un réel $\mathrm{K} > 0$, et a dans $]0,1[$ tels que $s_n \leqslant \mathrm{K}a^{\phi^n}$.
2. Montrer l'identité (lorsque les valeurs sont toutes bien définies)
$$f[x_n, x_{n-1}](x_{n+1} - x) = (x_n - x)(x_{n-1} - x)f[x_n, x_{n-1}, x], \text{ avec } f[u,v,w] := \frac{f[u,v] - f[u,w]}{v - w}.$$
3. Montrer l'égalité
$$\int_0^1 \int_0^{t_1} f''\big(u + t_1(w-u) + t_2(v-w)\big)\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 = f[u,v,w].$$
4. Soit $\alpha > 0$ un réel tel que f' ne s'annule pas sur $[x-\alpha, x+\alpha]$ et soit $m > 0$ un minorant de $|f'|$ sur cet intervalle. Soit M un majorant de $|f''|$ sur ce même intervalle. Montrer que si $x_{n-1}, x_n \in [x-\alpha, x+\alpha]$, alors x_{n+1} est bien définie et
$$|x_{n+1} - x| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{m}|x_n - x|\,|x_{n-1} - x|\,.$$
5. Conclure en choisissant $0 < \varepsilon < \min\Big(\alpha, \dfrac{m}{\mathrm{M}}\Big)$.

Soluce

1. Si s_0 ou s_1 est nul, alors s_n est nul pour $n \geqslant 2$, et l'inégalité proposée est claire. On suppose donc s_0 et s_1 dans $]0,1[$. On voit par récurrence que la suite s_n est à valeurs dans $]0,1[$, de sorte que l'on peut définir la suite $t_n := -\log(s_n) > 0$, qui vérifie la récurrence linéaire de type Fibonacci : $t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$. L'équation caractéristique $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1 = 0$ de cette récurrence linéaire (à coefficients constants) a pour solutions le nombre d'or ϕ et $\phi' := \frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1,0[$. On sait alors qu'il existe deux constantes k et k' tels que $t_n = k\phi^n + k'\phi'^n$ pour tout n. Or on a $\phi > 1$ et $-1 < \phi' < 0$, ce qui implique $t_n \simeq k\phi^n$. Comme (t_n) est une suite positive croissante et qu'elle est équivalente à $k\phi^n$, on a automatiquement $k > 0$, et $t_n \geqslant k\phi^n - |k'|$, par l'inégalité triangulaire. Cela implique
$$s_n = \mathrm{e}^{-t_n} \leqslant \mathrm{e}^{|k'|}\mathrm{e}^{-k\phi^n} = \mathrm{e}^{|k'|}(\mathrm{e}^{-k})^{\phi^n},$$
ce qui permet de conclure en posant $\mathrm{K} := \mathrm{e}^{|k'|}$ et $a := \mathrm{e}^{-k}$.
2. Il s'agit d'un calcul direct que l'on peut attaquer en toute insouciance car les dénominateurs sont supposés non nuls.
$$\begin{aligned}
&f[x_n, x_{n-1}](x_{n+1} - x) = f[x_n, x_{n-1}](x_n - x) - f(x_n)\\
&= \big(f[x_n, x_{n-1}, x](x_{n-1} - x) + f[x_n, x]\big)(x_n - x) - f(x_n)\\
&= f[x_n, x_{n-1}, x](x_{n-1} - x)(x_n - x) + f[x_n, x](x_n - x) - \big(f(x_n) - f(x)\big)\\
&= f[x_n, x_{n-1}, x](x_{n-1} - x)(x_n - x).
\end{aligned}$$

3. Ici aussi, il s'agit d'une intégration qui ne posera de problème à personne. On remarque tout d'abord que pour tous u et v distincts,

$$\int_0^1 f'\big(v+t_1(u-v)\big)\,\mathrm{d}t_1 = \frac{1}{u-v}\big(f(u)-f(v)\big) = f[u,v].$$

Puis, on calcule :

$$\int_0^{t_1} f''\big(x_n+t_1(x-x_n)+t_2(x_{n-1}-x)\big)\,\mathrm{d}t_2 = \frac{1}{x_{n-1}-x}\Big(f'\big(x_n+t_1(x_{n-1}-x_n)\big)-f'\big(x_n+t_1(x-x_n)\big)\Big).$$

L'intégrale cherchée vaut donc

$$\frac{1}{x_{n-1}-x}\big(f[x_n,x_{n-1}]-f[x_n,x]\big) = f[x_n,x_{n-1},x].$$

4. On note que α et m existent car, par hypothèses, f' est continue et non nulle en x. De même, M existe par continuité de f''.
D'après la question 3, on a $\big|f[x_n,x_{n-1}]\big| \geqslant m > 0$ et, en particulier, x_{n+1} est bien défini. On a aussi $\big|f[x_n,x_{n-1},x]\big| \leqslant \mathrm{M}$. Par la question 2, il vient :

$$|x_{n+1}-x| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{m}|x_n-x|\,|x_{n-1}-x|\,.$$

5. Soit donc $0<\varepsilon<\min\{\alpha,\frac{m}{\mathrm{M}}\}$. Alors, par une récurrence directe qui utilise la question précédente, on voit que si $|x_0-x|\leqslant\varepsilon$, et $|x_1-x|\leqslant\varepsilon$, alors x_n est bien définie et vérifie $|x_n-x|\leqslant\varepsilon$.
Posons $r_n := \frac{\mathrm{M}}{m}|x_n-x|$, de sorte que l'on a $r_{n+1}\leqslant r_n r_{n-1}$ et $r_0,r_1\in[0,1[$. Si on pose $s_0:=r_0$ et $s_1:=r_1$, alors, on voit par récurrence que la suite (s_n) de la question 1 majore celle qui nous intéresse : $s_n\geqslant r_n$ pour tout n. Le résultat attendu en découle.

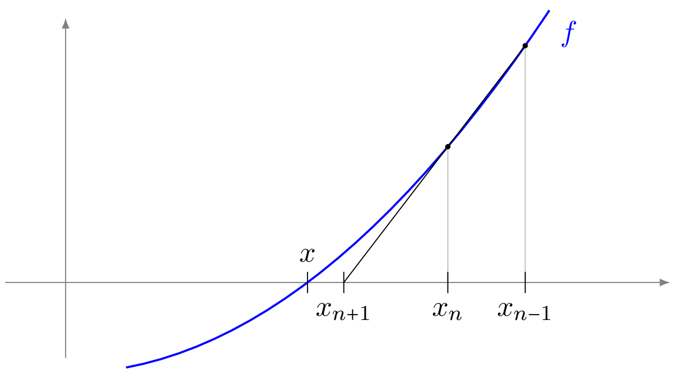


FIGURE 11.2 – Méthode de la sécante

Remarque. L'idée derrière cette méthode, c'est de partir de deux points $\mathrm{M}_0 := (x_0, f(x_0))$ et $\mathrm{M}_1 := (x_1, f(x_1))$ sur la courbe d'équation $y=f(x)$ et de regarder l'abscisse x_2 de l'intersection de la droite $(\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1)$ avec l'axe $(\mathrm{O}x)$. On trouve donc bien $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f[x_1,x_0]}$. On continue avec les deux points M_1 et $\mathrm{M}_2 := (x_2, f(x_2))$, et ainsi de suite.

Remarque. Rappelons que la méthode de Newton consiste à partir d'un point $M_0 = (x_0, f(x_0))$ sur la courbe d'équation $y = f(x)$, et définir x_1 comme l'abscisse de l'intersection de la tangente en M_0 à la courbe avec l'axe (Ox). On trouve alors $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Comme en témoigne la figure 11.2, lorsque x_0 et x_1 sont proches, $f[x_1, x_0]$ est proche de $f'(x_1)$. La méthode des sécantes peut être vue comme une discrétisation de la méthode de Newton. Elle s'avère utile lorsque la dérivée de la fonction est difficile à calculer.

Côté vitesse de convergence, la formule de Taylor-reste intégral

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \int_{x_n}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$$

vient donner une estimation de la convergence en $\mathrm{K}a^{2^n}$. Ainsi, ce que l'on gagne dans la méthode des sécantes en ne calculant pas de dérivée, on le perd en remplaçant 2 (la convergence quadratique) par $\phi \simeq 1{,}618$ (une convergence en or !). On peut se laisser tenter ! En tout cas, c'est un exercice qui peut très bien s'adapter à une petite programmation toute simple : prendre par exemple $f(x) = x^2 - 2$ avec $x_0 = 1$ pour la méthode de Newton, et comparer avec $f(x) = x^2 - 2$ avec $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ pour la méthode des sécantes.

Exercice 83 (Différences divisées[2] : approche duale)
Cet exercice est là pour faire le point sur les différences divisées rencontrées dans la méthode des sécantes. L'idée est ici de voir une version discrète de la formule de Taylor polynomiale, à l'aide de la dualité.

On considère une suite finie $x := (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, où les x_i sont deux à deux distincts. Soit $e_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, les éléments de l'espace $\mathrm{E} := \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur à n, définis par

$$e_1(x) := 1, \quad e_i := (\mathrm{X} - x_1)(\mathrm{X} - x_2)\cdots(\mathrm{X} - x_{i-1}) \text{ si } 2 \leqslant i \leqslant n+1.$$

1. Soit $(e_i(x)^*)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ la base duale de $(e_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n+1}$. Montrer que $e_1(x)^*$ est l'évaluation en x_1.
2. Pour tout k entre 1 et n, soit $x^{(k)}$ la suite $x = (x_1, \dots, x_{k+1}, x_k, \dots, x_{n+1})$, où l'on a interverti x_k et x_{k+1}. Donner la matrice de passage de la base $(e_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ vers la base $(e_i(x^{(k)})_{1\leqslant i\leqslant n+1}$, et en déduire la formule de récurrence
$$e_{k+1}(x)^* = \frac{e_k(x^{(k)})^* - e_k(x)^*}{x_{k+1} - x_k}.$$
3. Soit P un polynôme de E. Calculer $e_k(x)^*(\mathrm{P})$ pour $k = 1, 2, 3$, et montrer que $e_k(x)^*(\mathrm{P})$ ne dépend que de $x_1, x_2, \dots, x_k$. On les appelle *différences divisées*[3], et on pose
$$\mathrm{P}[x_1, \dots, x_k] = e_k(x)^*(\mathrm{P}).$$
4. Montrer que $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}[x_1, \dots, x_k] e_k(x)$, où $\mathrm{P}[x_1, \dots, x_{k+1}]$ est donné par

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_k} \mathrm{P}^{(k)}\big(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_2) + \cdots + t_k(x_{k+1} - x_k)\big)\,\mathrm{d}t_k\,\mathrm{d}t_{k-1}\cdots\mathrm{d}t_1).$$

Remarque. Pour ceux qui aimeraient une formule plus globale pour les différences divisées, on signale que l'on peut montrer par récurrence, en inversant le système donné par $P(x_j) = \sum_{k=1}^{n} P[x_1, \dots, x_k] e_k(x_j)$, la formule suivante :

$$P[x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=1}^{k} \frac{P(x_j)}{\prod_{1 \leqslant i \leqslant k, i \neq j} (x_j - x_i)},$$

Soluce

1. En évaluant la formule $P = \sum_{i=1}^{n+1} e_i(x)^*(P) e_i(x)$ en x_1, on obtient l'égalité $P(x_1) = e_1(x)^*(P)$ qui prouve le résultat.
2. On a par définition, $e_i(x^{(k)}) = e_i(x)$, pour tout $i \neq k+1$, et

$$\begin{aligned} e_{k+1}(x^{(k)}) &= (X - x_1) \cdots (X - x_{k-1})(X - x_{k+1}) = (X - x_1) \cdots (X - x_{k-1})(X - x_k + (x_k - x_{k+1})) \\ &= e_{k+1}(x) + (x_k - x_{k+1}) e_k(x). \end{aligned}$$

   On vérifie (au passage) que la formule est encore valable pour $k = 1$. La matrice de passage entre les deux bases est donc $P := I_{n+1} + (x_k - x_{k+1}) E_{k,k+1}$, où les $E_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$ désignent les matrices élémentaires. Il en découle, par un résultat classique, que la matrice de passage de la base $(e_i(x)^*)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ vers la base $(e_i(x^{(k)})^*)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est ${}^t P^{-1} = I_{n+1} - (x_k - x_{k+1}) E_{k+1,k}$. On en déduit

$$e_k(x^{(k)})^* = e_k(x)^* - (x_k - x_{k+1}) e_{k+1}(x)^*,$$

   et donc $e_{k+1}(x)^* = \frac{e_k(x^{(k)})^* - e_k(x)^*}{x_{k+1} - x_k)}$
3. On a donc déjà trouvé $e_1(x)^*(P) = P(x_1)$. On obtient donc :

$$e_2(x)^*(P) = \frac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad e_3(x)^*(P) = \frac{\frac{P(x_3) - P(x_1)}{x_3 - x_1} - \frac{P(x_2) - P(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2}.$$

   Par récurrence, on voit que $e_k(x)^*(P)$ ne dépend que de $x_1, x_2, \dots, x_k$, ce qui justifie la terminologie.
4. On montre l'égalité par récurrence. Pour $k = 1$, on a bien

$$\int_0^1 P'\big(x_1 + t_1(x_2 - x_1)\big)\,dt_1) = \frac{1}{x_2 - x_1} \Big[P\big(x_1 + t_1(x_2 - x_1)\big) \Big]_0^1 = P[x_1, x_2].$$

   Soit k un entier non nul, on suppose l'égalité vraie pour $k - 1$ et on notons I_k le membre de droite de l'égalité à prouver. Il vient alors :

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_k} P^{(k)}\big(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_2) + \cdots + t_k(x_{k+1} - x_k)\big)\,dt_k\,dt_{k-1} \cdots dt_1 \\ &= \frac{1}{x_{k+1} - x_k} \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} \Big[P^{(k-1)}\big(x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_2) + \cdots + t_k(x_{k+1} - x_k)\big) \Big]_0^{t_{k-1}} dt_{k-1} \cdots dt_1 \\ &= \frac{1}{x_{k+1} - x_k} \big(P[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}] - P[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k] \big). \end{aligned}$$

   Compte tenu de la question précédente, on obtient bien $I_k = P[x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}]$.

3. En hommage aux deux primaires 2017.

Exercice 84 (Méthode de quasi-Newton pour inverser une matrice)
Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite (X_m) de la façon suivante :

$$X_0 = a\,{}^t\!A \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ X_{m+1} = 2X_m - X_m A X_m.$$

On veut montrer que (X_m) tend vers A^{-1} pour certaines valeurs de a à déterminer.

1. On considère la suite $U_m := I_n - AX_m$. Calculer U_0 et montrer la relation de récurrence
$$U_{m+1} = U_m^2.$$
2. Soit N_2 la norme subordonnée à la norme quadratique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer, en utilisant N_2, que la suite (U_m) tend vers la matrice nulle, pour $a \in \left]0, \frac{2}{\operatorname{tr}(A\,{}^t\!A)}\right]$, puis conclure.
On rappelle, voir [Algébrie, p. 33], que si S *est une matrice symétrique réelle, alors* $N_2(S)$ *est* $\max\{|\lambda|,\ \lambda \in \operatorname{Spec} S\}$.

Soluce

1. On trouve $U_0 = I_n - AX_0 = I_n - aS$, avec $S := A\,{}^t\!A$. De plus, en remarquant que $X_{m+1} = X_m(I_n + U_m)$, on obtient :
$$\begin{aligned} U_{m+1} &= I_n - AX_{m+1} = I_n - AX_m(I_n + U_m) \\ &= I_n - AX_m - AX_mU_m = U_m - AX_mU_m = (I_n - AX_m)U_m = U_m^2. \end{aligned}$$
2. Comme U_0 est symétrique, la relation de récurrence implique que U_m est symétrique pour tout m. Or, N_2 est une norme subordonnée, donc sous-multiplicative. Si l'on choisit a tel que $N_2(U_0) < 1$, alors $N_2(U_m) \leqslant N_2(U_0)^{2^m}$, et on aura donc $\lim_m U_m = 0$ et, par continuité de la fonction $U \mapsto A^{-1}(I_n - U)$, $\lim_m X_m = \lim_m A^{-1}(I_n - U_m) = A^{-1}$.
De plus, $S = {}^t\!AA$, avec A inversible. Elle est donc, non seulement symétrique, mais définie positive car congruente à l'identité. La matrice S est donc diagonalisable à spectre dans $\mathbb{R}^{+*}$. On peut ordonner ses valeurs propres
$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0.$$
La matrice $U_0 = I_n - aS$ est encore symétrique réelle et, si l'on prend $a > 0$, ses valeurs propres ordonnées sont
$$1 - a\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant 1 - a\lambda_2 \cdots \leqslant 1 - a\lambda_n.$$
Conclusion, si l'on choisit a de sorte que $-1 < 1 - a\lambda_1 \leqslant 1 - a\lambda_n < 1$, le rayon spectral de U_0 vérifiera bien l'inégalité voulue. On voit qu'il suffit de prendre a dans $\left]0, \frac{2}{\lambda_1}\right[$.
Or, $\operatorname{tr}(A\,{}^t\!A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n > \lambda_1$. Donc, prendre a dans $]0, \frac{2}{\operatorname{tr}(A\,{}^t\!A)}]$ donne la convergence voulue.

Remarque (Du cas réel au cas complexe). On peut remplacer $A \in GL_n(\mathbb{R})$ par $A \in GL_n(\mathbb{C})$, en remplaçant ${}^tA$ par A^* et donc la matrice symétrique $S = {}^tAA$ par la matrice hermitienne $H = A^*A$. Toutefois, on doit garder a réel.

Remarque (Calculabilité). On peut prendre $a = \operatorname{tr}(A\,{}^tA)$, qui, au passage, est aussi la norme quadratique, au carré, de la matrice A. On aurait pu prendre un nombre proche (mais en dessous) de λ_n, mais celui-ci est beaucoup plus difficile à calculer. À ce propos, expliquons le terme « méthode de quasi-Newton ».

Si a est non nul et que l'on veut avoir une suite qui tend vers a^{-1}, on pense alors à chercher le zéro de la fonction $f(x) = ax - 1$. Cela nous amène à une méthode de Newton, et on se retrouve avec une suite définie par récurrence par $x_{n+1} = x_n - \frac{ax_n - 1}{a}$. Ceci est évidemment ridicule puisque la récurrence elle-même nous exige de trouver l'inverse de a. L'idée est donc de remplacer $\frac{1}{a}$ par x_n, qui lui est proche. La nouvelle récurrence donne alors $x_{n+1} = x_n - (ax_n - 1)x_n$, c'est-à-dire : $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$.

Dans le même ordre d'idée, on peut calculer (si elle existe) la racine n-ième d'une matrice inversible A avec une récurrence de type $X_{m+1} = \frac{m+1}{m}X_m - \frac{1}{n}A^{-1}X_m^{n+1}$. On trouve ce genre d'algorithme en modifiant une méthode de Newton afin d'éviter de calculer trop de divisions à chaque itération.

Remarque (Complexité). Et Gauss dans tout ça ? Un produit de matrices de taille n fait faire tout de même de l'ordre de $2n^3$ calculs. Donc, pour atteindre une approximation raisonnable, il faudra aller au moins jusqu'à X_4, soit environ $16n^3$ calculs, ce qui est moins bon que la méthode de pivot (de l'ordre de $\frac{4}{3}n^3$). Mais, ce qui est rassurant ici, c'est que l'on ne fait pratiquement aucune division dans cet algorithme, à part pour le calcul de X_0.

11.2 Méthode des puissances

Exercice 85 (Méthode des puissances dans le cas symétrique)
On se donne une matrice symétrique réelle S de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On va supposer que les valeurs propres λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de S, vérifient

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|.$$

Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée, où e_i est vecteur propre de S dans $\mathbb{R}^n$, pour la valeur propre λ_i. On veut construire un algorithme permettant de trouver e_1 (au signe près) et λ_1.

Soit $x_0 = \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \in \mathbb{R}^n$. On suppose la coordonnée η_1 non nulle. On construit par récurrence

$$x_{k+1} = Sy_k, \quad y_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_2},$$

où $\| \, \|_2$ désigne la norme quadratique canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que, pour tout k, les suites sont bien définies, et que (y_{2k}) converge soit vers e_1, soit vers $-e_1$.
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui ne s'annule pas sur e_1. Montrer que $\frac{\varphi(Sy_{2k})}{\varphi(y_{2k})}$ est définie à partir d'un certain rang, et tend vers λ_1.

Soluce

1. Soit $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \pm 1$ le signe de λ_1. Comme $\lambda_1 \neq 0$, on a pour commencer :

$$x_1 = \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \|_2},\ y_1 = \operatorname{sgn}(\lambda_1) \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i \|_2}.$$

Montrons par récurrence sur $k > 0$ les égalités

$$x_k = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^{k-1} \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k-1} e_i \|_2},\ y_k = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \|_2}.$$

Elles sont vraies pour $k = 1$. Si on les suppose vraies pour k, alors :

$$x_{k+1} = \mathrm{S} y_k = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathrm{S} e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \|_2} = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \|_2},$$

ce qui donne par la suite, après simplification des dénominateurs

$$y_{k+1} = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{|\lambda_1| \cdot \| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i \|_2} = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^{k+1} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i \|_2}.$$

On voit alors que les suites sont bien définies, puisque les dénominateurs sont des normes de vecteurs non nuls (ils ont une coordonnée non nulle en e_1). De plus, comme, par hypothèse, $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$, la limite de y_{2k} est $\operatorname{sgn}(\eta_1) e_1$.

2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui ne s'annule pas sur e_1. Montrer que $\frac{\varphi(\mathrm{S} y_{2k})}{\varphi(y_{2k})}$ est définie à partir d'un certain rang, et tend vers λ_1.

   L'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(u) \neq 0$ est le complémentaire de l'hyperplan $\varphi^\perp$; il s'agit d'un ouvert pour la topologie usuelle des espaces de dimension finie, qui, de plus, contient $\pm e_1$ par hypothèses. Comme y_{2k} tend vers e_1 ou $-e_1$, ceci implique qu'à partir d'un certain rang $\varphi(y_{2k}) \neq 0$. La suite proposée est donc bien définie à partir d'un certain rang, et on voit, en utilisant la continuité de φ et S, qu'elle tend vers $\frac{\varphi(\mathrm{S} e_1)}{\varphi(e_1)} = \lambda_1$.

Remarque. On note que l'on a une convergence géométrique (ce qui n'est pas si mal), c'est-à-dire que la vitesse de convergence est géométrique, en $(\lambda_2/\lambda_1)^k$. Si on note (e_i^*) la base duale de (e_i), alors, l'initialisation de l'algorithme dépend de la donnée

— de x_0 dans le complémentaire de l'hyperplan $(e_1^*)^\circ$, qui est un ouvert dense de $\mathbb{R}^n$.

— de φ dans le complémentaire de l'hyperplan $(e_1)^\perp$, qui est un ouvert dense du dual de $\mathbb{R}^n$.

Cela signifie en gros que l'on peut choisir x_0 et φ un peu n'importe où et le hasard fera bien les choses.

Exercice 86 (Méthode de déflation)
Ceci est une suite de l'exercice 85, et on en garde les notations. On cherche ici un algorithme permettant de trouver tous les vecteurs propres et toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique S vérifiant désormais

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0.$$

1. Exprimer la condition $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$ sur les coefficients de la matrice $\mathrm{S} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ pour $n = 2$.
2. Pour tout k de 1 à $n-1$, on pose $\mathrm{T}(k) = \mathrm{S} - \lambda_1(e_1\,{}^te_1) - \cdots - \lambda_k(e_k\,{}^te_k)$. Montrer que $\mathrm{T}(k)$ est une matrice symétrique, que (e_i) est une base de vecteurs propres, et que les valeurs propres ordonnées sont $\lambda_{k+1} > \cdots > \lambda_n$ et la valeur propre 0, avec multiplicité $m_0 = k$.
3. On suppose que (S_m) est une suite de matrices symétriques qui converge vers S.
   (a) Soit $\lambda_{1,m}$ la plus grande valeur propre de S_m, en valeur absolue. Montrer que la suite $(\lambda_{1,m})_m$ converge vers λ_1.
   (b) On choisit, pour tout m, un vecteur propre normé $e_{1,k}$ pour la valeur propre $\lambda_{1,k}$ de S_m. Montrer que la suite de matrices $(e_{1,m}\,{}^te_{1,m})_m$ tend vers $e_1\,{}^te_1$.
4. En déduire un algorithme de calcul pour la k-ième valeur propre λ_k de S, et un vecteur propre normé associé.

Soluce

1. À partir du moment où l'on a ordonné les valeurs absolues des valeurs propres de S, la condition $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$ est équivalente à la condition $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$ avec $\lambda_i \neq 0$. Le polynôme caractéristique $\mathrm{P_S}$ de S est $\mathrm{X}^2 - t\mathrm{X} + d$, avec $t = a + c$ et $d = ac - b^2$. La seconde condition demande $d \neq 0$. Pour la première, soit $\mathrm{Q_S}$ le polynôme unitaire de degré 2 ayant pour racines λ_1^2 et λ_2^2. Pour trouver les coefficients de $\mathrm{Q_S}$, c'est le moment d'utiliser les relations coefficients racines :
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = t^2 - 2d, \ \lambda_1^2\lambda_2^2 = d^2.$$
Donc, $\mathrm{Q_S} = \mathrm{X}^2 - (t^2 - 2d)\mathrm{X} + d^2$, et il possède deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est non nul, c'est-à-dire $t^2(t^2 - 4d) \neq 0$. On veut donc au final $dt(t^2 - 4d) \neq 0$, ce qui définit une condition ouverte : l'assignation $\mathrm{S} \mapsto (ac - b^2)(a + c)\big((a - c)^2 + 4b^2\big)$ définit une application continue de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, et le domaine considéré est l'image réciproque de $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Notons tout d'abord que si u est un vecteur (colonne) de $\mathbb{R}^n$, alors la matrice $u\,{}^tu$ est une matrice carrée de taille n, qui de plus, est symétrique. Il en résulte que $\mathrm{T}(k)$ est une matrice symétrique. De plus, comme $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forme une base orthonormée, on a ${}^te_ie_j = \delta_{ij}$, le symbole de Kroenecker. Par associativité de la multiplication matricielle, il vient $(e_i\,{}^te_i)e_j = \delta_{ij}e_i$. Comme $\mathrm{S}e_j = \lambda_je_j$, on trouve
$$\mathrm{T}(k)e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant k \\ \lambda_je_j & \text{si } (k+1) \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

On conclut l'assertion demandée.

3. (a) Soit N_2 la norme matricielle subordonnée à la norme quadratique de $\mathbb{R}^n$. On sait, voir [4, Corollaire 1.2.1], que $N_2(S) = |\lambda_1|$. Par continuité de la norme, $N_2(S_m)$ tend vers $N_2(S)$. Donc, la suite $|\lambda_{1,m}|$ converge (ce qui n'était pas si évident que ça), et tend vers $|\lambda_1|$.

   Montrons que la suite $(\lambda_{1,m})$ converge, et qu'elle converge vers λ_1. On sait, d'après ce qui précède, que la suite est bornée ; il suffit donc de montrer que toute sous-suite convergente tend vers λ_1. Soit donc $(\lambda_{1,m_p})_p$ une sous-suite qui converge vers un réel μ. On voit donc tout de suite que $|\mu| = |\lambda_1|$. On sait de plus, voir [6, Exercice I-3.33], que la suite des polynômes caractéristiques P_{S_m} tend vers P_S, donc $P_{S_{m_p}}(\lambda_{1,m_p})$, qui est une suite nulle, tend vers $P_S(\mu)$. Ceci implique que μ est une racine de P_S. Or, par hypothèses, la seule racine de P_S de valeur absolue λ_1 est λ_1. Donc, $\mu = \lambda_1$.

   (b) Comme $e_{1,m}$ est normé, la suite $(e_{1,m})_m$ est dans un compact de $\mathbb{R}^n$. Si l'on montre que toute sous-suite convergente tend vers e_1 ou $-e_1$, alors, on aura montré que la suite de matrices $(e_{1,m}{}^t e_{1,m})_m$ tend bien vers $e_1{}^t e_1$.

   Soit $(e_{1,m_p})_p$ une sous-suite qui converge vers un vecteur f de $\mathbb{R}^n$, forcément de norme égale à 1. Alors, l'égalité $S_{m_p} e_{1,m_p} = \lambda_{1,m_p} e_{1,m_p}$, valable pour tout p, implique $Sf = \lambda_1 f$, d'après la question précédente. Conclusion, $f = e_1$ ou $-e_1$.

4. On calcule d'abord une valeur approchée $\tilde{\lambda}_1$ de λ_1, et un vecteur $\tilde{e}_1$ proche de e_1 avec l'algorithme de l'exercice 85. On calcule ensuite la matrice symétrique $S(1) := S - \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_1{}^t(\tilde{e}_1)$. On calcule, encore avec ce même algorithme, une approximation de la plus grande valeur propre (en valeur absolue) de $S(1)$, que l'on note $\tilde{\lambda}_2$. D'après la question qui précède, $\tilde{\lambda}_2$ peut se rapprocher autant que l'on veut de la plus grande valeur propre (en valeur absolue) de $T(1)$, c'est-à-dire, de λ_2, par la question 2. De même, on trouve une approche de vecteur propre $\tilde{e}_2$ d'un vecteur normé associé à la valeur propre λ_2 de S. On calcule ensuite $S(2) := S - \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_1{}^t(\tilde{e}_1) - \tilde{\lambda}_2 \tilde{e}_2{}^t(\tilde{e}_2)$, et ainsi de suite.

Remarque. Pour le cas $n = 2$, on a vu que la condition sur la matrice S définissait un ouvert de $\mathscr{S}_n$. En fait, la condition est *ouverte* en général. Plus précisément, la condition $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$ est équivalente à la condition $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 > \cdots > \lambda_n^2 > 0$. Or, si P_S est le polynôme caractéristique de S et Q_S le polynôme ayant pour racines les carrés des racines de Q_S (qui s'écrit avec les coefficients de P_S), alors la condition s'exprime par « Q_S n'a que des racines simples non nulles ». La simplicité des racines se dit avec un discriminant : $\mathrm{disc}(Q_S) \neq 0$ (il s'agit du *résultant* de Q_S et Q'_S). Cela peut convaincre que la condition voulue définit bien un ouvert, comme dans la question 1).

Remarque. Ce qui rend cette méthode nécessaire, c'est que l'on sait en théorie que S possède n valeurs propres, mais leur calcul est ardu car la recherche des racines d'un polynôme de degré n n'est pas chose facile. De plus, même si l'on sait trouver (par exemple avec la méthode QR) les racines λ_i, on n'aura qu'une approximation des racines. Et, du coup, lorsque l'on fera un système pour calculer les vecteurs propres, le déterminant de ce système sera une approximation de 0, mais pas 0. On ne pourra pas trouver de vecteurs propres (*i.e.* non nuls).

11.3 Polynômes orthogonaux

Exercice 87 (Méthode de quadrature de Gauss pour l'intégration)
Soit n un entier, $n > 0$. On munit l'espace $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur à n du produit scalaire :

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_0^1 \mathrm{PQ}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $(\mathrm{P}_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ obtenue à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de la base $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$.

1. Montrer que le polynôme P_n possède n racines distinctes dans $]0,1[$.
   On pourra introduire l'ensemble Φ des racines α de P_n, de multiplicité impaire, et telles que $\alpha \in]0,1[$. On étudiera ensuite le produit scalaire $\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{R}_n\rangle$ avec $\mathrm{R}_n := \prod_{\alpha\in\Phi}(\mathrm{X}-\alpha)$, avec la convention que R_n vaut 1 si Φ est vide.
2. Soit $\{\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ l'ensemble des racines de P_n et L_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux α_i. On pose $\lambda_i := \int_0^1 \mathrm{L}_i\,\mathrm{d}t$ pour tout i. Montrer l'égalité
$$\int_0^1 \mathrm{P}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}(\alpha_i),$$
   pour tout P dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, puis, pour tout P dans $\mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$.
3. Montrer que la formule est fausse en degré $2n$.

Soluce

1. On décompose P_n en $\mathrm{P}_n = a_n \prod_i (\mathrm{X}-\alpha_i)^{n_i}\mathrm{Q}$, où a_n est un réel non nul, où les α_i parcourent l'ensemble des racines de P_n appartenant à $]0,1[$, de multiplicité n_i, et où Q est un polynôme ne s'annulant pas sur $]0,1[$. Par construction, le polynôme $\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$ est un polynôme évidemment non nul, qui, par le théorème des valeurs intermédiaires, garde un signe constant sur $]0,1[$. Par continuité,
$$\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{R}_n\rangle = \int_0^1 \mathrm{P}_n\mathrm{R}_n\,\mathrm{d}t$$
   est un scalaire non nul, ce qui implique que $\mathrm{R}_n \notin \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Effectivement, par l'absurde, si $\mathrm{R}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, R_n serait orthogonal à P_n, puisque $\mathrm{P}_n^{\perp}$ est le sous-espace engendré par les P_k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, c'est-à-dire $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, puisque la construction de Gram-Schmidt implique que la famille (P_k) est échelonnée.
   Or, Φ est de cardinal au plus n, puisque P_n est de degré n (ceci est assuré par la méthode récursive de Gram-Schmidt). Conclusion, R_n est de degré n. Ceci prouve que Φ est de cardinal n. Le polynôme P_n possède donc n racines de multiplicité impaire dans $]0,1[$. Comme il est de degré n, la multiplicité est forcément égale à 1. D'où l'assertion.
2. On sait, voir [Algébrie, exercice I-1.2, 2)], que les formes linéaires ev_{α_i} constituées des évaluations en les α_i, constituent une base [4] de l'espace dual de l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

4. On rappelle que la base (anté-)duale est la base des polynômes interpolateurs de Lagrange.

Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par $\varphi(P) := \int_0^1 P\,dt$. On décompose φ dans la base $(\mathrm{ev}_{\alpha_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$: il existe $(\beta_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi = \sum_{j=1}^n \beta_j \,\mathrm{ev}_{\alpha_j}$. Il vient donc d'une part

$$\lambda_i = \varphi(L_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j \,\mathrm{ev}_{\alpha_j}(L_i) = \beta_i,$$

et d'autre part

$$\int_0^1 P(t)dt = \varphi(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \,\mathrm{ev}_{\alpha_i}(P) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i).$$

Donc, la formule voulue est valable sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
De plus, elle reste vraie pour P_n : d'un côté, $\int_0^1 P_n\,dt = \langle P_n, 1\rangle = \langle P_n, P_0\rangle = 0$, par orthogonalité ; de l'autre, $P_n(\alpha_i) = 0$ pour tout i, par construction.
Comme P_n est de degré n, la formule est valable pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$.
Reste à montrer qu'elle reste encore valable sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Pour cela, on considère P dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $P = P_nQ_n + R_n$ sa division euclidienne par P_n. Par une considération de degrés, on sait que $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il en résulte que $\int_0^1 P_nQ_n\,dt = \langle P_n, Q_n\rangle = 0$. Donc, comme $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 P\,dt = \int_0^1 R_n\,dt &= \sum_{j=1}^n \lambda_j R_n(\alpha_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j\big(P(\alpha_j) - P_n(\alpha_j)Q_n(\alpha_j)\big) = \sum_{j=1}^n \lambda_j P(\alpha_j).\end{aligned}$$

3. La formule est fausse en degré $2n$. En effet, soit $P = P_n^2$. Alors, le membre de gauche vaut $\langle P_n, P_n\rangle = 1$, et le membre de droite vaut 0.

Remarque. La méthode de quadrature de Gauss se décline à l'envi. Bien entendu, on peut remplacer l'intervalle $[0,1]$ par un intervalle $[a,b]$ quelconque. Ensuite, on peut remplacer les polynômes par des fonctions pour obtenir, non plus une égalité, mais une approximation de l'intégrale. Enfin, on peut remplacer la forme $\int_a^b P(t)Q(t)dt$ par la forme $\int_a^b P(t)Q(t)\varpi(t)dt$, où ϖ est une fonction continue (appelée *fonction de poids*[5]) qui ne change pas de signe sur l'intervalle $[a,b]$.

Exercice 88 (Polynômes de Tchebychev et décomposition de Cholesky)
On commence par rappeler certaines propriétés des *polynômes de Tchebychev de première espèce.* On définit par récurrence la suite de polynômes $(T_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X),\ T_0 = 1,\ T_1 = X$$

1. Montrer que pour $n \geqslant 1$, le polynôme T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} et que $T_n\big(\cos(t)\big) = \cos(nt)$ pour tout t réel.

5. Le boulet, mais strictement positif !

2. On munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur à n de la forme
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$
Montrer que l'on définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On considère la base orthonormée $(\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n)$ construite par le procédé de Gram-Schmidt, à partir de la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Montrer que l'on a, pour tout k :
$$\tilde{T}_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi}} T_0 & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_k & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \end{cases}$$

Soluce

1. Par une récurrence que l'on passe sous silence, T_n est bien un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} pour $n \geqslant 1$. Montrons par récurrence que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.

   La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la vraie jusqu'à l'ordre n. Alors,
$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 2\cos(t) T_n\big(\cos(t)\big) - T_{n-1}\big(\cos(t)\big) = 2\cos(t)\cos(nt) - \cos\big((n-1)t\big) \\ &= 2\frac{\cos(t+nt) + \cos(t-nt)}{2} - \cos\big((n-1)t\big) = \cos\big((n+1)t\big). \end{aligned}$$

2. Dans l'intégrale qui calcule $\langle P, Q\rangle$, la fonction $f(t) := \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ que l'on intègre n'est pas définie en ses bornes. Regardons ce qui se passe en 1, l'étude en -1 étant analogue.

   Si $P(1)$ ou $Q(1)$ est nul, on peut la prolonger par continuité en 1 par $f(0) = 0$. Sinon, elle est équivalente en 1^- à $\frac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$. On en déduit que l'intégrale converge.

   De plus, si $P = Q$ est non nul, f étant continue, positive, et non nulle sur $]-1, 1[$, on déduit $\langle P, P\rangle > 0$. La forme étant clairement bilinéaire, c'est un produit scalaire.

3. Montrons que l'on a, pour tout k :
$$\tilde{T}_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} T_1 & \text{si } k = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_k & \text{si } 2 \leqslant k \leqslant n \end{cases}$$

On calcule dans un premier temps le produit scalaire $\langle T_k, T_m\rangle$. À l'aide du changement de variables $t = \cos(\theta)$, il vient :

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{T}_k, \mathrm{T}_m \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{T}_k(t)\mathrm{T}_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\pi}^{0} \frac{\mathrm{T}_k\big(\cos(\theta)\big)\mathrm{T}_m\big(\cos(\theta)\big)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos(k\theta)\cos(m\theta)}{\sin(\theta)}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\cos(k\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big(\cos\big((k+m)\theta\big)+\cos\big((k-m)\theta\big)\Big)\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Si $k \neq m$, alors

$$\langle \mathrm{T}_k, \mathrm{T}_m \rangle = \frac{1}{2(k+m)}\Big[\sin\big((k+m)\theta\big)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2(k-m)}\Big[\sin\big((k-m)\theta\big)\Big]_0^{\pi} = 0$$

Si $k = m$, alors

$$\langle \mathrm{T}_k, \mathrm{T}_k \rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(\cos(2k\theta)+1\big)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } k = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

11.4 Approximation d'intégrales, erreurs

Cadre
On fixe un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}t.$$

Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^p$ pour un entier p, on note $\mu_p = \sup_{[a,b]}\left|f^{(p)}\right|$. Lorsque n est un entier naturel non nul, on pose :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \quad x_k^{(n)} = a + \frac{b-a}{n}k.$$

On remarque au passage que l'on a :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}, \quad x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} = \frac{b-a}{n}.$$

Lorsque n est fixé sans ambiguïté, on remplace $x_k^{(n)}$ par x_k.

Exercice 89 (Erreur dans la méthode des rectangles)
On pose, pour n entier naturel non nul :

$$\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

1. Interpréter.
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que pour tout entier n,

$$\left|\mathrm{I}-\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})}\right| \leqslant \frac{\mu_1(b-a)^2}{2n} \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{I}-\mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})}\right| \leqslant \frac{\mu_1(b-a)^2}{2n}.$$

3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$. Démontrer que

$$\mathrm{I}=\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})}+\frac{f(b)-f(a)}{2}\times\frac{b-a}{n}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \quad \text{et} \quad \mathrm{I}=\mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})}+\frac{f(a)-f(b)}{2}\times\frac{b-a}{n}+\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

4. Application numérique : $f(x)=1/(1+x)$ pour $x\in[0,1]$.

Soluce

1. Pour la méthode des rectangles « à gauche » (resp. « à droite ») qui donne lieu à la suite $(\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})})_{n\in\mathbb{N}}$), on fait comme si la fonction f était constante, égale à $f(x_k)$ (resp. $f(x_{k+1})$) sur chaque $[x_k,x_{k+1}]$. La méthode est exacte pour les fonctions constantes ($\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})}=\mathrm{I}=\mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})}$ pour tout n).
   Les deux méthodes donnent lieu à des sommes de Riemann : d'après la construction de l'intégrale, on sait que les deux suites convergent vers I. On va voir que la convergence est « en $1/n$ ».
2. Soit $k\in\{0,\dots,n-1\}$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x\in[x_k,x_{k+1}],\quad \left|f(x)-f(x_k)\right|\leqslant\mu_1(x-x_k),$$

   puis on intègre :

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x-(x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right| &= \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f(x)-f(x_k)\right)\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}}\mu_1(x-x_k)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mu_1(x_{k+1}-x_k)^2}{2}=\frac{\mu_1(b-a)^2}{2\,n^2}.\end{aligned}$$

   Pour n quelconque, on applique l'inégalité précédente à chaque $[x_k,x_{k+1}]$, puis l'inégalité triangulaire : on trouve n termes d'erreur $\mu_1(b-a)^2/n^2$:

$$\left|\mathrm{I}-\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}t-(x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right|\leqslant\frac{\mu_1(b-a)^2}{2n}.$$

3. Fixons $k\in\{0,\dots,n-1\}$ et $x\in[x_k,x_{k+1}]$. D'après le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe $c_k\in]x_k,x[$ tel que

$$f(x)-f(x_k)-(x-x_k)f'(x_k)=\frac{(x-x_k)^2}{2}f''(c_k),$$

   d'où :

$$\left|f(x)-f(x_k)-(x-x_k)f'(x_k)\right|\leqslant\frac{(x-x_k)^2}{2}\mu_2.$$

En intégrant sur $[x_k, x_{k+1}]$, qui est de largeur $(b-a)/n$, cela donne :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f(x_k) - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f'(x_k)\right| \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \mu_2.$$

En sommant sur k, il vient :

$$\left|\mathrm{I} - \mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})} - \frac{b-a}{2n} \times \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{6\,n^2}\mu_2.$$

On reconnaît la méthode des rectangles pour la fonction f'. Or on vient de prouver que

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big) = \big(f(b) - f(a)\big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

d'où enfin :

$$\mathrm{I} = \mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})} + \frac{b-a}{2n}\big(f(b) - f(a)\big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On montrerait de même que

$$\mathrm{I} = \mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})} - \frac{b-a}{2n}\big(f(b) - f(a)\big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

4. Appliquons cela à la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(1+x)$. Pour n fixé, on a :

$$\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

L'exemple est classique pour illustrer les sommes de Riemann : cette suite converge vers $\ln(2)$. On a $\mu_1 = 1$, donc la majoration de la question 2 donne mieux : $|\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})} - \ln 2| \leqslant 1/(2n)$.

Par la question 3, on a plus précisément :

$$(\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})} - \ln 2) \sim \frac{1}{4n} \text{ et } (\mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})} - \ln 2) \sim \frac{1}{4n}.$$

Exercice 90 (Erreur dans la méthode des trapèzes)
On reprend la notation, pour n entier naturel non nul :

$$\mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})} + \mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})}}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2}\right).$$

1. Interpréter.
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$. Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) f''(x)\mathrm{d}x.$$

3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que f'' est majorée par μ_2. Démontrer que
$$|\mathrm{I} - \mathrm{T}_n| \leqslant \frac{\mu_2(b-a)^3}{12\,n^2}.$$
4. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$. À l'aide de la formule de la moyenne, démontrer que
$$\mathrm{T}_n = \mathrm{I} + \frac{(b-a)^2}{12\,n^2}\big(f'(b) - f'(a)\big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$
5. Application numérique : $f(x) = 1/(1+x)$ pour $x \in [0,1]$.

Remarque. Le miracle apparent de la question 2 sera expliqué à la fin de l'exercice 93.

Soluce

1. Par construction, T_n est la moyenne $(\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})} + \mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})})/2$ pour tout indice n. On voit donc que T_n est la somme des aires des trapèzes indiqués sur la figure 11.3.

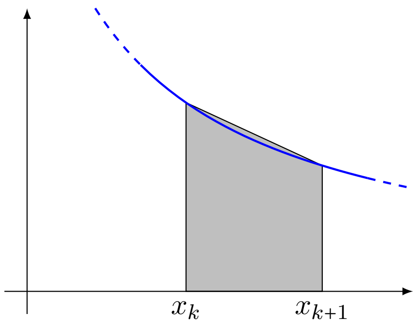


FIGURE 11.3 – Méthode des trapèzes

Cette remarque montre d'autre part que la suite (T_n) tend vers l'intégrale I. Plus précisément, d'après la question 3 de l'exercice 89, on a, pour f de classe $\mathscr{C}^2$, la majoration que les questions suivantes permettent d'améliorer :
$$|\mathrm{I} - \mathrm{T}_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{3\,n^2}.$$

Heuristiquement, pour la méthode des trapèzes, qui donne lieu à la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on fait comme si la fonction f était affine sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$. La méthode est donc exacte pour les fonctions affines : si f est affine, $\mathrm{T}_n = \mathrm{I}$ pour tout n.

2. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On a, en notant $c_k = (x_k + x_{k+1})/2$ et $\mathrm{J}_k^{(n)}$ l'expression à

évaluer :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_k^{(n)} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) f''(x)\mathrm{d}x \\
&= \Big[(x - x_k)(x_{k+1} - x) f'(x)\Big]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (-2x + x_k + x_{k+1}) f'(x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - c_k) f'(x)\mathrm{d}x \\
&= 2\Big[(x - c_k) f(x)\Big]_{x_k}^{x_{k+1}} - 2\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\big(f(x_{k+1}) + f(x_k)\big) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}$$

En sommant, on obtient l'expression suivante de l'erreur :

$$2(\mathrm{T}_n - \mathrm{I}) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{J}_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) f''(x)\mathrm{d}x.$$

3. On en déduit brutalement, par l'inégalité triangulaire et en majorant $|f''|$ par μ_2 :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I} - \mathrm{T}_n| &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x)\mu_2 \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\mu_2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left[\frac{(x - x_k)^2}{2}(x_{k+1} - x)\right]_{x_k}^{x_{k+1}} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)^2}{2}\mathrm{d}x\right) \\
&\leqslant \frac{\mu_2}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{6} = \frac{\mu_2 (b - a)^3}{12\,n^2}.
\end{aligned}$$

4. On repart de l'égalité :

$$\mathrm{T}_n - \mathrm{I} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(x) \cdot (x - x_k)(x_{k+1} - x)\mathrm{d}x.$$

Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$. La fonction f'' étant supposée continue et le polynôme $g_k : x \mapsto (x - x_k)(x_{k+1} - x)$ étant de signe constant sur $[x_k, x_{k+1}]$, la formule de la moyenne donne l'existence de $d_k \in \,]x_k, x_{k+1}[$ tel que

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x) f''(x)\,\mathrm{d}x &= f''(d_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x_{k+1} - x)\mathrm{d}x \\
&= f''(d_k)\frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{6}.
\end{aligned}$$

Il vient en sommant sur k :

$$\mathrm{T}_n - \mathrm{I} = \frac{(b - a)^2}{12\,n^2} \times \frac{b - a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(d_k),$$

expression où l'on reconnaît une somme de Riemann pour f'' qui converge vers l'intégrale de f'', c'est-à-dire vers $f'(b) - f'(a)$. Finalement :

$$\mathrm{I} - \mathrm{T}_n + \frac{(b - a)^3}{12\,n^2}\big(f'(b) - f'(a)\big) = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

5. Pour $x \in [0,1]$, soit $f(x) = 1/(1+x)$, d'où $f'(x) = -1/(1+x)^2$ et $f''(x) = 2/(1+x)^3$, ce qui permet de prendre $\mu_2 = 2$. On a pour tout n :

$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i}.$$

On peut donc annoncer fièrement : $|\mathrm{T}_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{6\,n^2}$ et mieux :

$$(\mathrm{T}_n - \ln 2) \sim \frac{1}{16\,n^2}.$$

Exercice 91 (Erreur dans la méthode du point-milieu)
On pose, pour n entier naturel non nul :

$$\mathrm{M}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big).$$

1. Interpréter.
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que pour tout entier n,

$$|\mathrm{I} - \mathrm{M}_n| \leqslant \frac{\mu_1 (b-a)^2}{4n}.$$

3. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$. Démontrer que pour tout entier n,

$$|\mathrm{I} - \mathrm{M}_n| \leqslant \frac{\mu_2 (b-a)^3}{24\,n^2}.$$

4. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^3$. Démontrer que

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{I} - \frac{(b-a)^2}{24\,n^2}\big(f'(b) - f'(a)\big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

5. Application numérique : $f(x) = 1/(1+x)$ pour $x \in [0,1]$.

Soluce

1. Au lieu de faire la moyenne des valeurs aux bords x_k et x_{k+1} de l'intervalle, comme dans la méthode des trapèzes, on prend la valeur à la moyenne des bords, $c_k = (x_k + x_{k+1})/2$. La méthode qui en résulte est exacte pour les constantes : si f est constante, $\mathrm{I} = \mathrm{T}_n$. Le petit miracle, c'est qu'elle est exacte pour les fonctions *affines* : si f est affine, $\mathrm{M}_n = \mathrm{I}$ pour tout n. La raison en est simple : comme l'intervalle est symétrique par rapport à son milieu (eh !), toutes les fonctions affines qui ont la même valeur en c_k ont la même intégrale sur $[x_k, x_{k+1}]$. Graphiquement, l'égalité des aires des triangles gris foncé de la figure 11.4 (au centre) montre que le rectangle et le trapèze (à gauche et à droite) ont la même aire ; algébriquement, toute fonction affine est somme d'une constante et de la fonction $x \mapsto x - c_k$, dont l'intégrale sur $[x_k, x_{k+1}]$ est nulle : $\big((x_k - c_k)^2 - (x_{k+1} - c_k)^2\big)/2 = 0$.

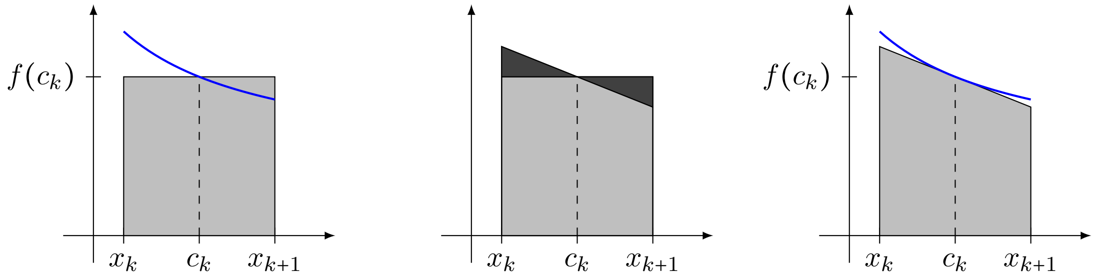


FIGURE 11.4 – La méthode du point-milieu est en $1/n^2$

Heuristiquement, cela nous indique pourquoi la méthode est meilleure que prévu : tout se passe comme si on remplaçait la courbe de la fonction par sa tangente au point-milieu $(c_k, f(c_k))$, qui a pour équation $y = f(c_k)+(x-c_k)f'(c_k)$. La remarque précédente s'écrit :

$$(x_{k+1} - x_k)f(c_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(c_k) + (x - c_k)f'(c_k)\big)\,\mathrm{d}x.$$

2. Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On commence par majorer l'erreur commise sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$\big|f(x) - f(c_k)\big| \leqslant \mu_1 |x - c_k|.$$

En intégrant sur $[x_k, x_{k+1}]$, cela donne :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f - (x_{k+1} - x_k)f(c_k)\right| \leqslant \mu_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x - c_k|\mathrm{d}x = \mu_1 \frac{(b-a)^2}{4n^2}.$$

En sommant sur k, on trouve :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{M}_n| \leqslant \mu_1 \frac{(b-a)^2}{4n}.$$

3. Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On commence par majorer l'erreur commise sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on a pour $x \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$\big|f(x) - f(c_k) - (x - c_k)f'(c_k)\big| \leqslant \frac{\mu_2}{2}(x - c_k)^2.$$

En intégrant sur $[x_k, x_{k+1}]$, vu que $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - c_k)f'(c_k)\mathrm{d}x = 0$, cela donne :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f - (x_{k+1} - x_k)f(c_k)\right| \leqslant \frac{\mu_2}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - c_k)^2\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{24\,n^3}.$$

En sommant sur k, on trouve :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{M}_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24\,n^2}.$$

4. Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Par l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, on a avec $\mu_3 = \sup_{[a,b]} |f^{(3)}|$:

$$\left| f(x) - f(c_k) - f'(c_k)(x - c_k) - \frac{f''(c_k)}{2}(x - c_k)^2 \right| \leqslant \frac{\mu_3}{6}|x - c_k|^3.$$

En intégrant sur $[x_k, x_{k+1}]$, cela donne :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f - f(c_k)(x_{k+1} - x_k) - \frac{f''(c_k)}{24}(x_{k+1} - x_k)^3 \right| \leqslant \frac{\mu_3}{6} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x - c_k|^3 \mathrm{d}x = \frac{\mu_3(b-a)^4}{48\,n^4}.$$

En sommant sur k, on obtient :

$$\left| \mathrm{I} - \mathrm{M}_n - \frac{(b-a)^2}{24\,n^2} \times \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_k) \right| \leqslant \frac{\mu_3(b-a)^4}{48\,n^3},$$

où l'on reconnaît sans plus guère de surprise la suite (M_n) pour la fonction f'', qui converge en $\mathrm{O}(1/n)$ d'après la question 2 :

$$\frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_k) = \int_a^b f''(x)\mathrm{d}x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) = f'(b) - f'(a) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où, en injectant :

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{I} - \frac{(b-a)^2}{24\,n^2}\big(f'(b) - f'(a)\big) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

5. Prenons $f(x) = 1/(1+x)$ si $x \in [0,1]$. On peut choisir $\mu_2 = 2$.

$$\mathrm{M}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{2k+1}{2n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2(n+k)+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{2}{2k+1}.$$

On peut donc annoncer : $|\mathrm{M}_n - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{24\,n^2}$. Mieux, on a : $(\mathrm{M}_n - \ln 2) \sim -\dfrac{1}{32\,n^2}$.

Exercice 92 (Trouver ou retrouver la méthode de Simpson)

1. Soit $c = (a+b)/2$. Soit E l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus 2 sur $[a,b]$.
   (a) Soit $(y_a, y_c, y_b) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que
   $$\mathrm{P}(a) = y_a, \quad \mathrm{P}(c) = y_c, \quad \mathrm{P}(b) = y_b.$$
   (b) Démontrer que pour toute fonction polynomiale P de degré au plus 2, on a :
   $$\frac{1}{b-a} \int_a^b \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\mathrm{P}(a) + \frac{2}{3}\mathrm{P}(c) + \frac{1}{6}\mathrm{P}(b).$$
   C'est la *formule des trois niveaux.*
   (c) Vérifier que la formule précédente est valable lorsque f est de degré 3.

(d) Rappeler l'heuristique de la méthode de Simpson et retrouver la suite associée.

2. Appliquer la méthode d'accélération de Romberg à la suite (T_n) de la méthode des trapèzes.
3. Par une combinaison linéaire adéquate entre méthode du point médian et méthode des trapèzes, éliminer le terme en $1/n^2$.

Soluce

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, l'évaluation $\mathrm{ev}_x : P \mapsto P(x)$ est une forme linéaire sur E. Il en résulte que l'application

$$E \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad P \longmapsto \big(P(a), P(c), P(b)\big)$$

est linéaire. Or, elle est injective car un polynôme de degré au plus 2 ayant 3 racines distinctes est nécessairement nul. Par égalité des dimensions à la source et au but, il en résulte qu'elle est bijective.

On peut être plus explicite en introduisant les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$L_a(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad L_c(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}, \quad L_b(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)},$$

qui ont été choisis pour que $L_x(x') = \delta_{x,x'}$ pour $x, x' \in \{a, c, b\}$. Le polynôme cherché est alors :

$$P(X) = y_a\, L_a(X) + y_c\, L_c(X) + y_b\, L_b(X).$$

Remarque. Cette question n'a qu'un intérêt heuristique, on pourrait s'en passer pour estimer l'erreur de la méthode de Simpson.

(b) *Première solution.* La formule est évidente pour les fonctions constantes (car $1/6 + 2/3 + 1/6 = 1$), facile pour la fonction $x \mapsto x$ et pas très difficile pour $x \mapsto x^2$ (voir ci-dessous) donc, par linéarité, elle est vraie sur E.

Facile à vérifier... mais pas à retrouver ! Voyons une méthode plus conceptuelle.

Deuxième solution (« conceptuelle »). On comprend la formule des trois niveaux comme une expression de la forme linéaire « valeur moyenne »

$$\mathrm{VM} \,:\, E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad P \longmapsto \frac{1}{b-a} \int_a^b P(x)\mathrm{d}x$$

comme combinaison linéaire de $(\mathrm{ev}_a, \mathrm{ev}_c, \mathrm{ev}_b)$.

On reprend les notations précédentes. On vient de montrer que la famille $(\mathrm{ev}_a, \mathrm{ev}_c, \mathrm{ev}_b)$ est libre, donc c'est une base du dual de E – c'est la base duale de (L_a, L_c, L_b). Cela prouve l'existence et l'unicité de (α, γ, β), coefficients de la forme linéaire VM dans cette base. On a de plus une expression pour les coefficients :

$$\mathrm{VM}(L_a) = \alpha\, \mathrm{ev}_a(L_a) + \gamma\, \mathrm{ev}_c(L_a) + \beta\, \mathrm{ev}_b(L_a) = \alpha, \quad \mathrm{VM}(L_c) = \gamma, \quad \mathrm{VM}(L_b) = \beta,$$

qu'il est alors facile mais ennuyeux de calculer.

*Troisième solution (*ad hoc*).*

Pour trouver α, γ, β tels que $\mathrm{VM} = \alpha\,\mathrm{ev}_a + \gamma\,\mathrm{ev}_c + \beta\,\mathrm{ev}_b$, on teste sur la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ de E :

$$\mathrm{P} = 1 : \qquad 1 = \frac{1}{b-a}\int_a^b 1\mathrm{d}x = \alpha + \gamma + \beta\,;$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{X} : \qquad \frac{a+b}{2} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\mathrm{d}x = \alpha\, a + \gamma\, \frac{a+b}{2} + \beta\, b\,;$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 : \qquad \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\mathrm{d}x = \alpha\, a^2 + \gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \beta\, b^2.$$

On récrit la dernière égalité sous la forme

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3} = \left(\alpha + \frac{\gamma}{4}\right) a^2 + \frac{\gamma}{2}\, ab + \left(\frac{\gamma}{4} + \beta\right) b^2.$$

En identifiant les cofficients (ce qui n'a aucune raison de marcher *a priori*), on trouve une solution, dont on vérifie qu'elle fonctionne ; c'est la seule d'après le début de la preuve :

$$\gamma = \frac{2}{3}, \qquad \alpha = \beta = \frac{1}{6}.$$

(c) Pour prouver la formule sur l'espace F des polynômes de degré au plus 3, il suffit de la prouver pour la fonction $\mathrm{Q} : x \mapsto (x-c)^3$, puisque $\mathrm{F} = \mathrm{E} \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{Q})$. Or elle est évidente (figure 11.5) :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-c)^3\,\mathrm{d}x = 0 = \frac{1}{6}(a-c)^3 + \frac{2}{3}(c-c)^3 + \frac{1}{6}(b-c)^3.$$

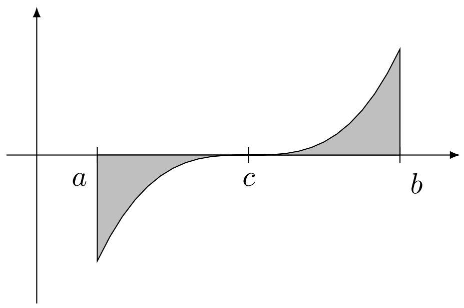


FIGURE 11.5 – La méthode de Simpson est en $1/n^4$

(d) Dans la méthode de Simpson, on fixe un entier non nul n et on reprend la subdivision régulière définie par les $x_k^{(n)} = x_{2k}^{(2n)}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, que l'on subdivise à nouveau avec $c_k^{(n)} = \frac{x_k^{(n)} + x_{k+1}^{(n)}}{2} = x_{2k+1}^{(2n)}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ (figure 11.6). Sur chaque intervalle $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, on fait comme si f était un polynôme de degré au plus 2 et on calcule l'intégrale avec la formule

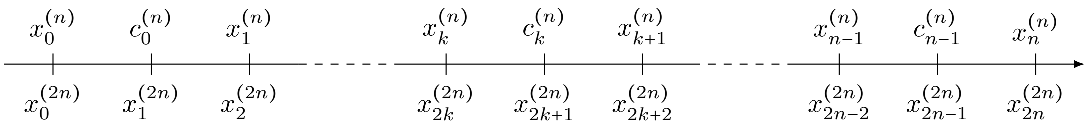


FIGURE 11.6 – Subdivisions...

des trois niveaux – la largeur de l'intervalle devient $(b-a)/n$. Autrement dit, on pose :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{6}f\big(x_k^{(n)}\big)+\frac{2}{3}f\big(c_k^{(n)}\big)+\frac{1}{6}f\big(x_{k+1}^{(n)}\big)\right)\\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{6}f\big(x_{2k}^{(2n)}\big)+\frac{2}{3}f\big(x_{2k+1}^{(2n)}\big)+\frac{1}{6}f\big(x_{2k+2}^{(2n)}\big)\right)\\
&= \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{6}\big(f(a)+f(b)\big)+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1}f\big(x_{2k+1}^{(2n)}\big)+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}f\big(x_{2k}^{(2n)}\big)\right].
\end{aligned}$$

2. Partant du fait que « la méthode des trapèzes est en $1/n^2$ » (exercice 90 3), on suppose que la différence $\mathrm{T}_n-\mathrm{I}$ admet un développement asymptotique de la forme
$$\mathrm{T}_n-\mathrm{I}=\frac{\mathrm{C}}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
(on l'a d'ailleurs démontré lorsque f est de classe $\mathscr{C}^3$ dans l'exercice 90 4). La méthode de Romberg consiste à faire intervenir T_{2n}. Plus précisément, on cherche une combinaison linéaire de T_n et T_{2n} de la forme $\mathrm{S}_n=\alpha\,\mathrm{T}_n+\beta\,\mathrm{T}_{2n}$ telle que :
— d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n=\mathrm{I}$ (c'est bien le moins !) ;
— d'autre part, $\mathrm{S}_n-\mathrm{I}=o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ (pour pouvoir dire qu'on a accéléré la convergence).
La première condition impose : $\alpha+\beta=1$. Pour la deuxième, constatons que :
$$\mathrm{T}_{2n}-\mathrm{I}=\frac{\mathrm{C}}{4n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$
et donc :
$$\alpha\,\mathrm{T}_n+\beta\,\mathrm{T}_{2n}-\mathrm{I}=\alpha(\mathrm{T}_n-\mathrm{I})+\beta(\mathrm{T}_n-\mathrm{I})=\alpha\,\frac{\mathrm{C}}{n^2}+\beta\,\frac{\mathrm{C}}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\mathrm{C}\,\frac{\alpha+\frac{\beta}{4}}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
On est amené à prendre $\alpha+\frac{\beta}{4}=0$. Ainsi, on est conduit à choisir :
$$\begin{cases}\alpha+\beta=1,\\ \alpha+\frac{\beta}{4}=0,\end{cases}\qquad\text{ou}\qquad\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{3}\\ \beta=\frac{4}{3},\end{cases}$$
ce qui donne :
$$\mathrm{S}_n=\frac{4\mathrm{T}_{2n}-\mathrm{T}_n}{3}.$$
Il se trouve que « c'est » la méthode de Simpson.

3. Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$, on a, pour n entier non nul :

$$\mathrm{T}_n = \mathrm{I} + \frac{(b-a)^2}{12\,n^2}\big(f'(b)-f'(a)\big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big),$$
$$\mathrm{M}_n = \mathrm{I} - \frac{(b-a)^2}{24\,n^2}\big(f'(b)-f'(a)\big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Par conséquent, il vient :

$$\frac{2\mathrm{M}_n + \mathrm{T}_n}{3} = \mathrm{I} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

Il se trouve que l'on retrouve ainsi la formule qui définit $\mathrm{S}_n = (2\mathrm{M}_n + \mathrm{T}_n)/3$.

Remarque. Dans ces deux dernières questions, vu que l'on a supprimé le terme en $1/n^2$, on s'attend à ce que la méthode donne un terme d'erreur en $1/n^3$. En réalité, on verra que l'erreur est en $1/n^4$.

L'exercice suivant propose une méthode uniforme pour majorer l'erreur et même en donner un équivalent [6] dans les méthodes des trapèzes, du point-milieu et de Simpson.

On reprend la notation, pour n entier naturel non nul :

$$\mathrm{S}_n = \frac{4\mathrm{T}_{2n} - \mathrm{T}_n}{3} = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{6} + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1} f\big(x_{2k+1}^{(2n)}\big) + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} f\big(x_{2k}^{(2n)}\big)\right].$$

Exercice 93 (Erreur dans la méthode de Simpson)

1. On suppose que $n = 1$. Démontrer
   — que si f est de classe $\mathscr{C}^2$, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que
   $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)\ ;$$
   — que si f est de classe $\mathscr{C}^2$, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que
   $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)\ ;$$
   — que si f est de classe $\mathscr{C}^4$, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que
   $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{1}{6}f(b)\right) = \frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi).$$
   Considérer l'erreur commise par la méthode sur l'intervalle $[c-x, c+x]$ (où $c = (a+b)/2$) comme une fonction de $x \in \big[0, (b-a)/2\big]$.
2. Retrouver les majorations d'erreurs des exercices 90 et 91. Démontrer que si f est de classe $\mathscr{C}^4$ et majorée par μ_4, alors :
   $$|\mathrm{I} - \mathrm{S}_n| \leqslant \frac{\mu_4(b-a)^5}{2880\,n^4}.$$

6. En général... Il peut arriver que la constante s'annule, on obtient alors un développement asymptotique.

3. À l'aide de la formule de la moyenne, retrouver les développements asymptotiques des exercices 90 et 91. Démontrer que si f est de classe $\mathscr{C}^4$,

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{I} + \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}\big(f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)\big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^5}\Big).$$

4. Application numérique : $f(x) = 1/(1+x)$ pour $x \in [0,1]$.

Idée-clé. *L'idée est simple : pour les trois méthodes, on étudie l'erreur commise sur un intervalle symétrique par rapport au milieu $(a+b)/2$ comme une fonction de la demi-largeur de l'intervalle. Pour cela, on dérive un certain nombre de fois et on intègre. L'étape consistant à écrire une formule exacte (une égalité) avec une dérivée de f évaluée en un point inconnu (plutôt qu'une inégalité) peut sembler artificielle mais elle servira pour donner un équivalent de l'erreur.*

Soluce

1. (a) Posons, pour $x \in \big[0, (b-a)/2\big]$:

$$\Delta_{\mathrm{t}}(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)\mathrm{d}t - 2x\frac{f(c+x)+f(c-x)}{2}.$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta_{\mathrm{t}}(0) = 0$. De plus, Δ_{t} est dérivable et, pour tout x :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{t}}'(x) &= f(c+x) + f(c-x) - \big(f(c+x)+f(c-x)\big) - x\big(f'(c+x) - f'(c-x)\big)\\ &= -x\big(f'(c+x) - f'(c-x)\big).\end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\eta \in [0,x]$ (qui dépend de x) tel que

$$\Delta_{\mathrm{t}}'(x) = -2xf''(\eta).$$

Notons $m_2 = \inf_{[a,b]} |f''|$ et $\mathrm{M}_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$. Alors, vu que $\Delta_{\mathrm{t}}(0) = 0$, on a pour tout x :

$$\frac{2m_2}{3}x^3 \leqslant -\Delta_{\mathrm{t}}(x) = -\int_0^x \Delta_{\mathrm{t}}' \leqslant \frac{2\mathrm{M}_2}{3}x^3.$$

En particulier, pour $x = (b-a)/2$, il vient :

$$\frac{m_2}{12}(b-a)^3 \leqslant -\mathrm{I} + (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{12}(b-a)^3.$$

Comme $|f''|$ est continue sur le segment $[a,b]$, les bornes m_2 et M_2 sont atteintes. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe ξ dans $[a,b]$ tel que

$$-\mathrm{I} + (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

(b) Posons, pour $x \in \big[0, (b-a)/2\big]$:

$$\Delta_{\mathrm{m}}(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)\mathrm{d}t - 2xf(c).$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta_{\mathrm{m}}(0) = 0$. De plus, Δ_{m} est dérivable et, pour tout x :

$$\Delta'_{\mathrm{m}}(x) = f(c+x) + f(c-x) - 2f(c).$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta'_{\mathrm{m}}(0) = 0$. De plus, Δ'_{m} est dérivable et, pour tout x :

$$\Delta''_{\mathrm{m}}(x) = f'(c+x) - f'(c-x).$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\eta \in [0, x]$ (qui dépend de x) tel que

$$\Delta''_{\mathrm{m}}(x) = 2xf''(\eta).$$

On obtient en intégrant ($\Delta'_{\mathrm{m}}(0) = 0$ et $\Delta_{\mathrm{m}}(0) = 0$) :

$$m_2 x^2 \leqslant \Delta'_{\mathrm{m}}(x) \leqslant \mathrm{M}_2 x^2$$

puis

$$\frac{m_2}{3}x^3 \leqslant \Delta_{\mathrm{m}}(x) \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{x}^{3}.$$

En prenant $x = (b-a)/2$, on trouve :

$$\frac{m_2}{24}(b-a)^3 \leqslant \mathrm{I} - (b-a)f'(c) \leqslant \frac{\mathrm{M}_2}{24}(b-a)^3,$$

d'où l'existence du $\xi \in [a, b]$ cherché par le théorème des valeurs intermédiaires.

(c) Posons, pour $x \in \big[0, (b-a)/2\big]$:

$$\Delta_{\mathrm{S}}(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)\mathrm{d}t - \frac{2x}{6}\big(f(c-x) + 4f(c) + f(c+x)\big).$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta_{\mathrm{S}}(0) = 0$. De plus, Δ_{S} est dérivable et, pour tout x :

$$\begin{aligned}\Delta'_{\mathrm{S}}(x) &= f(c+x) + f(c-x) - \frac{1}{3}\big(f(c+x) + f(c-x)\big) - \frac{x}{3}\big(f(c+x) - f(c-x)\big)\\ &= \frac{2}{3}f(c+x) + \frac{2}{3}f(c-x) - \frac{4}{3}f(c) - \frac{x}{3}\big(f'(c+x) - f'(c-x)\big).\end{aligned}$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta'_{\mathrm{S}}(0) = 0$. De plus, Δ'_{S} est dérivable et, pour tout x :

$$\begin{aligned}\Delta''_{\mathrm{S}}(x) &= \frac{2}{3}f'(c+x) + \frac{2}{3}f'(c-x) - \frac{1}{3}\big(f'(c+x) - f'(c-x)\big) - \frac{x}{3}\big(f''(c+x) + f''(c-x)\big)\\ &= \frac{1}{3}\big(f'(c+x) - f'(c-x)\big) - \frac{x}{3}\big(f''(c+x) + f''(c-x)\big).\end{aligned}$$

Il sera utile de remarquer que $\Delta''_{\mathrm{S}}(0) = 0$. De plus, Δ''_{S} est dérivable et, pour tout x :

$$\begin{aligned}\Delta^{(3)}_{\mathrm{S}}(x) &= \frac{1}{3}\big(f''(c+x) + f''(c-x)\big) - \frac{1}{3}\big(f''(c+x) + f''(c-x)\big)\\ &\quad - \frac{x}{3}\big(f^{(3)}(c+x) - f^{(3)}(c-x)\big)\\ &= -\frac{x}{3}\big(f^{(3)}(c+x) - f^{(3)}(c-x)\big).\end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\eta \in [0, x]$ (qui dépend de x) tel que $f^{(3)}(c+x) - f^{(3)}(c-x) = 2xf^{(4)}(x)$, c'est-à-dire :

$$\Delta_{\mathrm{S}}^{(3)}(x) = -\frac{2x^2}{3}f^{(4)}(\eta).$$

Définissons m_4 et M_4 comme les bornes supérieure et inférieure de $f^{(4)}$. L'encadrement $m_4 \leqslant f^{(4)}(\xi) \leqslant \mathrm{M}_4$ donne en intégrant $(\Delta_{\mathrm{S}}''(0) = 0)$:

$$\frac{2x^3}{9}m_4 \leqslant -\Delta_{\mathrm{S}}''(x) = -\int_0^x \Delta_{\mathrm{S}}^{(3)} \leqslant -\frac{2x^3}{9}\mathrm{M}_4,$$

puis $(\Delta_{\mathrm{S}}'(0) = 0)$:

$$\frac{x^4}{18}m_4 \leqslant -\Delta_{\mathrm{S}}'(x) = -\int_0^x \Delta_{\mathrm{S}}'' \leqslant -\frac{x^4}{18}\mathrm{M}_4,$$

puis $(\Delta_{\mathrm{S}}(0) = 0)$:

$$\frac{x^5}{90} \leqslant -\Delta_{\mathrm{S}}(x) = \int_0^x \Delta_{\mathrm{S}}' \leqslant -\frac{x^5}{90}\mathrm{M}_4.$$

Pour $x = (b-a)/2$, il vient :

$$\frac{(b-a)^5}{90 \times 32}m_4 \leqslant -\mathrm{I} + \frac{b-a}{6}\big(f(a) + 4f(c) + f(b)\big) \leqslant \frac{(b-a)^5}{90 \times 32}\mathrm{M}_4.$$

La continuité de $f^{(4)}$ donne, avec le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence de ξ dans $[a, b]$ tel que

$$-\mathrm{I} + (b-a)\Big(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(c) + \frac{1}{6}f(b)\Big) = \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi).$$

2. On note $\mu_2 = \sup_{[a,b]}|f''|$ et on définit μ_4 à l'avenant. Pour la méthode des trapèzes, on transforme l'égalité de la question 1 sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ en inégalité :

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} \times \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\,n^3}\mu_2,$$

puis on somme sur k, ce qui donne avec l'inégalité triangulaire :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{T}_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\mu_2.$$

Pour la méthode du point médian, on obtient de même :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{M}_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24\,n^2}\mu_2.$$

Enfin, pour la méthode de Simpson, on trouve :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{S}_n| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}\mu_4.$$

3. Pour préciser la majoration, on utilise l'égalité de la question 1. Pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$, soit ξ_k un point de $[x_k, x_{k+1}]$ pour lequel

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} \times \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3} f''(\xi_k).$$

On trouve alors en sommant :

$$\mathrm{I} - \mathrm{T}_n = -\frac{1}{12} \times \frac{(b-a)^2}{n^2} \times \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k).$$

On reconnaît une somme de Riemann pour la fonction f'', qui converge vers $\int_a^b f''(t)\mathrm{d}t = f'(b) - f'(a)$. Cela donne :

$$\mathrm{I} - \mathrm{T}_n = -\frac{(b-a)^2}{12\,n^2}(f'(b) - f'(a)) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

C'est un tout petit peu moins précis que certaines des méthodes précédentes, où le terme d'erreur était $\mathrm{O}(1/n^3)$ au lieu de $o(1/n^2)$.

Pour les méthodes du point médian et de Simpson, ces arguments donnent immédiatement :

$$\mathrm{I} - \mathrm{M}_n = \frac{(b-a)^2}{24\,n^2}(f'(b) - f'(a)) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$
$$\mathrm{I} - \mathrm{S}_n = -\frac{(b-a)^4}{2880\,n^4}(f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

4. Avec $f(x) = 1/(1+x)$ pour $x \in [0,1]$, on trouve $f^{(3)}(x) = -6/(1+x)^4$ et $f^{(4)}(x) = 24/(1+x)^5$, d'où $\mu_4 = 24$ et $f'(1) - f'(0) = 45/8$. Il vient :

$$|\ln 2 - \mathrm{S}_n| \leqslant \frac{1}{120\,n^4} \quad \text{et mieux :} \quad (\ln 2 - \mathrm{S}_n) \sim -\frac{1}{512\,n^4}.$$

Remarque (noyau de Peano). Repartons de l'expression de la dérivée de l'erreur $\Delta_{\mathrm{t}}'(x)$ pour $x \in [0, (b-a)/2]$ (avec $c = (a+b)/2$) et écrivons :

$$\Delta_{\mathrm{t}}'(x) = -x\big(f'(c+x) - f'(c-x)\big) = -x\int_{c-x}^{c+x} f''(t)\mathrm{d}t.$$

On intègre par parties dans cette nouvelle expression de $\Delta_{\mathrm{t}}(x)$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{t}}(x) &= \int_0^x -t\left(\int_{c-t}^{c+t} f''(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{t^2}{2}\int_{c-t}^{c+t} f''\right]_0^x + \int_0^x \frac{t^2}{2}\big(f''(c+t) + f''(c-t)\big)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{x^2}{2}\int_{c-x}^{c+x} f'' + \int_0^x \frac{t^2}{2} f''(c+t)\mathrm{d}t - \int_0^{-x} \frac{t^2}{2} f''(c+t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

de sorte qu'avec $x = (b-a)/2$, on trouve par changement de variable $u = c+t$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{t}}\Big(\frac{b-a}{2}\Big) &= -\frac{1}{2}\int_a^b \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2 f''(u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_a^b (u-c)^2 f''(u)\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a) f''(u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Cela explique la formule magique dans la question 2 de l'exercice 90. Des calculs semblables (moins agréables) donnent des formules (moins agréables) pour l'erreur des méthodes du point milieu et de Simpson. On peut les généraliser pour chaque méthode d'intégration reposant sur une subdivision en termes du *noyau de Peano*. Voir par exemple [3, chapitre III] ou [9, chap. 8].

Exercice 94 (Synthèse des méthodes précédentes)
Raconter ses dernières vacances en Analystan.

Soluce
On interprète la méthode X, ou plus précisément la suite de terme général $\frac{1}{b-a}\mathrm{X}_n$, comme un barycentre des $f(x_i^{(n)})$ ou des $f(x_j^{(2n)})$,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{b-a}\mathrm{X}_n = \sum_{k=0}^{n} p_k^{(n)}\, f(x_k^{(n)}) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{b-a}\mathrm{X}_n = \sum_{\ell=0}^{2n} p_\ell^{(2n)}\, f(x_\ell^{(2n)}),$$

où les poids $(p_k^{(n)})_{0\leqslant k\leqslant n}$ ou $(p_\ell^{(n)})_{0\leqslant \ell\leqslant 2n}$ sont donnés par le tableau de la figure 11.7.

sub-divisions	$x_0^{(2n)}$ $x_0^{(n)}$	$x_1^{(2n)}$	$x_2^{(2n)}$ $x_1^{(n)}$	$x_3^{(2n)}$	$\cdots$ $\cdots$	$x_{2n-3}^{(2n)}$	$x_{2n-2}^{(2n)}$ $x_{n-1}^{(n)}$	$x_{2n-1}^{(2n)}$	$x_{2n}^{(2n)}$ $x_n^{(n)}$
$\frac{1}{b-a}\mathrm{R}_n^{(\mathrm{g})}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$		$\cdots$		$\frac{1}{n}$		0
$\frac{1}{b-a}\mathrm{R}_n^{(\mathrm{d})}$	0		$\frac{1}{n}$		$\cdots$		$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$
$\frac{1}{b-a}\mathrm{T}_n$	$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{n}$		$\cdots$		$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{2n}$
$\frac{1}{b-a}\mathrm{T}_{2n}$	$\frac{1}{4n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$		$\cdots$		$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{4n}$
$\frac{1}{b-a}\mathrm{M}_n$		$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$	
$\frac{1}{b-a}\mathrm{S}_n$	$\frac{1}{6n}$	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{2}{3n}$	$\cdots$	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{3n}$	$\frac{2}{3n}$	$\frac{1}{6n}$

FIGURE 11.7 – Comparaison des méthodes classiques d'intégration

On retrouve facilement les formules suivantes, valables pour tout n :

$$\mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{R}_n^{(g)} + \mathrm{R}_n^{(d)}}{2}, \quad \mathrm{S}_n = \frac{4\mathrm{T}_{2n} - \mathrm{T}_n}{3} = \frac{\mathrm{T}_n + 2\mathrm{M}_n}{3}.$$

Remarque. D'autres méthodes font intervenir des subdivisions non régulières, par exemple :

— la méthode de Monte Carlo consiste à tirer n points $(x_1, \ldots, x_n)$ au hasard dans $[a, b]$ selon une loi de probabilité uniforme et à prendre pour approximation de l'intégrale la moyenne $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_i)$; grâce au théorème de la limite centrale, on peut montrer que la convergence est en $1/\sqrt{n}$;
  l'intérêt de cette méthode est double :
  — même pour des fonctions non dérivables, la convergence est en $1/\sqrt{n}$, ce qui est meilleur que la méthode des rectangles (pas de borne explicite sans hypothèse de dérivabilité) ;
  — en dimension supérieure, c'est-à-dire pour évaluer des intégrales multiples, il n'y a pas d'analogue des méthodes que l'on vient de voir : les méthodes de type Monte Carlo sont les seules disponibles ;
— la méthode des quadratures de Gauss, dans lesquels les points $x_k^{(n)}$ sont les racines de polynômes orthogonaux et les poids $p_k^{(n)}$ sont les intégrales de polynômes interpolateurs de Lagrange.

Chapitre 12

Probabilités

12.1 Généralités

Exercice 95 (Promenade dans le hasard)
On considère une particule p qui se déplace le long de $\mathbb{Z}$ de la façon suivante. À l'instant $t = 0$, elle se situe en 0. On suppose que si à un instant quelconque $t = k \in \mathbb{N}$, la particule se trouve en $\ell \in \mathbb{Z}$, alors, à l'instant $t = k+1$, la probabilité pour que la particule se trouve en $\ell + 1$ est $\frac{1}{2}$ et la probabilité pour que la particule se trouve en $\ell - 1$ est $\frac{1}{2}$.

Dans la suite, pour $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note :

- X_k la variable aléatoire décrivant la position de p à l'instant $t = k$, et $Y_k := X_k - X_{k+1}$;
- Z_k, la variable aléatoire qui vaut 1 si la particule p se trouve en 0 (en Zéro), et 0 sinon ;
- U_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où la particule p passe par 0 entre les temps $t = 0$ et $t = 2n$, c'est-à-dire $U_n = \sum_{k=0}^{2n} Z_k$.

Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent en l'infini du nombre moyen de passages de la particule p en 0 après $2n$ déplacements.

Pour tout ce qui suit, on fixe $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $\dfrac{Y_k + 1}{2}$? et la variable $\dfrac{X_n + n}{2}$?
2. Montrer que
$$\mathbf{P}(Z_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}, \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Z_{2k+1} = 1) = 0.$$
3. On va trouver une formule donnant l'espérance de la variable U_n. Dans la suite, on note
$$p_k := \mathbf{P}(Z_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$$
   (i) Établir une relation entre p_k et p_{k+1}.
   (ii) En déduire une formule pour $\mathbf{E}(U_n)$.
4. En déduire que
$$\mathbf{E}(U_n) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

Soluce

Fixons donc $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Notons tout d'abord que $X_0 = 0$, et $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Étudions d'abord la loi de la variable $Y_k = X_k - X_{k-1}$. Comme la particule p parcourt $\mathbb{Z}$ en faisant des sauts de 1, Y_k ne peut prendre que 1 ou -1 comme valeurs[1]. Au vu de la loi de la variable aléatoire X_k, on en déduit que
$$\mathbf{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2}.$$
On en déduit alors que la variable $\frac{Y_k+1}{2}$ peut prendre les valeurs 0 et 1, toutes deux avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Autrement dit,
$$\frac{Y_k + 1}{2} \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).$$
Par suite, comme on avait
$$X_n = \sum_{i=1}^n Y_i,$$
on en déduit que
$$\frac{X_n + n}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i + 1}{2}$$
est somme de n termes de variables de Bernoulli ; en conclusion, la variable aléatoire $\frac{X_n+n}{2}$ suit une loi binomiale, de paramètres $\left(n, \frac{1}{2}\right)$:
$$\frac{X_n + n}{2} \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

2. Par définition des variables aléatoires Z_k, qui vaut 1 quand p est en 0, et 0 sinon, et X_k, qui décrit la position de la particule sur $\mathbb{Z}$, on a :
$$Z_k = 1 \text{ si et seulement si } X_k = 0.$$
Comme on avait la formule
$$X_k = \sum_{i=1}^k Y_i,$$
on obtient l'équivalence
$$Z_{2k+1} = 1 \iff X_{2k+1} = 0 \iff \sum_{i=1}^{2k+1} Y_i = 0. \tag{$\star$}$$
Or, la variable Y_k est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On a donc
$$Y_k \equiv 1 \pmod 2.$$
Ainsi, on a
$$X_{2k+1} = \sum_{i=1}^{2k+1} Y_i \equiv 2k + 1 \equiv 1 \pmod 2.$$

1. Concrètement, la variable Y_k décrit le saut de la particule p sur $\mathbb{Z}$.

En considérant de plus l'équivalence $(\star)$ précédente, on en déduit que

$$Z_{2k+1} = 0,$$

et donc

$$\mathbf{P}(Z_{2k+1} = 1) = 0.$$

De plus, comme la variable $\frac{Y_K+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, et comme la variable $\frac{X_n+n}{2}$ suit une loi binomiale $\mathbb{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ par la question précédente, on a

$$\mathbf{P}(Z_{2k} = 1) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} Y_i = 1\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{2k} \frac{Y_i + 1}{2} = k\right) = \mathbf{P}\left(\frac{X_{2k} + 2k}{2} = k\right) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-k},$$

et donc,

$$\mathbf{P}(Z_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}.$$

3. (i) Calculons le quotient

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{4}\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} \times \frac{(k!)^2}{(2k)!} = \frac{1}{4} \times \frac{2(k+1)(2k+1)}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2(k+1)}.$$

On en déduit la relation suivante :

$$2(k+1)p_{k+1} - 2kp_k = p_k.$$

(ii) En sommant l'égalité obtenue précédemment de 1 à n, on obtient par télescopage :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(U_n) = \mathbf{E}\left(\sum_{\ell=0}^{2n} Z_\ell\right) &= \sum_{\ell=0}^{2n}\big(1 \times \mathbf{P}(Z_\ell = 1) + 0 \times \mathbf{P}(Z_\ell = 0)\big) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(Z_{2k} = 1)\\
&= \sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n}\big(2(k+1)p_{k+1} - 2kp_k\big)\\
&= 2(n+1)p_{n+1} - 2 \times 0 \times p_0 = 2(n+1)p_{n+1}\\
&= 2(n+1)\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1} = 2(n+1)\frac{1}{4^{n+1}}\frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2}\\
\mathbf{E}(U_n) &= \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

4. Ici, utilisons la formule de Stirling, qui donne un équivalent en l'infini de $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On a alors :

$$\frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} \sim \frac{2n}{4^n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}\left(\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)^2 \sim \frac{2n}{4^n}4^n\frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

Ainsi, on obtient bien

$$\mathbf{E}(U_n) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

Remarque. Si l'on prend par exemple $n = 100$, ce résultat dit qu'après 200 déplacements, la particule sera passée en moyenne un peu plus de 11 fois par 0... Incroyable, non ?

12.2 Processus de Galton-Watson

Exercice 96
Partie I – Somme aléatoire de variables aléatoires, formule de Wald

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de X et N une variable aléatoire indépendante des X_i et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega),$$

avec la convention usuelle $S(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$.

1. Soit G_X, G_S et G_N les séries génératrices de X, S et N. Montrer que
$$G_S = G_N \circ G_X$$
2. On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et que $E(S) = E(N)E(X)$.

Soluce

1. La fonction génératrice de G_S est définie au moins sur l'intervalle $[-1, 1]$ et, pour $t \in [-1, 1]$,
$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S = n)t^n$$
La formule des probabilités totales appliquée au système complet $(N = k)_{k\in\mathbb{N}}$ permet d'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S = n \cap N = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_k = n \cap N = k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_k = n)\mathbf{P}(N = k),\end{aligned}$$
la dernière égalité provenant de l'indépendance de $X_1 + \ldots + X_k$ et de N [2]. Posons alors $u_{n,k} = \mathbf{P}(S = n)\mathbf{P}(N = k)t^n$; la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable puisque $|u_{n,k}| \leqslant \mathbf{P}(S = n)\mathbf{P}(N = k) := v_{n,k}$ et que $v_{n,k}$ est le terme général d'une famille sommable (toujours grâce à formule des probabilités totales). On peut donc permuter les deux sommes dans la formule suivante :
$$\begin{aligned}G_S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_k = n)\mathbf{P}(N = k)t^n\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = k) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_k = n)t^n\end{aligned}$$

2. C'est le lemme dit « des coalitions ».

puis utiliser les fonctions génératrices pour écrire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{N}=k) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X}_1+\ldots+\mathrm{X}_k=n) t^n=\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{N}=k)\, \mathrm{G}_{\mathrm{X}_1+\ldots+\mathrm{X}_k}(t)$$

mais, par indépendance des X_i, $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1+\ldots+\mathrm{X}_k}=\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1} \times \cdots \times \mathrm{G}_{\mathrm{X}_k}=(\mathrm{G}_{\mathrm{X}})^k$, et notre formule devient :

$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{N}=k)(\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t))^k=\mathrm{G}_{\mathrm{N}}(\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t))$$

qui est le résultat voulu.

2. Si les X_i et N possèdent une espérance, alors les fonctions G_{N} et G_{X} sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc G_{S} l'est, et

$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}}'(1)=\mathrm{G}_{\mathrm{N}}'(\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(1))\ \mathrm{G}_{\mathrm{X}}'(1)$$

Comme $\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(1)=1$, la formule précédente montre que S possède une espérance et que $\mathrm{E}(\mathrm{S})=\mathrm{E}(\mathrm{N})\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

Remarque. On peut montrer que si X et N possèdent un moment d'ordre 2, alors S possède un moment d'ordre 2 et $\mathrm{V}(\mathrm{S})=\mathrm{V}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{N})+\mathrm{E}(\mathrm{X})^2\mathrm{V}(\mathrm{N})$.

Exercice 97
Partie II – Élémentaire, mon cher Galton !

Le but de cette partie est décrire le processus dit de Galton-Watson, ou processus de branchement. Il s'agit d'étudier la dynamique d'une population issue d'un seul individu. Le temps est ici discrétisé. Au temps initial, on a donc un individu ; à l'instant suivant, celui-ci donne naissance à un certain nombre de descendants, puis meurt. Et le processus se répète pour chaque individu de la nouvelle génération. On suppose que la loi du nombre de descendants est la même pour chaque individu, et que ce nombre est indépendant de la descendance des autres individus.

Formalisons le problème : on modélise le temps par une variable $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire discrète sur $\mathbb{N}$, telle que $\mathbf{P}(\mathrm{X}=k)=p_k$, pour $k \in \mathbb{N}$. Soit $(\mathrm{X}_i^n)_{n \geqslant 0, i \geqslant 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et suivant la même loi que X. On fait l'hypothèse supplémentaire que, pour tout $i \geqslant 1$, et tout $n \geqslant 0$, X_i^n admet un moment d'ordre 2. Notons enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus à la génération n.

À l'instant initial $n=0$, le nombre d'individus est $\mathrm{Z}_0=1$; au temps n, nous avons Z_n individus, qui engendrent chacun $(\mathrm{X}_i^n)_i$ descendants, donc au temps $n+1$, le nombre d'individus est

$$\mathrm{Z}_{n+1}=\sum_{i=1}^{\mathrm{Z}_n} \mathrm{X}_i^n,$$

avec bien entendu $\mathrm{Z}_{n+1}=0$ dès que $\mathrm{Z}_n=0$.

Pour la suite, on désigne par m l'espérance de X, G, resp. G_n, la fonction génératrice de X (qui est donc aussi celle des X_i^n), resp. de Z_n et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \mathbf{P}(Z_n = 0).$$

Le problème consiste à étudier la probabilité de l'évènement M : « la population finit par s'éteindre ».

1. **Convergence de la suite (x_n) vers la probabilité d'extinction.**
   Montrer que la suite (x_n) est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \mathbf{P}(M)$.
2. **Relations de récurrence.**
   Établir les formules suivantes, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$G_{n+1} = G_n \circ G \quad \text{puis} \quad G_n = G \circ G \circ \ldots \circ G \quad (n \text{ facteurs}).$$
   En déduire que la suite (x_n) vérifie $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = G(x_n)$.
3. **Étude de la suite (x_n).**
   Montrer que la suite (x_n) converge la plus petite racine, notée r, de l'équation $G(x) = x$ dans $[0, 1]$.
4. **Probabilité d'extinction en fonction de la valeur de $m = G'(1)$.**
   En considérant la fonction $\varphi : t \mapsto G(t) - t$, montrer que si $m \leqslant 1$, alors $r = 1$ et que si $m > 1$, alors $r < 1$.
   Discuter alors, en fonction de m, de la probabilité d'extinction de la population.
5. **Évolution de la population.**
   On étudie pour finir la valeur moyenne de la population à la n-ième génération, c'est-à-dire $\mu_n = E(Z_n)$.
   Exprimer cette valeur moyenne en fonction de m et de n puis conclure quant à l'évolution de la population dans les situations vues précédemment.

Soluce

1. **Convergence de la suite (x_n) vers la probabilité d'extinction.**
   L'évènement M s'écrit comme l'union des évènements $Z_n = 0$:
   $$M = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z_n = 0\}.$$
   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$, la suite des évènements $(Z_n = 0)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc, en vertu du théorème de continuité croissante, (x_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} x_n = \mathbf{P}(M)$.
2. **Relations de récurrence.**
   — Puisque $Z_0 = 1$, $G_0 = \mathrm{Id}$.
   — Les X_i^n et Z_n satisfont aux conditions d'applications de la formule de Wald, ainsi la relation $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n$ entraine $G_{n+1} = G_n \circ G$ puis une récurrence immédiate permet de conclure que
   $$G_n = G \circ G \circ \ldots \circ G.$$

On en déduit aussitôt que $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = G_{n+1}(0) = G(G_n(0)) = G(x_n)$.

3. **Étude de la suite (x_n).**
L'ensemble des points fixes dans $[0,1]$ de G est un fermé borné non vide (il contient 1), il a donc un plus petit élément r. Montrons que (x_n) converge vers r.
— Réglons d'emblée le cas $G(0) = 0$. Dans ce cas, la suite (x_n) est constante, elle converge bien vers la plus petite racine de $G(x) = x$. Ce cas correspond à la situation où, à chaque génération, un individu donne toujours naissance à (au moins) un descendant ; l'extinction n'a jamais lieu.
— Supposons (pour toute la suite) que $G(0) > 0$. Notons, vu l'existence pour X d'un moment d'ordre 2, que G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$; par ailleurs G est clairement croissante sur $[0,1]$, elle transforme l'intervalle $[0,r]$ en $[G(0), G(r)] \subset [0,r]$. La suite (x_n) est donc à valeurs dans $[0,r]$ et, puisqu'elle est convergente, elle converge vers un point fixe de G qui ne peut être que r.

4. **Probabilité d'extinction en fonction de la valeur de $m = G'(1)$.**
La fonction G est positive ; φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et, pour tout $t \in [0,1[$,

$$\varphi'(t) = G'(t) - 1, \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = G''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(X = k)t^{k-2}.$$

(a) Supposons $m \leqslant 1$ (on parle de système critique ou sous-critique). S'il existe $t \in]0,1[$, tel que $G''(t) = 0$, alors $P(X = k) = 0$ pour tout $k \geqslant 2$ et alors $G'' = 0$; donc $G(t) = 1 + m(t-1)$ et on voit alors que si $m = 1$, $G(t) = t$ ce qui a été exclu (se rappeler que $G(0) > 0$) et que si $m < 1$, l'équation $G(x) = x$ n'admet que 1 pour solution. Sinon, $G'' > 0$ sur $]0,1[$, donc φ' est strictement croissante sur $[0,1]$ et, puisque $\varphi'(1) = G'(1) - 1 \leqslant 0$, $\varphi' < 0$ sur $[0,1[$. En conclusion, φ est strictement décroissante sur $[0,1]$ et par conséquent, pour tout $t \in [0,1[$, $\varphi(t) > \varphi(1) = G(1) - 1 = 0$, ce qui montre bien que l'unique solution dans $[0,1]$ de l'équation $G(x) = x$ est $r = 1$.

(b) Supposons maintenant $m > 1$ (on parle de système critique ou sur-critique). Cette fois φ' est strictement croissante sur $[0,1]$ avec $\varphi'(0) = G'(0) - 1 = P(X = 1) - 1 < 0$ (se rappeler que $G \neq \mathrm{Id}$) et $\varphi'(1) = G'(1) - 1 = m - 1 > 0$, φ' s'annule exactement une fois sur $]0,1[$ en un certain α. L'étude des variations de φ montre alors qu'elle s'annule une fois sur $]0,\alpha[$. Conclusion : $r \in]0,1[$.

L'étude précédente permet de conclure que :
— Si $m \leqslant 1$, $\mathbf{P}(M) = 1$, donc la population va presque sûrement disparaître.
— Si $m > 1$, la probabilité de disparition de la population est strictement inférieure à 1 et elle n'est nulle que si $P(X = 0) = 0 = G(0)$ (cas réglé auparavant).

Remarque. Pour la question précédente, un autre argument (efficace) est le suivant : G est convexe donc φ l'est aussi...

5. **Évolution de la population**
Puisque

$$\begin{aligned}\mu_{n+1} &= E(Z_{n+1}) = G'_{n+1}(1) = (G \circ G_n)'(1) \\ &= G'(G_n(1)).G'_n(1) = G'(1).G'_n(1) = m\,E(Z_n) = m\,\mu_n,\end{aligned}$$

on obtient, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n = \mathrm{E}(\mathrm{Z}_n) = m^n.$$

Cela permet de conclure que :
— si $m < 1$, alors la population moyenne tend rapidement vers 0 ;
— si $m > 1$, alors la population moyenne tend rapidement vers l'infini ;
— si $m = 1$, alors la population moyenne reste constante.

12.3 Loi normale

Cadre (Loi normale et point fixe)
On s'intéresse ici à la *loi normale*, ou *loi de Gauss centrée réduite*, caractérisée par la fonction densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour t réel par

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Dans cet exercice, on introduit, pour tout $\alpha > 0$, la fonction ψ_α, définie sur l'ensemble des densités de probabilité, par la formule suivante : pour toute fonction f à densité, on a

$$\psi_\alpha(f) = \alpha(f \star f)(\alpha),$$

où $\star$ désigne le produit de convolution : pour g et h deux fonctions, pour tout x réel,

$$(g \star h)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t)h(t)\mathrm{d}t.$$

On veut montrer que les points fixes de la fonction $\psi_{\sqrt{2}}$ sont les lois normales.

Exercice 98 (Loi normale : résultats préliminaires)
Démontrer les lemmes suivants.

1. (a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que la fonction caractéristique de X + Y s'écrit, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\Big(\exp\big(i\theta(\mathrm{X}+\mathrm{Y})\big)\Big) = \mathbf{E}\big(\exp(i\theta\mathrm{X})\big)\mathbf{E}\big(\exp(i\theta\mathrm{Y})\big).$$

   (b) Montrer que si de plus X et Y admettent pour densités respectives f et g, alors la variable aléatoire X + Y admet pour densité $f \star g$ (produit de convolution).
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que, pour tous réels a et b, avec $a \neq 0$, la variable aléatoire $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$ admet pour densité la fonction $y \mapsto \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$.

Soluce

1. (a) Le premier point découle du fait que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, toute fonction de X est indépendante de toute fonction de Y ; pour tout θ fixé, les variables aléatoires $\exp(i\theta X)$ et $\exp(i\theta Y)$ sont donc indépendantes et intégrables, d'où

$$\mathbf{E}\left(e^{i\theta(X+Y)}\right) = \mathbf{E}\left(e^{i\theta X}e^{i\theta Y}\right) = \mathbf{E}\left(e^{i\theta X}\right)\mathbf{E}\left(e^{i\theta Y}\right).$$

   (b) En ce qui concerne les densités : pour toute fonction continue et bornée ϕ, la variable aléatoires $\phi(X+Y)$ est bornée, donc intégrable, et on a :

$$\mathbf{E}\big(\phi(X+Y)\big) = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(x+y)f(x)g(y)\,dxdy.$$

   On effectue alors le changement de variables $s = x+y$, $t = x$. C'est un difféomorphisme, de jacobien égal à 1. Donc (avec un petit coup de Fubini pour la deuxième égalité), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big(\phi(X+Y)\big) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(s)f(s-t)g(t)\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(s)\left(\int_{\mathbb{R}} f(s-t)g(t)\,dt\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(s)(f\star g)(s).\end{aligned}$$

   On peut donc conclure que $f \star g$ est la densité de X + Y.

2. On utilise le même type de méthode : on se donne une fonction h continue et bornée. On a alors

$$\mathbf{E}\big(h(aX+b)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(ax+b)\ f(x)dx.$$

   On effectue le changement de variables $y = ax+b$, soit $x = (y-b)/a$. Ce changement de variables est croissant si $a > 0$, décroissant sinon. Dans les deux cas, on obtient

$$\mathbf{E}\big(h(aX+b)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\ f\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}dy.$$

   Donc la variable aléatoire $aX+b$ admet pour densité la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{|a|}f\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$.

Exercice 99 (Loi normale : le théorème)

1. (a) Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes, alors la variable aléatoire $(X+Y)/\sqrt{2}$ suit la loi normale centrée réduite.

   (b) En déduire que la densité de la loi normale centrée réduite est un point fixe de $\psi_{\sqrt{2}}$.

2. Conclusion : on introduit $\mathscr{L}^2$, l'ensemble des lois à densité de carré intégrable. Montrer que les points fixes de $\Psi_{\sqrt{2}}$ sont exactement les lois (normale) de Gauss centrées.

Soluce

1. (a) Soit $f : x \mapsto \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$.
   On a, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(f \star f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}((x-t)^2+t^2)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t^2-xt+x^2/2)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t-x/2)^2-x^2/4}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

   où l'avant-dernière égalité provient du fait que la fonction qui, à la variable t, associe $\mathrm{e}^{-(t-x/2)^2}/\sqrt{\pi}$ est la densité de la loi normale d'espérance $x/2$ et de variance $1/2$.

   Il en résulte que la variable aléatoire $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ admet pour densité la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, puis en utilisant le deuxième lemme, la variable aléatoire $(\mathrm{X}+\mathrm{Y})\sqrt{2}$ suit la loi de densité f, donc est de loi normale centrée réduite.

   Si on préfère utiliser les fonctions caractéristiques : c'est plus rapide, à condition d'avoir calculé la fonction caractéristique de la loi $\mathscr{N}(0,1)$. Pour la loi normale, on peut également utiliser la transformation de Laplace dont le calcul est plus facile.

   Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{i\theta \mathrm{X}}) = \mathrm{e}^{-\theta^2/2}$ donc

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{i\theta\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{\sqrt{2}}}\right) = \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{\sqrt{2}}\mathrm{X}}\right)\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{\sqrt{2}}\mathrm{Y}}\right) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}}\right)^2 = \mathrm{e}^{-\theta^2/2}.$$

   (b) Il est clair que les lois gaussiennes centrées sont points fixes de $\Psi_{\sqrt{2}}$: on vient de voir que c'est le cas pour la loi normale centrée réduite, et on peut utiliser le lemme 2 pour montrer le même résultat pour une loi normale centrée et de variance $\sigma^2 > 0$.

2. Réciproquement, considérons une variable aléatoire X de carré intégrable dont la loi est un point fixe de $\Psi_{\sqrt{2}}$, et une variable aléatoire Y de même loi que X et indépendante de X.
   La variable aléatoire $(\mathrm{X}+\mathrm{Y})/\sqrt{2}$ a la même loi que X. En particulier, on a

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \mathbf{E}\left(\frac{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{E}(\mathrm{X})$$

   donc X est une variable aléatoire centrée.

   Considérons maintenant une suite (X_k) de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

   On peut montrer (facilement) par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_{2^n})/\sqrt{2^n}$ a la même loi que X. Or, le théorème central limite permet d'affirmer que cette variable aléatoire converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers la loi normale centrée et de variance $\mathrm{var}(\mathrm{X})$. On conclut alors que X suit la loi normale centrée et de variance $\mathrm{var}(\mathrm{X})$.

Remarques. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires indépendante et de même loi de densité f, alors $\Psi(f)$ est la densité de $(\mathrm{X}+\mathrm{Y})/\sqrt{2}$.

D'autre part, ce théorème est encore vrai si on ne suppose pas que les variables aléatoires admettent une densité, en remplaçant $\Psi_{\sqrt{2}}$ par l'opération correspondante sur les transformées de Fourier : pour tout θ, $\mathrm{L}_{\mathrm{X}}(\theta) = \left(\mathrm{L}_x(\theta/\sqrt{2})\right)^2$.

12.4 Entropie

Cadre
Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire réelle. On définit l'*entropie de Shannon* $\mathscr{H}(\mathrm{X})$ de X de la façon suivante :

— si X est discrète, si $\{x_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ est l'ensemble des valeurs qu'elles prend et si $p_i = \mathbf{P}(\mathrm{X} = x_i)$ pour tout i de I,

$$\mathscr{H}(\mathrm{X}) = -\sum_{i \in \mathrm{I}} p_i \log p_i$$

(on convient que $p_i \log p_i = 0$ si $p_i = 0$) ;

— si X est continue et admet une densité f,

$$\mathscr{H}(\mathrm{X}) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x)\, \mathrm{d}x$$

(si $f \log f$ est intégrable).

(Ici, le logarithme est le logarithme népérien ou, de façon assez habituelle le logarithme à base 2.)

Exercice 100 (V.a. finies d'entropie minimale ou maximale)
Ici, X ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$. On note $p_i = \mathbf{P}(\mathrm{X} = x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

1. Vérifier que l'entropie de X est positive ou nulle et qu'elle est nulle si et seulement si toutes les probabilités p_i sont nulles sauf une qui vaut 1.
2. Démontrer que pour tout $(q_1, \ldots, q_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, avec $\sum_{i=1}^n q_i = 1$, on a :

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \leqslant -\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i.$$

Démontrer de plus qu'en cas d'égalité, on a : $p_i = q_i$ pour tout i (tel que $p_i \neq 0$).

3. En déduire que l'entropie de X est inférieure ou égale à celle d'une variable qui suit une loi uniforme, ce qui revient à dire :

$$\mathscr{H}(\mathrm{X}) \leqslant \log n,$$

et qu'il n'y a égalité que si X suit une loi uniforme.

Soluce

1. Comme $p_i \in [0,1]$ pour tout i, on a : $-p_i \log p_i \geqslant 0$. Par suite, $\mathscr{H}(\mathrm{X}) \geqslant 0$. De plus, si l'une des probabilités p_i ne vaut pas 1, alors $-p_i \log p_i > 0$ et $\mathscr{H}(\mathrm{X}) > 0$.

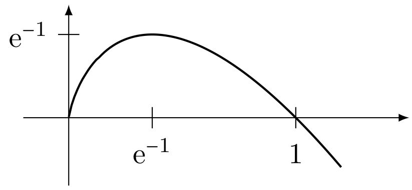


FIGURE 12.1 – La fonction $p \mapsto -p \log p$

2. On a, par la stricte concavité du logarithme [3], l'inégalité $\log u \leqslant u - 1$ pour tout réel u strictement positif. De plus, l'inégalité est stricte pour u différent de 1. D'où :

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{q_i}{p_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(\frac{q_i}{p_i} - 1\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i = 0.$$

De plus, pour qu'il y ait égalité, il faut que $p_i/q_i = 1$ pour tout i (tel que $p_i \neq 0$).

3. Si l'on prend $q_i = 1/n$ pour tout i, ce qui est la loi d'une distribution uniforme, on trouve

$$\mathscr{H}(\mathrm{X}) \leqslant -\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{n} = \log n.$$

Il y a égalité si et seulement si $p_i = 1/n$ pour tout i tel que $p_i \neq 0$. Comme la somme des p_i vaut 1, cela impose que $p_i = 1/n$ pour tout i.

Remarque. Si l'entropie représente le désordre, l'opposé de l'information, l'inégalité exprime que l'on a une information minimale quand les probabilités sont toutes égales. C'est intuitif si on pense à un dé : plus il est pipé de façon inhomogène, plus le parieur est avantagé !

À la place de la (stricte) concavité du logarithme, on peut utiliser celle de $\varphi : x \mapsto x \log x$ (*cf.* l'exercice 101).

Exercice 101 (Entropie conjointe et critère d'indépendance)
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes. On note $\{x_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ (resp. $\{y_j\}_{j\in \mathrm{J}}$) l'ensemble des valeurs prises par X (resp. Y). Pour $(i,j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, on note $p_i = \mathbf{P}(\mathrm{X} = x_i)$, $q_j = \mathbf{P}(\mathrm{Y} = y_j)$ et $p_{ij} = \mathbf{P}(\mathrm{X} = x_i \wedge \mathrm{Y} = y_j)$.

3. Cela provient de l'égalité de Taylor-Lagrange $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(c)(b-a)^2$, où f est le logarithme, $b = u$, $a = 1$, et en remarquant que la dérivée seconde est strictement négative.

L'*entropie conjointe* de X et Y est l'entropie du couple (X, Y) :

$$\mathscr{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = -\sum_{(i,j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} p_{ij} \log p_{ij}.$$

1. Soit K un ensemble fini ou dénombrable et soient $(r_k)_{k\in \mathrm{K}}$ et $(\lambda_k)_{k\in \mathrm{K}}$ deux familles de réels strictement positifs. Si K est infini, on suppose que la famille $(r_k)_{k\in \mathrm{K}}$ est bornée. On suppose de plus que $\sum_{k\in \mathrm{K}} \lambda_k = 1$. Démontrer que
$$\log \sum_{k\in \mathrm{K}} \lambda_k r_k \geqslant \sum_{k\in \mathrm{K}} \lambda_k \log r_k,$$
avec égalité si et seulement si tous les r_k sont égaux. *Quid* si certains λ_k sont nuls ?
2. Vérifier que
$$\mathscr{H}(\mathrm{X}) + \mathscr{H}(\mathrm{Y}) - \mathscr{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sum_{(i,j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}.$$
Cette différence est appelée information mutuelle *de* (X, Y).
3. Démontrer que $\mathscr{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant \mathscr{H}(\mathrm{X}) + \mathscr{H}(\mathrm{Y})$.
4. Démontrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si on a l'égalité $\mathscr{H}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathscr{H}(\mathrm{X}) + \mathscr{H}(\mathrm{Y})$.

Remarque. Vu, et pas à la télé ! La question 1 est une version de l'inégalité de Jensen qui exprime la stricte concavité du logarithme.

Soluce

1. Soit $r = \sum_{k\in \mathrm{K}} \lambda_k r_k$. Cela a un sens car $(r_k)_{k\in \mathrm{K}}$ est bornée et on suppose $\sum_{k\in \mathrm{K}} \lambda_k = 1$. Pour tout k dans K, on a par concavité [4] du logarithme :
$$\log r_k - \log r \leqslant \frac{1}{r}(r_k - r)\ ;$$
de plus, il y a égalité si et seulement si $r_k = r$.

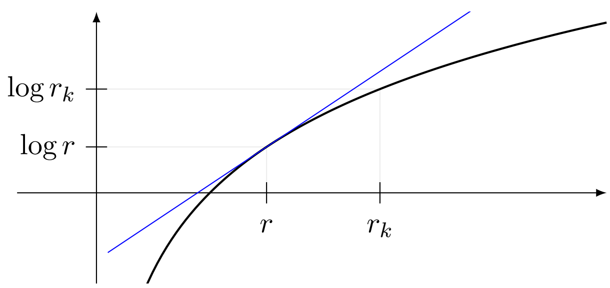


FIGURE 12.2 – Stricte concavité du logarithme

4. Cela provient de l'égalité de Taylor-Lagrange $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2$, où f est le logarithme, $b = r_k$, $a = r$, et en remarquant que la dérivée seconde est strictement négative.

En multipliant les deux membres par λ_k et en sommant sur k, il vient :

$$\sum_{k\in K} \lambda_k \log r_k - \sum_{k\in K} \lambda_k \log r \leqslant \frac{1}{r}\left(\sum_{k\in K} \lambda_k r_k - \sum_{k\in K} \lambda_k r\right).$$

Dans cette inégalité, seule la somme $\sum_{k\in K} \lambda_k \log r_k$ est susceptible de poser problème. Comme la suite $(r_k)_{k\in K}$ est majorée par $R > 0$, on peut écrire $r_s = Rs_k$ avec $s_k \in]0,1[$ pour tout k ; alors $\sum_{k\in K} \lambda_k \log r_k$ est la somme de $\sum_{k\in K} \lambda_k \log R = \log R$ et de $\sum_{k\in K} \lambda_k \log s_k$ qui vaut éventuellement $-\infty$, ce qui rend l'inégalité trivialement vraie.

Après simplifications ($\sum \lambda_k = 1$, $\sum \lambda_k r_k = r$, le membre de droite s'annule), cela donne :

$$\sum_{k\in K} \lambda_k \log r_k - \log \sum_{k\in K} \lambda_k r_k \leqslant 0.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $r_k = r$ pour tout k (il faut qu'il y ait égalité dans chacune des inégalités initiales).

Si certains coefficients λ_k sont nuls, on applique le résultat précédent à l'ensemble $K' = \{k \in K,\ \lambda_k \neq 0\}$, ce qui ne change pas les sommes. L'inégalité s'en déduit et il y a égalité si et seulement si tous les réels r_k affectés d'un coefficient λ_k *non nul* sont égaux.

2. Soit $\mathscr{I}(X,Y)$ la différence entre la somme des entropies et l'entropie du couple. On l'exprime en remarquant [5] que $p_i = \sum_{j\in J} p_{ij}$ pour tout i et $q_j = \sum_{i\in J} p_{ij}$ pour tout j :

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}(X,Y) &= \mathscr{H}(X) + \mathscr{H}(Y) - \mathscr{H}(X,Y) \\
&= -\sum_{i\in I} p_i \log p_i - \sum_{j\in J} q_j \log q_j + \sum_{(i,j)\in I\times J} p_{ij} \log p_{ij} \\
&= -\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} \log p_i - \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_{ij} \log q_j + \sum_{(i,j)\in I\times J} p_{ij} \log p_{ij} \\
&= \sum_{(i,j)\in I\times J} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}.
\end{aligned}$$

3. Appliquons l'inégalité de la question 1. On a, avec $K = I \times J$ et $r_{ij} = p_i q_j / p_{ij}$ pour $(i,j) \in K$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}(X,Y) &= -\sum_{(i,j)\in K} p_{ij} \log \frac{p_i q_j}{p_{ij}} \\
&\geqslant -\log \sum_{(i,j)\in K} p_{ij} \frac{p_i q_j}{p_{ij}} \\
&\geqslant -\log \sum_{i\in I} p_i \sum_{j\in J} q_j = 0.
\end{aligned}$$

En toute généralité, on a donc : $\mathscr{I}(X,Y) \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$\mathscr{H}(X,Y) \leqslant \mathscr{H}(X) + \mathscr{H}(Y).$$

5. Dans le cas où les ensembles sont dénombrables, on pourra noter que la somme $\sum_{j\in J} p_{ij}$ est majorée par p_i et que les p_{ij} sont tous positifs, on a donc convergence absolue, et on peut permuter allègrement à l'interieur de la somme pour obtenir l'égalité. Dans le cas fini, il n'y a pas d'obstruction. Même chose pour les q_j.

4. Si X et Y sont indépendantes, alors $p_{ij} = p_i q_j$ pour tout $(i,j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$. Chacun des termes de $\mathscr{I}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est nul donc $\mathscr{I}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = 0$.
   Supposons que $\mathscr{I}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = 0$. Pour qu'il y ait égalité, il faut que tous les r_{ij} tels que $p_{ij} \neq 0$ sont tous égaux. Il existe donc une constante C telle que $p_i q_j = \mathrm{C} p_{ij}$ dès que $p_{ij} \neq 0$. En reportant dans la définition de $\mathscr{I}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, on obtient (les couples (i,j) éventuels pour lesquels $p_{ij} = 0$ ne contribuent pas à la somme) :
   $$0 = \mathscr{I}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{(i,j)\in\mathrm{K}} -p_{ij} \log \mathrm{C} = -\log \mathrm{C}.$$
   On en déduit que $\mathrm{C} = 1$, c'est-à-dire que $p_{ij} = p_i q_j$ si $p_{ij} \neq 0$. En sommant sur tous les couples (i,j), il vient :
   $$1 = \sum_{i\in\mathrm{I}} \sum_{j\in\mathrm{J}} p_i q_j \geqslant \sum_{(i,j)\,:\,p_{ij}\neq 0} p_i q_j = \sum_{(i,j)\,:\,p_{ij}\neq 0} p_{ij} = \sum_{(i,j)\in\mathrm{K}} p_{ij} = 1.$$
   L'inégalité est donc une égalité, c'est-à-dire que $p_{ij} = p_i q_j$ pour tout $(i,j) \in \mathrm{I}\times\mathrm{J}$. Cela caractérise l'indépendance de X et Y.

Remarque. Si on pense que l'entropie mesure le désordre, cela devient raisonnable : l'entropie du couple est maximale quand la connaissance d'une variable n'apporte aucune information sur l'autre, c'est-à-dire quand elles sont indépendantes.

Remarque (Quelques remarques heuristiques sur l'entropie (et inversement)).
Parlons pour commencer des décimales d'un réel. Si le réel est en fait un rationnel, on aura besoin de très peu d'information pour écrire la liste des décimales de $4/33 = 0{,}12121212\ldots$, puisque c'est une suite périodique à partir d'un certain rang – un nombre fini d'informations suffit. Par contraste, pour un nombre comme π, on n'a pas trouvé de façon plus intelligente pour reproduire les premières décimales que les stocker et les réciter. Beaucoup d'entropie ici, peu d'information (de structure, de régularité...) puisque la longueur du programme est la longueur de ce qu'il renvoie !

Une source d'information est un dispositif qui peut produire des nombres d'après une distribution de probabilités donnée. Autrement dit, c'est une variable aléatoire dont on connaît la loi. On a un alphabet I (un ensemble) (fini pour l'instant) ; pour chaque i, la probabilité que la prochaine lettre soit i est donné par un réel $p_i \in [0,1]$ – et bien sûr, $\sum_{i\in\mathrm{I}} p_i = 1$. L'entropie de la source d'information (qui est celle de la loi) sera d'autant plus grande qu'on manquera d'information pour prédire la prochaine lettre. Voici deux cas extrêmes :
- tous les p_i sont nuls (ou très petits) sauf un qui est égal (ou proche) de 1 : l'entropie sera très petite car $p_i \log(p_i)$ est proche de 0, si p_i est proche de 0 ou de 1 ;
- tous les p_i sont égaux : c'est la situation d'un dé non pipé, d'une pièce non biaisée, il n'est pas surprenant que ce soit celle qui donne le moins d'information pour prédire ce qui vient.

L'entropie jointe permet de mesurer « l'information mutuelle » de deux variables aléatoires : qu'est-ce que je peux prédire de X si je connais Y ? Le résultat principal de l'exercice qui précède exprime que l'entropie conjointe est maximale, ce qui revient à dire que l'information mutuelle est minimale (nulle), lorsque les variables sont indépendantes. Cela motive la dénomination « information mutuelle », puisque si les variables sont indépendantes, connaître l'une ne dit rien de l'autre.

Exercice 102 (V.a.r. continues d'entropie maximale)
Soit X une v.a.r. continue admettant une densité f. On suppose qu'elle admet une espérance m et une variance σ^2. Soit G une v.a.r. gaussienne ayant la même moyenne et la même variance, c'est-à-dire que G admet la densité g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}.$$

1. Vérifier que l'entropie est invariante par translation : $\mathscr{H}(\mathrm{X}) = \mathscr{H}(\mathrm{X}-m)$.

On suppose désormais que $m = 0$.

2. Démontrer que $-\int_{\mathbb{R}} f \ln g = -\int_{\mathbb{R}} g \ln g$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $u \mapsto u \ln u$ si $u > 0$. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{f}{g}\Big) g \geqslant 0$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $f = g$.
Exploiter la stricte convexité de φ.

4. Démontrer que $\mathscr{H}(\mathrm{X}) \leqslant \mathscr{H}(\mathrm{G})$ et que $\mathscr{H}(\mathrm{X}) = \mathscr{H}(\mathrm{G})$ si et seulement si X est gaussienne.

Soluce

1. La v.a.r. $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - m$ admet pour densité la fonction $\tilde{f} : t \mapsto f(t+m)$. En effet, pour tout couple (a, b) de réels avec $a \leqslant b$, on a : $a \leqslant \mathrm{Y} \leqslant b$ SSI $a+m \leqslant \mathrm{X} \leqslant b+m$ donc (poser $x = t+m$)

$$\mathbf{P}(a \leqslant \mathrm{Y} \leqslant b) = \mathbf{P}(a+m \leqslant \mathrm{X} \leqslant b+m) = \int_{a+m}^{b+m} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t+m)\mathrm{d}t.$$

Mais bien sûr, on a par invariance de la mesure de Lebesgue :

$$\mathscr{H}(\mathrm{X}) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \ln f(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} f(t+m) \ln f(t+m)\mathrm{d}t = \mathscr{H}(\mathrm{X}-m).$$

2. Vu que $m = 0$, on a, pour x réel :

$$\ln g(x) = -\ln\big(\sigma\sqrt{2\pi}\big) - \frac{x^2}{2\sigma^2}.$$

Il vient, en reconnaissant le deuxième moment de X :

$$-\int_{\mathbb{R}} f \ln g = \ln\big(\sigma\sqrt{2\pi}\big) \int_{\mathbb{R}} f + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \ln\big(\sigma\sqrt{2\pi}\big) + \frac{1}{2}.$$

Le résultat est indépendant de f parmi les densités de moyenne nulle et de « variance » σ^2. En particulier, pour $f = g$, on trouve le même résultat :

$$-\int_{\mathbb{R}} f \ln g = -\int_{\mathbb{R}} g \ln g.$$

NB : On peut aussi refaire le calcul :

$$-\int_{\mathbb{R}} g \ln g = \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} g + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} x^2 g(x) \mathrm{d}x = \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2}.$$

3. Par acquit de conscience, vérifions que φ est strictement convexe : elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour $u > 0$: $\varphi'(u) = \ln u + 1$, $\varphi''(u) = 1/u > 0$ (figure 12.3).

   Idée-clé. *L'inégalité de la question 3 est une version continue de l'inégalité de Jensen. On la démontre comme dans l'exercice 101 1 : la somme pondérée par les λ_k devient l'intégrale pondérée par g ; les r_k deviennent la fonction f/g ; la moyenne r devient donc l'intégrale de f/g pondérée par g :*

   $$\int_{\mathbb{R}} \frac{f}{g} \cdot g = \int_{\mathbb{R}} f = 1.$$

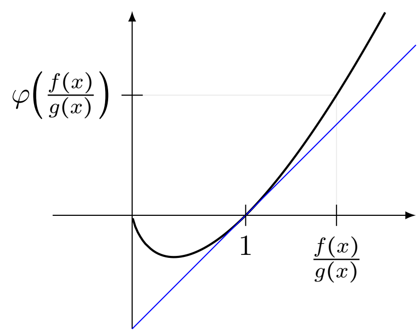
   

   FIGURE 12.3 – Stricte convexité de $\varphi : x \mapsto x \ln x$

   Pour x réel, la stricte convexité de φ donne :

   $$\varphi\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) - \varphi(1) \geqslant \varphi'(1)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) \qquad (\star)$$

   et il y a égalité si et seulement si $f(x)/g(x) = 1$. Remarquons que $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = 1$, oublions x et multiplions par g :

   $$\varphi\left(\frac{f}{g}\right) \cdot g \geqslant \left(\frac{f}{g} - 1\right) \cdot g \ ;$$

   enfin, intégrons :

   $$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{f}{g}\right) \cdot g \geqslant \int_{\mathbb{R}} (f - g) = 0.$$

   De plus, en cas d'égalité, on peut affirmer qu'il y avait égalité dans $(\star)$ (sauf éventuellement aux points où f est discontinue). En effet, l'intégrale d'une fonction positive continue par morceaux est nulle si et seulement si la fonction est partout nulle, sauf éventuellement aux points de discontinuité.

4. À présent, on écrit la différence :

   $$\begin{aligned}\mathscr{H}(\mathrm{X}) - \mathscr{H}(\mathrm{G}) &= -\int_{\mathbb{R}} f \ln f + \int_{\mathbb{R}} g \ln g = -\int_{\mathbb{R}} f \ln f + \int_{\mathbb{R}} f \ln g \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{f}{g} \ln \frac{f}{g} \cdot g = -\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{f}{g}\right) g.\end{aligned}$$

La convexité de φ permet d'appliquer l'inégalité de Jensen que l'on vient de voir :

$$\mathscr{H}(\mathrm{X}) - \mathscr{H}(\mathrm{G}) \leqslant 0.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $f = g$ (sauf aux points éventuels où f est discontinue, ce qui ne change essentiellement rien).

Remarque. Ainsi, non seulement une variable gaussienne maximise l'entropie parmi les v.a.r. d'espérance et de variance données, mais en plus ce sont les seules. Comparer à l'exercice 100.

Exercice 103 (Tant que je gagne, je joue !)

1. Montrer que les v.a. discrètes suivant une loi géométrique maximisent l'entropie et que ce sont les seules, parmi les v.a. à valeur dans $\mathbb{N}$ d'espérance fixée.
2. Montrer que les v.a.r. suivant une loi exponentielle maximisent l'entropie et que ce sont les seules, parmi les v.a.r. continues à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance fixée.

Soluce

On reprend la fonction strictement convexe $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $u \mapsto u \ln u$ si $u > 0$.

1. Fixons $\pi \in \,]0,1]$. Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$; on note $p_k = \mathbf{P}(\mathrm{X} = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On suppose que X admet une espérance égale à $m = 1/\pi - 1$. Soit G une v.a.r.d. suivant une loi géométrique de paramètre π ; on pose

$$q_k = \mathbf{P}(\mathrm{G} = k) = \pi\,(1-\pi)^k, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

On a :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \ln q_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \ln q_k.$$

En effet,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \ln q_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k\big(\ln\pi + k\ln(1-\pi)\big) = \ln\pi \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k + \ln(1-\pi)\sum_{k\in\mathbb{N}} k p_k = \ln\pi + \ln(1-\pi)\mathbf{E}(\mathrm{X}),$$

quantité qui ne dépend pas de X mais uniquement de π : on obtiendrait donc le même résultat en remplaçant (p_k) par (q_k).

On écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\mathrm{X}) - \mathscr{H}(\mathrm{G}) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \ln p_k - \sum_{k\in\mathbb{N}} q_k \ln q_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \ln p_k - \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \ln q_k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{p_k}{q_k} \ln \frac{p_k}{q_k}\, q_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi\Big(\frac{p_k}{q_k}\Big) q_k.\end{aligned}$$

Grâce à la stricte convexité de φ, on en déduit que

$$\mathscr{H}(\mathrm{X}) - \mathscr{H}(\mathrm{G}) \leqslant \varphi\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{p_k}{q_k} q_k\Big) = \varphi(1) = 0,$$

avec égalité si et seulement si tous les termes p_k/q_k sont égaux, c'est-à-dire si X suit une loi géométrique.

2. Fixons $\lambda \in \,]0,+\infty[$. Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, admettant une densité f, qui admet une espérance égale à $1/\lambda$. Soit G une v.a. suivant une loi exponentielle de paramètre λ ; soit g sa densité : $g(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ pour $x \in [0,+\infty[$. On a :
$$\int_{\mathbb{R}^+} f \ln g = \int_{\mathbb{R}^+} g \ln g.$$
En effet,
$$\int_{\mathbb{R}^+} f \ln g = \int_{\mathbb{R}^+} f(x)(\ln\lambda - \lambda x)\mathrm{d}x = \ln\lambda \int_{\mathbb{R}^+} f - \lambda \int_{\mathbb{R}^+} xf(x)\mathrm{d}x = \ln\lambda - \lambda\mathbf{E}(\mathrm{X}),$$
quantité qui ne dépend que de l'espérance, laquelle a été fixée. On trouve donc le même résultat avec E à la place de X, c'est-à-dire g à la place de f.
On écrit alors :
$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\mathrm{X}) - \mathscr{H}(\mathrm{E}) &= \int_{\mathbb{R}^+} f\ln f - \int_{\mathbb{R}^+} g\ln g = \int_{\mathbb{R}^+} f\ln f - \int_{\mathbb{R}^+} f\ln g \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f}{g}\ln\Big(\frac{f}{g}\Big)\cdot g = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi\Big(\frac{f}{g}\Big)\cdot g.\end{aligned}$$
La stricte convexité de φ donne alors :
$$\mathscr{H}(\mathrm{X}) - \mathscr{H}(\mathrm{E}) \leqslant \varphi\Big(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{f}{g}\cdot g\Big) = \varphi(1) = 0,$$
avec égalité si et seulement si $f/g = 1$ (sauf aux points éventuels où f est discontinue).

12.5 Groupes et probabilités

On rappelle la formule de Burnside, voir [6, Exercice 3.6.1], qui assure que lorsqu'un groupe fini agit sur un ensemble X, le cardinal de l'ensemble des orbites de X sous G est égal à :
$$|\mathrm{X}/\mathrm{G}| = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} |\mathrm{X}^g|, \quad \text{où } \mathrm{X}^g := \{x \in \mathrm{X},\ g\cdot x = x\}.$$

Exercice 104 (Probabilités et formule de Burnside)
On fixe un entier n non nul et on munit le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de la mesure de probabilité uniforme.

1. Quel est l'éspérance du nombre de points fixes d'une permutation ?
2. Quelle est la variance du nombre de points fixes d'une permutation ?
3. Généraliser ce résultat pour toute action d'un groupe fini G sur un ensemble fini X.

Soluce

1. L'espérance est, par définition,
$$\mu := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |X_n^\sigma|,$$
où X^σ désigne le nombre d'éléments de $X_n := \{1, \dots, n\}$ fixés par σ. La formule de Burnside dit justement que le membre de droite est égal au nombre d'orbites de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble X_n. Comme l'action de $\mathfrak{S}_n$ est transitive, on a $\mu = 1$.
2. Facile. La variance est donnée par
$$V = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |X_n^\sigma|^2 - \Big(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |X_n^\sigma|\Big)^2.$$
Si on considère l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $X_n \times X_n$ donné par $\sigma(x,y) = \big(\sigma(x), \sigma(y)\big)$, on voit que (x,y) est invariant par $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si x et y le sont, ce qui peut s'écrire
$$(X_n \times X_n)^\sigma = X_n^\sigma \times X_n^\sigma.$$
En prenant le cardinal, cela donne $|(X_n \times X_n)^\sigma| = |X_n^\sigma|^2$. Cela implique, par la formule de Burnside, que $n!^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |X_n^\sigma|^2$ est le nombre d'orbites pour l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $X_n \times X_n$.
Or il y a exactement deux telles orbites : l'orbite des éléments de la forme (x,x), $x \in X_n$, et l'orbite des éléments de la forme (x,y), avec $x \neq y$. Conclusion :
$$V = 2 - 1^2 = 1.$$
3. L'espérance μ est le nombre d'orbites de G sur X et la variance vaut $V = k - \mu^2$, où k désigne le nombre d'orbites de G pour l'action diagonale sur $X \times X$.

Remarque (Mise en forme dans le langage des probabilités). Pour l'exercice qui précède, et pour ceux qui suivent, il est bon de savoir procéder à une petite mise en forme dans la terminologie des probabilités. Ici, *l'univers*, c'est $\mathfrak{S}_n$, et on le munit de la probabilité uniforme (pour laquelle il suffit de connaître le cardinal de $\mathfrak{S}_n$). Si on veut parler de *tribu*, on utilise l'ensemble des parties de $\mathfrak{S}_n$ comme tribu. Pour calculer la probabilité de A avec A sous-ensemble de $\mathfrak{S}_n$, on quotiente le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles, ou $\frac{|A|}{|\mathfrak{S}_n|}$.

Voici comment l'exercice pourrait être rédigé plus correctement : on tire au hasard une permutation d'un ensemble à n éléments et on munit $\mathfrak{S}_n$ de la *probabilité uniforme*. Soit X la *variable aléatoire* qui, à une permutation, associe le nombre de ses invariants. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, ..., n-2, n\}$.

L'exercice qui suit permet de mesurer le degré de commutativité d'un groupe fini. Nous allons associer à un groupe fini un nombre rationnel p, $p \in]0,1]$, qui vaut 1 lorsque le groupe est abélien et qui diminue lorsque la commutativité se raréfie.

Exercice 105 (Probabilité pour que deux éléments commutent)
Soit G un groupe fini d'ordre n, et Z(G) son centre, d'ordre z. On note p la probabilité pour que deux éléments g et h de G, choisis indépendamment, et de façon équiprobable, commutent. On va alors montrer que p est inférieur à $\frac{z}{2n} + \frac{1}{2}$; et qu'en particulier, si le groupe est non abélien, on a $p \leqslant \frac{5}{8}$.

1. Montrer que $p \leqslant \frac{z}{2n} + \frac{1}{2}$.
2. Montrer que si G est un groupe tel que $\mathrm{G}/\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ est cyclique, alors G est abélien (en particulier $\mathrm{Z}(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$).
3. Déduire que, si G n'est pas abélien, alors $p \leqslant \frac{5}{8}$.
4. (Autre approche) Montrer, à l'aide de la formule de Burnside, voir [6, Exercice 3.6.1], que si k est le nombre de classes de conjugaison, alors $p = \frac{k}{n}$.
5. Quelle est la probabilité pour que deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ choisies indépendamment, et de façon équiprobable, commutent ?

Soluce

1. Soit m le cardinal de l'ensemble K des couples d'éléments de G qui commutent. On doit calculer $p = \frac{m}{n^2}$. Or, si on note Z_g, pour tout g de G, l'ensemble
$$\mathrm{Z}_g := \{h \in \mathrm{G},\ hg = gh\},$$
on voit que K est la réunion disjointe des Z_g, pour g parcourant G. Deux cas sont possibles : soit $g \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ et dans ce cas, $\mathrm{Z}_g = \mathrm{G}$, soit $g \notin \mathrm{Z}(\mathrm{G})$. On a donc pour l'instant :
$$m = zn + \sum_{g \notin \mathrm{Z}(\mathrm{G})} |\mathrm{Z}_g|.$$
On note que Z_g est un sous-groupe de G, et si g n'est pas dans $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$, c'est un sous-groupe strict de G. D'après Lagrange, $|\mathrm{Z}_g| \leqslant \frac{n}{2}$. Il vient donc
$$m \leqslant zn + (n-z)\frac{n}{2} = \frac{zn}{2} + \frac{n^2}{2}.$$
Ceci prouve le résultat désiré.
2. On suppose $\mathrm{G}/\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ cyclique. Cela signifie qu'il est engendré par la classe d'un élément, disons $\overline{a} = a\mathrm{Z}(\mathrm{G})$, avec $a \in \mathrm{G}$. Soient g, h deux éléments de G, et on veut montrer qu'ils commutent. Or, par hypothèse, leur classe respective vérifie $g = \overline{a}^m$ et $h = \overline{a}^n$. On peut donc écrire $g = \overline{a^m} = a^m\mathrm{Z}(\mathrm{G})$; il existe donc z_g dans $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ tel que $g = a^m z_g$. De même, il existe z_h dans $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ tel que $h = a^n z_h$. On voit alors que g et h commutent, puisque a^m, z_g, a^n, z_h commutent deux à deux.
3. Si G est non abélien, son centre $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ est strictement inclus dans G. Il est donc d'indice $i \geqslant 2$. Mais s'il était d'indice 2, resp. 3, le quotient $\mathrm{G}/\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ serait d'ordre 2, resp. 3. Ces nombres étant premiers, $\mathrm{G}/\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ serait cyclique. Forcément, $\mathrm{G}/\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ est d'ordre au moins[6] 4. Il vient donc, par la question 1 :
$$p \leqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$
4. On fait agir G sur lui-même par la conjugaison. Le nombre k de classes de conjugaison est égal au nombre d'orbites pour cette action. Par la formule de Burnside, il vaut
$$k = \frac{1}{n}\sum_{g \in \mathrm{G}} |\mathrm{G}^g|,$$

6. Et si l'on a égalité, on peut affirmer qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

où $G^g = \{h \in G, ghg^{-1} = h\} = \{h \in G, gh = hg\} = Z_g$. Il vient donc, par la question 1

$$p = \frac{1}{n^2} \sum_{g \in G} |Z_g| = \frac{k}{n}.$$

5. L'ordre du groupe $G := GL_2(\mathbb{F}_5)$ est égal au nombre de bases de $\mathbb{F}_5^2$, c'est-à-dire $(5^2-1)(5^2-5) = 480$, voir [6, Exercice 1.1.6], pour plus de précisions.

   Il reste à calculer le nombre de classes de conjugaisons de G. Or, deux matrices de G sont dans la même classe de conjugaison si et seulement si elles sont semblables. On va donc compter le nombre de classes de similitude de matrices inversibles de $\mathscr{M}_2(\mathbb{F}_5)$. On distingue trois cas : (i) les matrices diagonalisables, (ii) les matrices trigonalisables (mais non diagonalisables) et enfin (iii) les matrices non trigonalisables.

   Cas (i). Une matrice diagonalisable est semblable une matrice de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}_5$, uniques à permutation près. De plus, comme la matrice est inversible, les λ_i doivent être choisis non nuls, donc dans $\mathbb{F}_5^*$, de cardinal 4. On a donc 4 choix pour $\lambda_1 = \lambda_2$, et $\binom{4}{2} = 6$ choix pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On a donc en tout 10 classes de matrices diagonalisables.

   Cas (ii). Soit $E = \mathbb{F}_5^2$ et ϕ un automorphisme trigonalisable non diagonalisable de GL(E). Son polynôme caractéristique χ_ϕ est donc scindé sur $\mathbb{F}_5$ mais il n'est pas scindé simple (sinon, ϕ serait diagonalisable). Comme il est de degré 2, il en résulte que $\chi_\phi = (X-\lambda)^2$, avec $\lambda \in \mathbb{F}_5^*$. Par hypothèse, il existe une base (e_1, e_2) telle que la matrice de ϕ s'écrit dans cette base

   $$\mathrm{mat}_{(e_1,e_2)}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

   avec ε non nul. Il en résulte que dans la base (e_1', e_2'), avec $e_1' = e_1$, $e_2' = \frac{1}{\varepsilon} e_2$, on a

   $$\mathrm{mat}_{(e_1',e_2')}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Conclusion, il y a autant de classes de similitude de matrices inversibles trigonalisables, non diagonalisables, que de λ dans $\mathbb{F}_5^*$. C'est-à-dire 4.

   Cas (iii). Avec les notations de (ii), soit ϕ un automorphisme de GL(E), que l'on suppose désormais non trigonalisable. Son polynôme caractéristique χ_ϕ est donc non-scindé sur $\mathbb{F}_5$. Comme χ_ϕ est de degré 2 non-scindé, il n'a pas de racine. Or, il y a 5×5 polynômes unitaires de degré 2 dans $\mathbb{F}_5[X]$. Il faut retirer les polynômes de la forme $(X-\lambda)^2$ (soit 5 en tout) et les polynômes de la forme $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$, à permutation près [7]. Ce qui nous donne donc $25 - 5 - \binom{5}{2} = 10$ polynômes unitaires de degré 2 sans racines. Montrons maintenant que chacun de ces polynômes détermine une seule classe de conjugaison.

   On suppose donc que $P = \chi_\phi = X^2 - aX - b$ est un polynôme sans racine, de degré 2 et soit e_1 un vecteur non nul de E. On a $\phi(e_1) \neq \lambda e_1$, pour tout λ de $\mathbb{F}_5$, sinon, λ serait racine de P. Donc, $(e_1, \phi(e_1))$ est une base de E. Posons $e_2 = \phi(e_1)$, il vient par Cayley-Hamilton

   $$\phi(e_2) = \phi^2(e_1) = (a\phi + b\,\mathrm{Id})(e_1) = ae_2 + be_1.$$

7. On utilise implicitement ici le fait de $\mathbb{F}_5[X]$ est factoriel, c'est-à-dire que la factorisation en irréductibles à permutation près caractérise le polynôme.

On a donc

$$\mathrm{mat}_{(e_1,e_2)}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

et cette matrice ne dépend que du polynôme P. Conclusion, il y a autant de classes de conjugaison de matrices inversibles [8] non trigonalisables que de polynômes P unitaires de degré 2 sans racine. Il y a donc 10 classes de conjugaison. Au total on trouve dans G

$$k = 10 + 4 + 10 = 24,\ p = \frac{k}{n} = \frac{24}{480} = \frac{1}{20}.$$

Remarque (Le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$*).* Dans la dernière question, on pourrait facilement remplacer le nombre 5 par n'importe quel nombre premier q. On généralise à vue la situation pour prouver que le nombre de classes de conjugaison de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ est égal à q^2-1. En effet, le cas (i) fournit $(q-1)+\frac{(q-1)(q-2)}{2} = \frac{q(q-1)}{2}$ classes de conjugaison. Le cas (ii) en fournit $q-1$, et le cas (iii) en donne $q^2-q-\frac{q(q-1)}{2} = \frac{q(q-1)}{2}$. Soit, en tout q^2-1. La probabilité pour que deux matrices prises au hasard dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ commutent vaut

$$p = \frac{q^2-1}{(q^2-1)(q^2-q)} = \frac{1}{q^2-q}.$$

Remarque (Cas d'égalité). Notre coeur de mathématicien n'a qu'une envie : tester ce nouvel invariant [9] $p(\mathrm{G})$ associé au groupe G. Bien sûr tous les groupes cycliques et autres groupes abéliens vérifient $p(\mathrm{G}) = 1$. On montre que la borne $\frac{5}{8}$ est atteinte pour les groupes D_4 (le groupe du carré) et H_8 (le groupe quaternionique). Par exemple, pour D_4, on a bien 5 classes de conjugaison : l'identité, la symétrie centrale, les deux rotations d'ordre 4, les deux symétries diagonales, les deux symétries médiane. Le groupe du triangle D_3 (ou $\mathfrak{S}_3$) donne $p=\frac{1}{2}$. En général, pour les groupes diédraux, la probabilité que deux éléments commutent vaut $\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}$ pour D_{2n} et $\frac{1}{4}+\frac{3}{4(2n+1)}$ pour D_{2n+1}.

Remarque (Cas du groupe symétrique). Si G est le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations d'un ensemble à n éléments, alors la probabilité que deux éléments commutent est $p_n = \frac{\pi_n}{n!}$, où π_n est le nombre de partitions de n, voir [4, Corollaire III-2.6.1], donné par la série génératrice :

$$\sum_{n\geqslant 0} \pi_n z^n = \prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-z^k},$$

et dont le comportement asymptotique, étudié par le duo mythique Hardy-Ramanujan est donné par

$$\pi_n = \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).$$

À l'aide de la formule de Stirling, on obtient un comportement asymptotique de la probabilité p_n pour que deux éléments commutent dans le groupe x$\mathfrak{S}_n$:

$$p_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-n\log(n) + n - \frac{1}{2}\log(n) + \pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\right).$$

8. A partir du moment où P n'a pas de racine, la matrice est forcément inversible puisque $\mathrm{P}(0) \neq 0$.

9. Il s'agit bien d'un invariant dans le sens que si les groupes G et G′ sont isomorphes, leurs constantes p associées sont égales.

12.6 Arithmétique et probabilités

Exercice 106 (Probabilité que deux nombres soient premiers entre eux [10])
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit r_n la probabilité pour que deux entiers de $[1, n]$ pris au hasard, de façon équiprobable, soient premiers entre eux. Le but de l'exercice est de montrer que $\lim_{n\to+\infty} = \frac{6}{\pi^2}$ (ce qui nous fait environ $0,6$).

1. On fixe $m \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité $\pi_m(n)$ pour qu'un entier pris au hasard, de façon équiprobable dans $[1, n]$ soit divisible par m ? Même question pour deux entiers pris au hasard, et indépendamment, dans $[1, n]$.
2. En utilisant la formule du crible, voir [6, Exercice 4.1.2], montrer la formule

$$r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2,$$

   où μ est la fonction de Moebius donnée sur $\mathbb{N}^*$ par $\mu(1) = 1$, $\mu(p_1 \cdots p_k) = (-1)^k$, si les p_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ sont premiers deux à deux distincts, et enfin $\mu(d) = 0$ sinon (c'est-à-dire si d par un carré non trivial).
3. Montrer l'inégalité

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2}\left(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor^2 - \frac{n^2}{d^2}\right) \leqslant \frac{2}{nd} + \frac{1}{n^2}.$$

   En déduire que la suite (r_n) possède une limite que l'on notera ℓ, qui est aussi la limite de la série de terme général $(\frac{\mu(d)}{d^2})$.
4. On se propose de calculer le produit

$$\mathrm{P} := \sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

   (a) Pourquoi la somme $\sum_{(d,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}\mu(d)\frac{1}{n^2d^2}$ a-t-elle un sens ? Pourquoi est-elle égale à P ?

   (b) Soit $\mathrm{R} = \{(d, \mathrm{N}) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ d \text{ divise } \mathrm{N}\}$. Montrer que $(d, n) \mapsto (d, dn)$ définit une bijection de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans R. En déduire

$$\mathrm{P} = \sum_{\mathrm{N}=1}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{N}^2}\left(\sum_{d|\mathrm{N}}\mu(d)\right).$$

   (c) En développant l'égalité $(1-1)^m = 0$, pour $m > 0$, prouver l'égalité

$$\sum_{d|\mathrm{N}}\mu(d) = \delta_{1\mathrm{N}},$$

   où δ désigne le symbole de Kroenecker. En déduire que $\mathrm{P} = 1$.
5. Conclure que $\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2}$.

Soluce

1. On doit tout d'abord trouver le cardinal de l'ensemble $\mathrm{A}_m(n)$ des entiers multiples de m dans $[1,n]$. L'ensemble $\mathrm{A}_m(n)$ est en bijection avec l'ensemble des k tels que $1 \leqslant km \leqslant n$; son cardinal est $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$. La probabilité cherchée est donc $\pi_m(n) = \frac{1}{n}\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$. Pour deux éléments indépendants, on s'intéresse à l'ensemble $\mathrm{B}_m(n)$ des couples d'entiers multiples de m. On a par définition $\mathrm{B}_m(n) = \mathrm{A}_m(n) \times \mathrm{A}_m(n)$ et donc, la probabilité cherchée est $\frac{1}{n^2}\lfloor \frac{n}{m} \rfloor^2$.
2. Soit $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et n et soit $\mathscr{Q}_n$ l'ensemble des couples d'éléments de $[1,n]$ premiers entre eux. Deux nombres de $[1,n]$ sont premiers entre eux si et seulement si aucun nombre premier ne les divise simultanément. Comme aucun nombre premier ne peut les diviser hors de $\mathscr{P}_n$, on obtient

$$\mathscr{Q}_n = \cap_{p\in\mathscr{P}_n}\overline{\mathrm{B}_p(n)} = \overline{\cup_{p\in\mathscr{P}_n}\mathrm{B}_p(n)},$$

où la barre désigne le complémentaire. La formule du crible nous fournit le cardinal d'une réunion d'une famille d'ensembles en fonction des cardinaux de toutes les intersections possibles de ces ensembles, voir [6, Exercice 4.1.2]. Or, si $p_1,\dots,p_k$ sont k nombres premiers distincts, dire que tous les p_i divisent un nombre a revient à dire que le produit $p_1\cdots p_k$ le divise. Donc,

$$\cap_{i=1}^k \mathrm{B}_{p_i}(n) = \mathrm{B}_{p_1\cdots p_k}(n),$$

qui est de cardinal $\lfloor \frac{n}{p_1\cdots p_k} \rfloor^2$, d'après 1. En notant ϖ le cardinal de $\mathscr{P}_n$, la formule du crible donne donc

$$\left|\cup_{p\in\mathscr{P}_n}\mathrm{B}_p(n)\right| = \sum_{k=1}^{\varpi}(-1)^{k+1}\sum_{p_1<\cdots<p_k\in\mathscr{P}_n}\left|\cap_{i=1}^k \mathrm{B}_{p_i}(n)\right| = \sum_{k=1}^{\varpi}(-1)^{k+1}\sum_{p_1<\cdots<p_k\in\mathscr{P}_n}\lfloor \frac{n}{p_1\cdots p_k} \rfloor^2.$$

Si on pose $d = p_1\cdots p_k$, $k \geqslant 1$, dans la somme, seuls les d compris entre 2 et n fournissent des termes non nuls. De plus, comme la fonction de Moebius s'annule sur tout élément qui n'est pas de la forme $p_1\cdots p_k$ avec les p_i premiers distincts, il vient [11] :

$$\left|\cup_{p\in\mathscr{P}_n}\mathrm{B}_p(n)\right| = -\sum_{d=2}^{n}\mu(d)\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2.$$

En prenant le complémentaire, on obtient

$$|\mathscr{Q}_n| = n^2 + \sum_{d=2}^{n}\mu(d)\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2 = \sum_{d=1}^{n}\mu(d)\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par n^2 pour obtenir r_n :

$$r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2.$$

10. Attention, ce titre est un raccourci racoleur. Il n'y a pas de loi uniforme sur $\mathbb{N}$ tout entier, on prend une loi uniforme sur $[1,n]$ et on fait tendre n vers l'infini.

11. Bien remarquer que $\mu(1) \neq 0$, on ne doit donc pas inclure dans la somme le terme pour $d = 1$.

3. Le but inavoué de cette question est de se débarrasser de ces parties entières disgracieuses.
   On sait que $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \leqslant \frac{n}{d} + 1$. En élevant au carré, et en divisant par n^2, il vient que
   $$\frac{1}{n^2}\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2 \leqslant \frac{1}{d^2} + \frac{2}{nd} + \frac{1}{n^2}.$$
   On obtient l'inégalité voulue.
   Posons
   $$r'_n = \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^2.$$
   Par l'inégalité triangulaire, et compte tenu que $|\mu(d)| \leqslant 1$:
   $$\left|r_n - r'_n\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \left| \lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2 - \frac{n^2}{d^2} \right| \leqslant \sum_{d=1}^{n} \left(\frac{2}{nd} + \frac{1}{n^2} \right).$$
   Le membre de droite fournit deux termes : $\frac{2}{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$ qui est, d'après la formule de la série harmonique, voir exercice 24, un $\frac{1}{n}\mathrm{O}(\log(n))$, et le terme $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Comme $|\mu(d)| \leqslant 1$, la série (r'_n) converge absolument vers, disons, ℓ', par un critère de comparaison avec une série de Riemann. L'inégalité $|r_n - r'_n| \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{O}(\log(n)) + \frac{1}{n}$ donne, en passant à la limite, que $\lim_{n\to+\infty} r_n = \ell'$ comme voulu.
4. (a) Il s'agit d'une série double absolument convergente par le critère de Cauchy car c'est le produit de deux séries absolument convergentes de terme général $(\mu(d)/d^2)$ et $(\frac{1}{n^2})$, qui, au passage, vaut P. Par absolue convergence, cette somme ne dépend pas de l'ordre dans laquelle on la calcule, et donc cette somme a bien un sens, voir l'exercice 32, et la remarque 17 qui le suit.
   (b) On définit bien une application bijective dont la réciproque est donnée par $(d, \mathrm{N}) \mapsto (d, \mathrm{N}/d)$. La formule proposée est juste un changement de variable $\mathrm{N} = nd$, l'utilisation de cette bijection, et le fait que l'on peut permuter et associer comme bon nous semble à l'intérieur d'une série absolument convergente (voir encore une fois la remarque 17).
   (c) Soient $p_1, \ldots, p_m$ tous les nombres premiers qui divisent N. Si $\mathrm{N} > 1$, alors $m > 0$ et
   $$\sum_{d|\mathrm{N}} \mu(d) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{p_{i_1} < \cdots < p_{i_k}} (-1)^k = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = (1-1)^m = 0.$$
   Si $\mathrm{N} = 1$, alors $\sum_{d|\mathrm{N}} \mu(d) = 1$.
   D'après la question qui précède
   $$\mathrm{P} = \sum_{\mathrm{N}=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{N}^2} \left(\sum_{d|\mathrm{N}} \mu(d) \right) = 1 + \sum_{\mathrm{N}>1} \frac{1}{\mathrm{N}^2} \times 0 = 1.$$
5. Posons $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, voir l'exercice 6.2. On sait, par exemple, par l'exercice 43, que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.
   Il ne reste plus qu'à conclure
   $$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} r'_n = \frac{\mathrm{P}}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Remarque (comment la fonction ζ vient à l'arithmétique). Il s'agit d'un résultat dû à Cesàro. On voit ici un aperçu intéressant d'une incursion de la fonction ζ au beau milieu d'une situation purement arithmétique. En suivant pas à pas la preuve, on pourra généraliser le résultat obtenu en disant que la probabilité $r_{n,m}$ pour que m nombres de 1 à n pris au hasard et indépendamment, soient globalement premiers entre eux tend vers $\frac{1}{\zeta(m)}$ quand n tend vers l'infini.

L'incursion plus classique de la fonction ζ provient de l'égalité

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

que l'on démontre en développant chaque facteur $\frac{1}{1-p^{-s}}$ en une série géométrique, et en utilisant le fait que $\mathbb{Z}$ est factoriel pour retrouver par développement $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$.

Voici une preuve, fausse par imprécision, mais peut-être plus éclairante et plus convaincante[12] de l'apparition mystérieuse de $\zeta(2)$: un nombre sur p est divisible par p. Donc, la probabilité qu'un nombre soit divisible par p est $1/p$, et pour deux nombres pris indépendamment, cela donne $1/p^2$, et qu'ils ne soient pas simultanément divisibles par p, la probabilité est $1 - 1/p^2$. Or, ces probabilités sont indépendantes pour ses nombres premiers p distincts, et donc, la probabilité pour que deux nombres soient premiers entre eux est

$$\prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

C'est en réalité le prolongement analytique de la fonction ζ à $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ qui a passionné[13] les mathématiciens depuis que Riemann a mis en lien les zéros de cette fonction supposés être de partie réelle $\frac{1}{2}$ avec la répartition des nombres premiers.

Remarque. Si cet exercice vous a plu autant qu'à nous, testez-vous sur celui-ci : montrer que la probabilité t_n pour qu'un nombre pris au hasard dans $[1, n]$ soit sans facteur carré est égal à

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \lfloor \frac{n}{d^2} \rfloor.$$

Et remarquez qu'encore une fois, sa limite est $\frac{6}{\pi^2}$. Evidemment, l'histoire ne s'arrête pas là. On peut décliner cette problématique à d'autres anneaux ; déjà pour commencer, sur l'anneau des entiers de Gauss, où intervient la constante de Catalan. On vous laisse découvrir ce jardin des délices sur la grande toile.

12.7 Théorème de Perron-Frobenius

12. On en profite pour saluer nos amis physiciens !

13. Comme l'a dit Hilbert : « Si je devais me réveiller après un sommeil de mille ans, la première question que je poserais serait “A-t-on prouvé l'hypothèse de Riemann ?” » Mille ans, tout de même pour prouver la célèbre conjecture. Merci pour ce message d'espoir aux générations futures, M. Hilbert !

Exercice 107 (Théorème de Perron-Frobenius, exemple de D. Perrin) Hypocondriaques, bonsoir ! On modélise trois états face à une maladie que nous ne nommerons pas afin de rester groupés. Les trois états sont Immunisé, Sain (mais non immunisé) et Malade. On introduit la *matrice de transition* $A = (a_{ij})$ de semaine en semaine entre ces trois états, où a_{ij} représente la probabilité de passer d'un état i à un état j.

$$A := \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Cela signifie par exemple qu'un immunisé risque, avec une probabilité de $0,1$, d'être non immunisé sain la semaine suivante, mais ne risque pas d'être malade...

1. Soit $V = (x_1, x_2, x_3)$ le vecteur ligne représentant la proportion x_1, resp. x_2, resp. x_3, d'immunisés, resp. sains, resp. malades. Comment se servir de la matrice A pour obtenir le vecteur analogue V' pour la semaine suivante ? Et au bout de n-semaines ?
2. Calculer A^2 et interpréter le résultat. Calculer A^7 sur votre logiciel de calcul favori. Que remarquez-vous de surprenant ? Interpréter ce résultat.

Soluce

1. La proportion x'_i de personnes de type i la semaine qui suit est $x'_i = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3$. Autrement dit, le vecteur ligne $V' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ est donné [14] par $V' = VA$. Au bout de 2 semaines, la proportion de chaque type sera donnée par le vecteur $V'' = (VA)A = VA^2$. Et, par récurrence, on obtient le vecteur VA^n au bout de n semaines.
2. On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,14 & 0,05 \\ 0,4 & 0,25 & 0,35 \\ 0,88 & 0,08 & 0,04 \end{pmatrix}$$

   D'après la question qui précède, cette matrice donne la probabilité de passer d'un état i (ligne) à un état j (colonne) au bout de deux semaines.

   En approximant aux deux premières décimales, on trouve

$$A^7 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,15 & 0,09 \\ 0,75 & 0,15 & 0,09 \\ 0,75 & 0,15 & 0,09 \end{pmatrix}$$

   On note avec surprise que les lignes de A^n tendent à devenir toutes égales lorsque n est assez grand. Cela signifie que, quel que soit notre état initial, on a tous la même probabilité de se retrouver dans un état fixé au bout d'un nombre assez grand de semaines. Ce résultat est très général et il est résumé par le théorème de Perron-Frobenius, voir exercice suivant.

14. C'est là qu'on voit que l'on aurait dû écrire les données en colonne, c'est-à-dire tout transposer. Mais on respecte les us et coutumes du monde des probas !

Exercice 108 (Théorème de Perron-Frobenius)
On considère l'ensemble $\mathscr{A}_n^{++}$, resp. $\mathscr{A}_n^{+}$, des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients strictement positifs, resp. positifs, et dont la somme des lignes est égale à 1.

Nous allons montrer que si A est dans $\mathscr{A}_n^{++}$, alors : a) le rayon spectral $\rho(\mathrm{A}) = 1$, avec 1 valeur propre simple de A, b) 1 est l'unique valeur propre de module 1, et c) la suite $(\mathrm{A}^k)_k$ tend vers une matrice $\mathrm{L} \in \mathscr{A}_n^{+}$ non nulle dont toutes les lignes sont égales. On fixe dans la suite $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n^{++}$.

1. (Préliminaires) Montrer que si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ a un rayon spectral $\rho(\mathrm{M}) < 1$, alors la suite (M^k) tend vers 0.
2. Montrer que $|||\mathrm{A}|||_\infty = 1$, où $|||-|||_\infty$ désigne la norme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme infinie de $\mathbb{R}^n$. En déduire que le rayon de convergence de A vaut $\rho(\mathrm{A}) = 1$.
3. On suppose λ de module 1 dans le spectre de A. Montrer que si $u \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors $u \in \mathbb{C}e$, avec $e := (1, \ldots, 1)$. En déduire que $\lambda = 1$, avec multiplicité géométrique $m_g(1) = 1$.
4. (a) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace normé E tel que $\mathrm{Spec}(f) = \{1\}$. Montrer que $\nu := f - \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est nilpotent et que si, de plus, $\left|\left|\left|f^k\right|\right|\right|$ est bornée pour la borne subordonnée à celle de E, alors $f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.
   (b) En déduire que 1 est valeur propre simple de A.
5. Montrer que la suite (A^k) tend vers une matrice L non nulle, à coefficients tous positifs, et dont toutes les lignes sont égales.
6. Montrer que si $\mathrm{B} \in \mathscr{A}_n^{+}$ vérifie $\mathrm{B}^m \in \mathscr{A}_n^{++}$ pour un m, alors la suite (B^k) tend vers une matrice L non nulle, à coefficients tous positifs, et dont toutes les lignes sont égales. Expliquer alors l'exercice 107.

Soluce

1. On peut remplacer M par un endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice est M dans la base canonique. Par le lemme des noyaux, $\mathbb{C}^n$ se décompose en une somme directe de $\ker(g - \lambda\,\mathrm{Id})^{m_\lambda}$, $|\lambda| < 1$, sur lequel l'endomorphisme induit g_λ vérifie $g_\lambda = \lambda\,\mathrm{Id} + \nu_\lambda$, avec ν_λ nilpotent. On utilise alors le binôme de Newton pour montrer que
$$g_\lambda^k = (\lambda\,\mathrm{Id} + \nu_\lambda)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} n_\lambda^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} n_\lambda^i.$$
On voit donc par comparaison des limites que g_λ^k tend bien vers zéro. Donc, pour tout vecteur x de $\mathbb{C}^n$, $g^k(x) = \sum_\lambda g_\lambda^k(x)$, qui tend vers 0.
2. On pose $\mathrm{A} := (a_{ij})$. On suppose un vecteur $u = (u_i)$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\max_i\{|u_i|\} = 1$. Il vient alors $|||\mathrm{A}|||_\infty \leqslant 1$. On pose $e = (1, \ldots, 1)$; on a $\mathrm{A}e = e$ par hypothèses sur A, ce qui prouve l'égalité $|||\mathrm{A}|||_\infty = 1$.
   Comme e est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1, on déduit $\rho(\mathrm{A}) \geqslant 1$. De plus, si u est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, et tel que $\|u\|_\infty = 1$, alors
$$|\lambda| = \|\lambda u\|_\infty = \|\mathrm{A}u\|_\infty \leqslant |||\mathrm{A}|||_\infty = 1.$$

Il en résulte $\rho(\mathrm{A}) = 1$.

3. On a donc un vecteur non nul u, que l'on peut choisir de norme $\|u\|_\infty = 1$, tel que $\mathrm{A}u = \lambda u$. On a donc $\|\mathrm{A}u\|_\infty = \|\lambda u\|_\infty = |\lambda| = 1$. Il existe donc i tel que
$$1 = |(\mathrm{A}u)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j\right|.$$
On peut poser $z := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$ de module 1, et, quitte à remplacer u par $z^{-1}u$, on peut supposer que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = 1$, et donc, en posant $x_j = \Re(u_j)$,
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$
Par Pythagore, $x_j \leqslant |u_j| \leqslant 1$. Il vient $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - 1) = 0$, avec $a_{ij}(x_j - 1) \leqslant 0$ pour tout j. Cela implique $a_{ij}(x_j - 1) = 0$, et finalement $x_j - 1 = 0$ pour tout j. Cela implique $x_j = |u_j| = 1$, ce qui force $u_j = x_j = 1$ pour tout j. On trouve alors [15] $u = e$.

Conclusion, $\lambda e = \mathrm{A}e = e$, et donc $\lambda = 1$, avec, de surcroît, $\ker(\mathrm{A} - \mathrm{Id}) = \mathbb{C}e$, ce qui implique $m_g(1) = 1$.

4. (a) Comme $\mathrm{Spec}(f) = \{1\}$, Id est la partie diagonalisable de f dans sa décomposition de Dunford. Donc, $f - \mathrm{Id}$ est nilpotente [16].

Montrons que si $\left|\left|\left|f^k\right|\right|\right|$ est bornée, alors $f - \mathrm{Id} = \nu$ est nul. Par l'absurde, si ν, qui est nilpotent, est non nul, son polynôme minimal est de la forme $\mathrm{P} := \mathrm{X}^r$, avec $r \geqslant 2$. La famille $(\mathrm{Id}, \nu, \dots, \nu^{r-1})$ est alors libre. En effet, sinon, il existerait une relation non triviale $\sum_{k=0}^{r-1} a_k \nu^k = 0$, et donc un polynôme non nul $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{r-1} a_k \mathrm{X}^k$ tel que $\mathrm{Q}(\nu) = 0$, c'est-à-dire tel que X^r divise Q, impossible.

On peut prolonger cette famille libre en une base $\mathscr{B}$ de $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, et prendre pour nouvelle norme N_∞ sur $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ le sup des modules des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Par hypothèse, la suite (f^k) est bornée pour $|||-|||$, et donc pour N_∞ puisque toutes les normes sont équivalentes. Or, la composante en ν (puisque $r \geqslant 2$, ν est bien dans la base) de $f^k = (\mathrm{Id} + \nu)^k$ est k, par le binôme de Newton, puisque
$$(\mathrm{Id} + \nu)^k = \mathrm{Id} + k\nu + \cdots + \binom{k}{r-1} \nu^{r-1}.$$
Or, cette composante n'est pas bornée. Absurde.

(b) Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ correspondant à A pour la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit m la multiplicité de 1 dans le polynôme caractéristique $\chi_g = \chi_\mathrm{A}$ de f, de sorte que $\chi_g = (\mathrm{X} - 1)^m \mathrm{Q}$, avec $\mathrm{Q}(1) \neq 0$. Le lemme des noyaux donne une décomposition
$$\mathbb{C}^n = \ker(g - \mathrm{Id})^m \oplus \ker\left(\mathrm{Q}(g)\right).$$

15. On a une interprétation géométrique très naturelle de que l'on vient de prouver : si des complexes u_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont dans le disque unité, et si un barycentre avec coefficients strictement positifs des u_i se trouve sur le *cercle unité*, alors tous les u_i sont égaux (et sur le cercle unité). Faites un dessin, c'est la stricte convexité du disque !

16. On peut aussi le faire sans Dunford, avec Cayley-Hamilton $\chi_f(f) = 0$, avec $\chi_f = (\mathrm{X} - 1)^n$.

Soit f l'endomorphisme induit de g à $\mathrm{E} := \ker(g - \mathrm{Id})^m \subset \mathbb{C}^n$, muni de la norme sup de $\mathbb{C}^n$. Comme $\left|\left|\left|\mathrm{A}^k\right|\right|\right|_\infty \leqslant |||\mathrm{A}|||_\infty^k \leqslant 1$, (g^k) est bornée, et donc sa restriction f^k l'est également. Par la question qui précède, $f = \mathrm{Id}$ et donc g est l'identité sur $\ker(g-\mathrm{Id})^m$. Ceci prouve que $\ker(g-\mathrm{Id})^m = \ker(g-\mathrm{Id})$. Or, la multiplicité algébrique de 1 est égale à la dimension de l'espace caractéristique $\ker(g - \mathrm{Id})^m$. Conclusion,

$$m_a(1) = \dim\ker(g - \mathrm{Id})^m = \dim\ker(g - \mathrm{Id}) = \dim\mathbb{C}e = 1.$$

5. On va considérer la suite (g^k), ce qui revient au même. D'après les questions qui précèdent, $\mathbb{C}^n$ se décompose en $\mathbb{C}e \oplus \ker \mathrm{Q}(g)$, pour un polynôme Q dont toutes les racines sont de module strictement inférieur à 1. D'après la question préliminaire, la restriction de g^k à $\ker\mathrm{Q}(g)$ tend alors vers zéro.

   En regardant g^k dans une base fixée compatible avec la décomposition du lemme des noyaux, on voit que la matrice A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{B}\end{smallmatrix}\right)$, avec B^k tendant vers 0. Plus précisément,

$$\mathrm{A}^k = \mathrm{U}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{B}^k\end{pmatrix}\mathrm{U}^{-1},\ \mathrm{U} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

   Donc, par continuité de la conjugaison, A^k tend bien vers la matrice $\mathrm{L} := \mathrm{U}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathrm{U}^{-1}$. La matrice L est bien de rang 1 puisque la conjugaison conserve le rang.

   Comme $\mathrm{A} \in \mathscr{A}^{++}$, on voit facilement par récurrence que $\mathrm{A}^k \in \mathscr{A}^{++}$, et comme $\mathscr{A}^+$ est clairement un fermé, $\mathrm{L} \in \mathscr{A}^+$.

   Comme L est de rang 1, ${}^t\mathrm{L}$ est également de rang 1, et donc, toutes les lignes de L sont proportionnelles. Mais comme $\mathrm{A}e = e$, il vient $\mathrm{A}^k e = e$, et par passage à la limite, $\mathrm{L}e = e$, par continuité de l'application $(\mathrm{M}, w) \mapsto \mathrm{M}w$. Donc, la somme de toutes les lignes de L est égale à 1. Les lignes sont donc toutes égales.

6. Posons $\mathrm{A} := \mathrm{B}^m \in \mathscr{A}^{++}$. Si on montre que la suite (B^k) converge, alors, sa limite sera aussi la limite de $(\mathrm{B}^{mk})_k$, et donc, la limite de (A^k), ce qui implique l'assertion voulue.

   Nous allons montrer que 1 est valeur propre simple de B, et que les autres valeurs propres λ de B vérifient $|\lambda| < 1$.

   En trigonalisant la matrice B, on montre le résultat classique qui assure que $\chi_{\mathrm{B}^m} = \prod_{\lambda\in\mathrm{Spec(B)}}(\mathrm{X} - \lambda^m)$. D'après la question précédente, comme $\mathrm{A} = \mathrm{B}^m \in \mathscr{A}_n^{++}$, il existe un unique λ dans Spec(B) tel que $\lambda^m = 1$ et les autres valeurs propres de B vérifient $|\lambda^m| < 1$. Or, $\mathrm{B} \in \mathscr{A}_n^+$, donc, 1 est valeur propre de B pour le vecteur propre e (les sommes des lignes valent 1). Conclusion, l'unique λ tel que $\lambda^m = 1$ est $\lambda = 1$ et les autres valeurs propres de B sont toutes de module strictement inférieur à 1. On a vu que cette situation impose que (B^k) converge.

   Dans l'exercice 107, la matrice A est dans $\mathscr{A}_3^+$, et la matrice A^2 se trouve dans $\mathscr{A}_3^{++}$. On peut donc lui appliquer le théorème de Perron-Frobenius.

12.8 Théorème de Weierstrass – preuve probabiliste

Exercice 109 (Théorème de Weierstrass – version probabiliste)
Le but de cet exercice est d'utiliser les probabilités pour démontrer le théorème de densité de Weierstrass qui s'énonce ainsi : l'ensemble des fonctions polynomiales à valeurs dans $\mathbb{C}$, sur un segment $[a,b]$ est dense, pour la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$, dans l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. Quitte à changer les fonctions $f(x)$ par $f(bx+a(1-x))$, on se ramène au cas où $[a,b]=[0,1]$. On fixe dans la suite une fonction continue $f:[a;b]\to\mathbb{C}$ et un $x\in[0,1]$. On considère une suite $(\mathrm{X}_i)_i$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toute une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(x)$. Soit $\mathrm{S}_n \coloneqq \sum_{k=1}^n \mathrm{X}_k$.

1. Donner une expression de $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)$, et en déduire que $p_n(x) \coloneqq \mathrm{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right)$ est un polynôme en x, dont les coefficients sont indépendants de x.
2. Soit g la fonction $g(t)=f(t)-f(x)$ pour tout t. Montrer que
$$p_n(x)-f(x) = \mathrm{E}\left(g\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)x^k(1-x)^{n-k}.$$
s
3. Soit $\varepsilon>0$ fixé. Justifier que f est uniformément continue sur $[0,1]$.
Dans la suite, on note δ tel que, pour tous $(x;y)\in[0,1]^2$,
$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$
4. On note :
$$\mathrm{S}_1(x) = \sum_{k;\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} \binom{n}{k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)x^k(1-x)^{n-k},$$
$$\mathrm{S}_2(x) = \sum_{k;\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta} \binom{n}{k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)x^k(1-x)^{n-k}$$
De sorte que : $p_n(x)-f(x) = \mathrm{S}_1(x)+\mathrm{S}_2(x)$.
   (a) Montrer que $|\mathrm{S}_1(x)|\leqslant\varepsilon$.
   (b) Montrer, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que
$$|\mathrm{S}_2(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}-x\right|>\delta\right) \leqslant 2\|f\|_\infty \frac{1}{n\delta^2}.$$
5. En déduire le théorème de Weierstrass.

Soluce

1. Comme, pour tout i, la variable X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre x, la variable S_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$. La variable $\frac{\mathrm{S}_n}{n}$ est bien à valeurs

dans $[0,1]$, et pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$; par suite,

$$\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Or, comme f est continue[17] sur $[0,1]$, on peut appliquer le théorème de transfert :

$$p_n(x) := \mathrm{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

s Autrement dit, $\mathrm{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right)$ est bien un polynôme en x, dont les coefficients ne dépendent pas de x.

2. On considère $f(x)$ comme une variable aléatoire qui associe à tout évènement la constante $f(x) \in \mathbb{C}$. En utilisant $\mathrm{E}(f(x)) = f(x)$, pour x fixé, on obtient alors par linéarité et par transfert :

$$\begin{aligned} p_n(x) - f(x) &= \mathrm{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) - f(x) = \mathrm{E}\left(f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) - f(x)\right) \\ &= \mathrm{E}\left(g\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Ceci nous amène au résultat attendu.

3. Il suffit d'invoquer le théorème de Heine : comme f est continue sur le compact $[0,1]$, elle y est uniformément continue.

4. (a) On a :

$$\begin{aligned} |\mathrm{S}_1(x)| &= \left| \sum_{k;\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} \binom{n}{k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leqslant \sum_{k;\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} \binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &< \varepsilon \sum_{k;\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Comme f est continue sur $[0,1]$, elle est bornée. Par l'inégalité triangulaire, on obtient $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant 2\,\|f\|_\infty$, et donc :

$$\begin{aligned} |\mathrm{S}_2(x)| &\leqslant \sum_{k;\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta} \binom{n}{k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant 2\,\|f\|_\infty \sum_{k;\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 2\,\|f\|_\infty\, \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - x\right| \geqslant \delta\right). \end{aligned}$$

17. Cet argument, pour la validité du théorème de transfert, est ici inutile vu que les valeurs de la variable sont en nombre fini.

De plus, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right)&=\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}-\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right|\geqslant\delta\right)\\&\leqslant\frac{\mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)}{\delta^2}=\frac{1}{\delta^2n^2}nx(1-x)\\&=\frac{1}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{1}{\delta^2n}.\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$|\mathrm{S}_2(x)|\leqslant 2\,\|f\|_\infty\,\frac{1}{n\delta^2}.$$

5. D'après ce qui précède, on obtient :

$$|p_n(x)-f(x)|\leqslant|\mathrm{S}_1(x)|+|\mathrm{S}_2(x)|\leqslant\varepsilon+2\,\|f\|_\infty\,\frac{1}{n\delta^2}.$$

Comme $\dfrac{1}{n\delta^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $\dfrac{1}{n\delta^2}\leqslant\varepsilon$.
Ceci implique que $|p_n(x)-f(x)|\leqslant 2\varepsilon$.
Comme x était quelconque dans $[0,1]$, et que le polynôme p_n est indépendant de x, on a montré que $\|p_n-f\|_\infty\leqslant 2\varepsilon$; la fonction f peut donc être approchée uniformément par une suite polynomiale.

12.9 Droite des moindres carrés

Exercice 110 (Droite des moindres carrés)
Le plan est rapporté à un repère $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ orthonormé. Pour un entier $n\geqslant 3$, on considère un « nuage » de n points $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\ldots,\mathrm{M}_n$ et on note (x_i,y_i) les coordonnées de M_i en supposant que les abscisses x_i ne sont pas toutes égales.

Étant donnée une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=ax+b$ on nomme H_i le projeté du point M_i sur cette droite $\mathscr{D}$ parallèlement à l'axe des ordonnées et on définit la quantité :

$$q(\mathscr{D})=\mathrm{M}_1\mathrm{H}_1{}^2+\mathrm{M}_2\mathrm{H}_2{}^2+\cdots+\mathrm{M}_n\mathrm{H}_n{}^2$$

On se propose de montrer l'existence et l'unicité d'une droite $\mathscr{D}_0$ d'équation définie par $y=a_0x+b_0$ qui minimise la quantité.

$$\mathrm{M}_1\mathrm{H}_1{}^2+\mathrm{M}_2\mathrm{H}_2{}^2+\cdots+\mathrm{M}_n\mathrm{H}_n{}^2$$

Montrer qu'il existe un seul couple de réels (a_0,b_0) rendant minimale la quantité

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2.$$

Soluce

— La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(a,b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = 2\sum_{i=1}^n x_i(y_i - ax_i - b) = 2\left(a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i\right) \tag{12.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 2\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 2\left(a\sum_{i=1}^n x_i + bn - \sum_{i=1}^n y_i\right) \tag{12.2}$$

— Le point (a,b) est un point critique de f si et seulement s'il est solution du système linéaire :

$$a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0, \qquad a\sum_{i=1}^n x_i + bn - \sum_{i=1}^n y_i = 0,$$

— Le système précédent a pour déterminant est $\mathrm{D} = n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué aux vecteurs non colinéaires $u = (1,\dots,1)$ et $x = (x_1,\dots,x_n)$ montre que D est strictement positif. Par conséquent f possède un seul point critique (a_0,b_0).

— La résolution de notre système donne :

$$a_0 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\mathrm{D}}, \quad b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\mathrm{D}}.$$

— Montrons qu'en (a_0,b_0) la fonction f possède un minimum global strict. Pour cela, évaluons la différence :

$$\Delta = f(a_0+a, b_0+b) - f(a_0,b_0) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0x_i - b_0 - ax_i - b)^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - a_0x_i - b_0)^2.$$

En développant puis en simplifiant, on obtient

$$\Delta = -2\sum_{i=1}^n (y_i - a_0x_i - b_0)(ax_i + b) + \sum_{i=1}^n (ax_i + b)^2$$

mais, (a_0,b_0) étant solution du système précédent, on a :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a_0x_i - b_0)(ax_i + b) = a\sum_{i=1}^n x_i(y_i - a_0x_i - b_0) + b\sum_{i=1}^n x_i(y_i - a_0x_i - b_0) = 0+0 = 0.$$

On en conclut que $\Delta = \sum_{i=1}^n (ax_i + b)^2$ donc $\Delta \geqslant 0$. L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $ax_i + b = 0$ pour tout i et auquel cas $a = b = 0$ (se souvenir qu'au moins deux des x_i sont distincts).

— Conclusion : f possède en (a_0,b_0) un minimum global strict, ce qui établit l'existence et l'unicité de la droite des moindres carrés.

Remarque. Avec les « indicateurs statistiques » :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n),$$

moyenne des abscisses et moyenne des ordonnées des points du « nuage »,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\left({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2\right) - \overline{x}^2 \quad \text{et} \quad \sigma_{xy}^2 = \frac{1}{n}(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) - \overline{x}\cdot\overline{y},$$

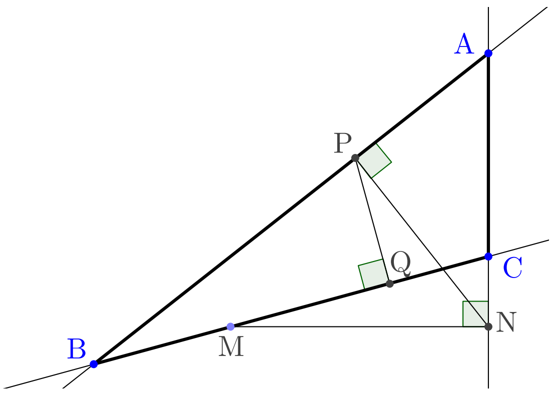
variance des abscisses et covariance des abscisses et des ordonnées des points du « nuage », on a : $a_0 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}$ et $b_0 = \overline{y} - a_0\overline{x}$.

Chapitre 13

Géométrie

Exercice 111 (Triangle et point fixe)
On considère un triangle ABC non aplati. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{P})$ de points du plan tel que :

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{BC}),\ \mathrm{N} \in (\mathrm{CA}),\ \mathrm{P} \in (\mathrm{AB}),\ (\mathrm{MN}) \perp (\mathrm{CA}),\ (\mathrm{NP}) \perp (\mathrm{AB}),\ (\mathrm{PM}) \perp (\mathrm{BC}).$$



Soluce
Soit $\mathrm{M} \in (\mathrm{BC})$. Notons N le projeté orthogonal de M sur (AC), P le projeté orthogonal de N sur (AB), et enfin Q le projeté orthogonal de P sur (BC). Considérons la fonction $f : (\mathrm{BC}) \to (\mathrm{BC})$ qui à un point M de (BC) associe le point Q que l'on vient de définir. Ainsi le problème se ramène-t-il à l'existence et l'unicité d'un point fixe pour la fonction f.

Évacuons d'abord le cas particulier où ABC est un triangle rectangle. Il y a plusieurs possibilités.

S'il est rectangle en B, alors, pour tout $\mathrm{M} \in (\mathrm{BC})$, $f(\mathrm{M}) = \mathrm{B}$. On peut alors choisir B comme étant notre point M.

S'il est rectangle en C, on appelle H le pied de la hauteur issue de C. Alors, les points N et C sont confondus, de même que P et H. On choisit alors le point M tel que (MH) et (AC) sont parallèles.

Enfin, s'il est rectangle en A, alors P et A sont cette fois-ci confondus. On choisit alors comme point M le pied de la hauteur issue de A.

En bref, dans tous les cas, si le triangle ABC est rectangle, on peut trouver un tel triplet de points, et il est unique.

Considérons maintenant le cas général : la droite (BC) est un sous-espace vectoriel de dimension 1, donc complet. Montrons alors que la fonction f est contractante.

Considérons $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) \in (\mathrm{BC})^2$. On distingue deux cas.

Premier cas : tous les angles du triangle sont aigus (figure 13.1).

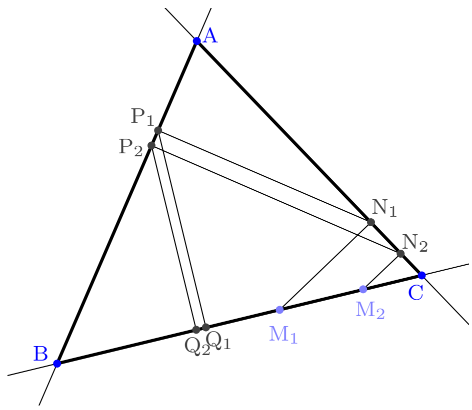


FIGURE 13.1 – Point fixe dans le cas de trois angles aigus

Alors on a $\mathrm{CN}_2 = \mathrm{CM}_2 \cos(\hat{\mathrm{C}})$, et $\mathrm{CN}_1 = \mathrm{CM}_1 \cos(\hat{\mathrm{C}})$, dont on déduit $\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2 = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 \cos(\hat{\mathrm{C}})$. De même, on obtient $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathrm{N}_1\mathrm{M} = \mathrm{N}_2 \cos(\hat{\mathrm{A}})$, et $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \cos(\hat{\mathrm{B}})$.

On a alors

$$f(\mathrm{M}_1) f(\mathrm{M}_2) = k\ \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2, \quad \text{avec } k = \cos(\hat{\mathrm{A}}) \cos(\hat{\mathrm{B}}) \cos(\hat{\mathrm{C}}) < 1.$$

Deuxième cas : un des angles du triangle, disons $\hat{\mathrm{C}}$, est obtus (figure 13.2).

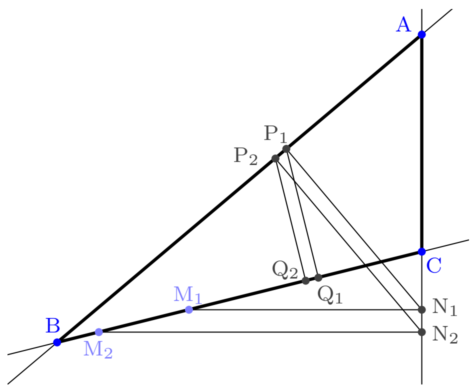


FIGURE 13.2 – Point fixe dans le cas d'un angle obtus

Alors, de même que précédemment, pour tous points M_1 et M_2 de (BC), on obtient

$$f(\mathrm{M}_1) f(\mathrm{M}_2) = k\ \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2, \quad \text{avec } k = \cos(\hat{\mathrm{A}}) \cos(\hat{\mathrm{B}}) \cos(\pi - \hat{\mathrm{C}}) < 1.$$

Ainsi, dans les deux cas, la fonction f est contractante dans un espace complet, donc admet un point fixe unique, comme voulu.

Exercice 112 (Point de Fermat d'un triangle)
On considère un triangle ABC du plan euclidien que l'on identifiera à $\mathbb{R}^2$. On suppose que les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ du triangle sont de mesure strictement inférieure à $\frac{2\pi}{3}$. Soit f la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+,\ \mathrm{M} \mapsto \mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC}$$

On veut montrer qu'il existe un unique point P qui minimise cette fonction.

1. *Existence.* Soit K le disque fermé de centre A et de rayon $\frac{2}{3}f(\mathrm{A})$. Montrer que, pour tout M, $f(\mathrm{M}) \geqslant 3\mathrm{AM} - f(\mathrm{A})$, et en déduire que le minimum de f (sur $\mathbb{R}^2$) est atteint un point de K. On fixera dans la suite un point P où f atteint son minimum.
2. *Condition nécessaire et calcul différentiel.*
   (a) On veut montrer que P n'est pas un sommet du triangle ABC ; montrons donc qu'il est distinct de A. Soit Δ la bissectrice de A au triangle et posons $\alpha = \frac{\widehat{A}}{2}$. On suppose M sur Δ, tel que $\mathrm{MA} = x$ et $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})} = \pm\alpha$. Montrer l'égalité
   $$f(\mathrm{M}) = x + \sqrt{x^2 - 2\mathrm{AB}x\cos\alpha + \mathrm{AB}^2} + \sqrt{x^2 - 2\mathrm{AC}x\cos\alpha + \mathrm{AC}^2}.$$
   En déduire que f n'atteint pas son minimum en A.
   (b) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$, et que la différentielle en un point M, distinct de A, B et C, appliquée au vecteur $\vec{h}$ de $\mathbb{R}^2$ est donnée par
   $$\mathrm{d}f_{\mathrm{M}}(\vec{h}) = \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{MA}}}{\mathrm{MA}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{MB}}}{\mathrm{MB}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{MC}}}{\mathrm{MC}}\right) \cdot \vec{h}.$$
3. *Unicité et construction.* Soit $\mathscr{C}_{\mathrm{AB}}$ (resp. $\mathscr{C}_{\mathrm{BC}}$, $\mathscr{C}_{\mathrm{CA}}$), le cercle circonscrit au triangle équilatéral extérieur au triangle ABC, ayant pour base AB (resp. BC, CA). Montrer que P est l'unique point d'intersection de ces trois cercles.

Soluce

1. L'inégalité triangulaire donne
   $$f(\mathrm{M}) = \mathrm{MA} + \mathrm{MB} + \mathrm{MC} \geqslant \mathrm{MA} + (\mathrm{MA} - \mathrm{AB}) + (\mathrm{MA} - \mathrm{AC}) = 3\mathrm{MA} - f(\mathrm{A}).$$
   Si l'on suppose $\mathrm{M} \notin \mathrm{K}$, c'est-à-dire $\mathrm{MA} > \frac{2}{3}f(\mathrm{A})$, alors, $f(\mathrm{M}) > f(\mathrm{A})$, et donc f n'atteint pas son minimum en M. Or f est continue, comme somme de racines carrées de polynômes, et K est compact. Donc f atteint un minimum sur K, qui est, du coup, également un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) Calculons $f(\mathrm{M})$ en fonction de x :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{M}) &= \mathrm{AM} + \sqrt{\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\|^2} + \sqrt{\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2} \\ &= \mathrm{AM} + \sqrt{\mathrm{AM}^2 - 2\cos\alpha \cdot \mathrm{AM} \cdot \mathrm{AB} + \mathrm{AB}^2} + \sqrt{\mathrm{AM}^2 - 2\cos\alpha \mathrm{AM} \cdot \mathrm{AC} + \mathrm{AC}^2} \\ &= x + \sqrt{x^2 - 2\mathrm{AB}x\cos\alpha + \mathrm{AB}^2} + \sqrt{x^2 - 2\mathrm{AC} \cdot x\cos\alpha + \mathrm{AC}^2} \end{aligned}$$

Soit g la fonction sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 - 2\mathrm{AB}x\cos\alpha + \mathrm{AB}^2} + \sqrt{x^2 - 2\mathrm{AC}x\cos\alpha + \mathrm{AC}^2}.$$

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, dérivable à droite en 0, et de plus, la dérivée g' est continue sur $\mathbb{R}^+$. Or, la dérivée à droite $g'(0)$ vaut

$$1 - \frac{2\mathrm{AB}\cos\alpha}{2\mathrm{AB}} - \frac{2\mathrm{AC}\cos\alpha}{2\mathrm{AC}} = 1 - 2\cos\alpha < 0,$$

car $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, par hypothèses, et cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$. Par continuité de g' [1], il en résulte qu'il existe un intervalle $[0, \varepsilon]$, avec $\varepsilon > 0$ tel que $g'(x)$ est strictement négatif sur cet intervalle. Conclusion, 0 ne peut pas être un minimum pour g et donc A ne peut pas être un minimum pour f.

(b) Il suffit de montrer que la fonction définie par $a(\mathrm{M}) = \mathrm{AM}$ est différentiable en tout point M distinct de A et que pour un vecteur $\vec{h}$,

$$\mathrm{d}a_{\mathrm{M}}(\vec{h}) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\mathrm{AM}} \cdot \vec{h}.$$

Or, a est la composée $\rho \circ \tilde{a}$, où $\tilde{a}(\mathrm{M}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|^2$ et $\rho(x) = \sqrt{x}$. On a

$$\tilde{a}(\mathrm{M} + \vec{h}) = (\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \vec{h}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \vec{h}) = \tilde{a}(\mathrm{M}) + 2\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{h} + \vec{h}^2.$$

Cela donne

$$\mathrm{d}\tilde{a}_{\mathrm{M}}(\vec{h}) = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{h}.$$

Comme M est distinct de A et ρ est différentiable sur $\mathbb{R}^{+*}$, il vient :

$$\mathrm{d}a_{\mathrm{M}}(\vec{h}) = \mathrm{d}(\rho \circ \tilde{a})_{\mathrm{M}}(\vec{h}) = \frac{\mathrm{d}\tilde{a}_{\mathrm{M}}(\vec{h})}{2\sqrt{\tilde{a}(\mathrm{M})}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{\mathrm{AM}} \cdot \vec{h}.$$

3. Comme P n'est pas un sommet de ABC, il vient que f est différentiable en P, et donc nécessairement [2], $\mathrm{d}f_{\mathrm{P}} = 0$, ce qui implique

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{\mathrm{PA}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{\mathrm{PB}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\mathrm{PC}} = \vec{0}.$$

Notons respectivement ces trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$; ils sont donc normés et leur somme est nulle. On a donc $1 = \vec{w}^2 = (-\vec{u} - \vec{v})^2 = 2 + 2\cos(\vec{u}, \vec{v})$, d'où l'on déduit

1. Attention, on rappelle qu'en général, une dérivée n'est pas toujours continue. Et pourtant, elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires !

2. Attention ici : l'assertion « P est un minimum pour f implique $\mathrm{d}f_{\mathrm{P}} = 0$ » est vraie car P est dans un minimum sur un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$.

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}$. De même, tous les angles entre les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ont pour cosinus $-1/2$.

Ceci implique, en particulier, que l'angle $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ est égal à $\pm\frac{2\pi}{3}$. Cela signifie que P appartient, soit à l'arc capable pour le couple (A, B) et l'angle $\frac{2\pi}{3}$, soit à l'arc capable pour le couple (A, B) et l'angle $-\frac{2\pi}{3}$. Or, comme $\frac{\pi}{3}$, resp. $-\frac{\pi}{3}$, est congru à $-\frac{2\pi}{3}$, resp. $\frac{2\pi}{3}$, modulo π, il vient que $\mathscr{C}_{AB}$ est un des deux cercles qui prolonge ces deux arcs capables.

Pour montrer que P est sur $\mathscr{C}_{AB}$, il suffit de montrer, voir la figure 3, que P se situe dans le même demi-plan (ouvert) que C.

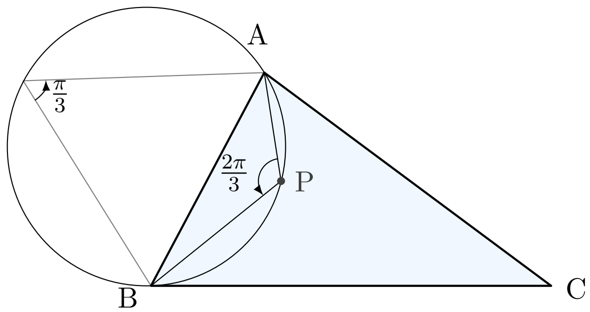


FIGURE 13.3 – Position de P par rapport à AB

Montrons cette assertion. Si P n'était pas dans le même demi-plan, alors son symétrique P′ par rapport à AB serait dans le même demi-plan que C et vérifierait $P'A = PA$, $P'B = PB$ et l'inégalité[3] $P'C < PC$, et donc $f(P') < f(P)$, ce qui est contraire à la minimalité de P.

Le point P se situe sur $\mathscr{C}_{AB}$, sur $\mathscr{C}_{AC}$, et sur $\mathscr{C}_{BC}$. On sait de plus qu'il est distinct, par exemple, de A. Pour montrer son unicité, il reste à montrer que les deux cercles $\mathscr{C}_{AB}$ et $\mathscr{C}_{AC}$ sont distincts. En effet, deux cercles données sont, a) soit égaux, b) soit d'intersection vide, c) soit d'intersection un point double, d) soit deux points distincts, or, on sait déjà par ce qui précède que les cas b) et c) sont à exclure.

Si $\mathscr{C}_{AB} = \mathscr{C}_{AC}$, alors, par exemple, l'angle en C au triangle ABC vaut $\frac{2\pi}{3}$, contrairement à l'hypothèse.

3. Cette inégalité se voit immédiatement, mais si on veut la prouver algébriquement, on peut par exemple écrire $P'C$ et PC à l'aide de coordonnées dans un repère orthonormé d'axe des abscisses AB.

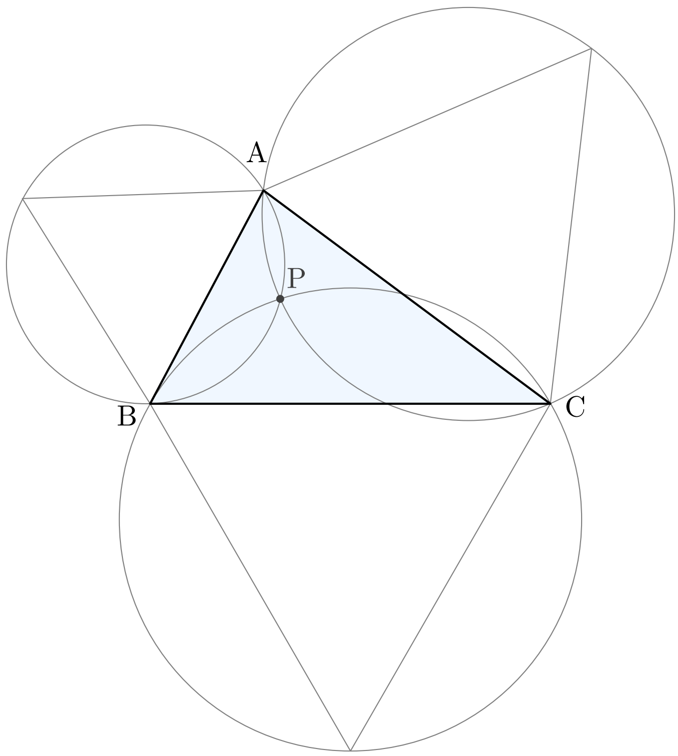


Figure 13.4 – Construction du point de Fermat

Chapitre 14

Calcul différentiel

L'exercice qui suit pourra s'avérer utile lorsque l'on résout des équations matricielles, au moment où on a besoin d'inverser une fonction. On est souvent tenté de remplacer la variable réelle x par une matrice nilpotente N dans les formules de Taylor. Le problème est que cela n'est possible que si l'on sait remplacer la décomposition de Taylor, qui est une identité entre fonctions réelles par une égalité entre polynômes. C'est exactement ce que nous allons faire, avant d'en tirer les diverses bénéfices.

Exercice 113 (Lemme de Kiz et application aux équations matricielles)

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que pour tout x dans un voisinage de 0, $P(x) = O(x^n)$, resp. $P(x) = o(x^n)$.

1. Montrer que $P = X^n Q$, resp. $P = X^{n+1}Q$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
2. Soit N une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ d'indice de nilpotence n.
   (a) Montrer que le polynôme $U = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$ vérifie $U(N) = (I - N)^{-1}$.
   (b) On pose $\alpha = \frac{1}{q}$, avec $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme
   $$V = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}X^{n-1}$$
   vérifie $V(N)^q = I + N$.
   (c) Montrer que le polynôme $W = X - \frac{1}{2}X^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n-1}X^{n-1}$ vérifie $\exp\big(W(N)\big) = I + N$.

Soluce

1. On suppose $P(x) = O(x^n)$, pour x dans un voisinage de 0. Effectuons la division euclidienne du polynôme P par X^n, on obtient $P = X^n Q + R$, avec $\deg(R) < n$.
   Si, par l'absurde, R est non nul, alors il existe k minimal, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, tel que $R = r_{n-1}X^{n-1} + \cdots + r_k X^k$, avec $r_k \neq 0$. On a alors $\frac{P(x)}{x^n} \sim_0 \frac{r_k}{x^{n-k}}$, ce qui est impossible car le membre de gauche est borné en 0, contrairement au membre de droite. Donc, $R = 0$.

La seconde assertion est similaire. On suppose $\mathrm{P}(x) = o(x^n)$, pour x dans un voisinage de 0. On écrit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{n+1}\mathrm{Q} + \mathrm{R}$, avec $\deg(\mathrm{R}) < n+1$. Si R est non nul, il existe k minimal, $0 \leqslant k \leqslant n$, tel que $\mathrm{R} = r_n \mathrm{X}^n + \cdots + r_k \mathrm{X}^k$, avec $r_k \neq 0$. On a alors $\frac{\mathrm{P}(x)}{x^n} \sim_0 \frac{r_k}{x^{n-k}}$, ce qui est impossible car le membre de gauche tend vers 0 en 0, contrairement au membre de droite. Donc, $\mathrm{R} = 0$.

2. (a) On se sert pas ici de la question 1. On se sert tout simplement de l'identité polynomiale de la série géométrique

$$(1-\mathrm{X})(1+\mathrm{X}+\cdots+\mathrm{X}^{n-1}) = 1-\mathrm{X}^n.$$

Evalué en N cela donne $(\mathrm{I}_m - \mathrm{N})\mathrm{U}(\mathrm{N}) = \mathrm{I}_m$, puisque N est d'indice n. D'où la conclusion attendue.

(b) On sait que l'on a $(1+x)^\alpha = \mathrm{V}(x) + \mathrm{O}(x^n)$ dans un voisinage de 0. Donc, $1+x = \big(\mathrm{V}(x) + \mathrm{O}(x^n)\big)^q = \mathrm{V}(x)^q + \mathrm{O}_1(x^n)$. On applique alors la question 1 au polynôme $1+\mathrm{X}-\mathrm{V}^q$ pour obtenir $1+\mathrm{X}-\mathrm{V}^q = \mathrm{X}^n\mathrm{Q}$, pour un $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. En évaluant cette identité en N, nilpotente d'indice n, on obtient $\mathrm{V}(\mathrm{N})^q = \mathrm{I}_m + \mathrm{N}$.

(c) On note E le polynôme $\mathrm{E} := 1+\mathrm{X}+\frac{1}{2!}\mathrm{X}^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{X}^{n-1}$. On a alors pour x dans un voisinage de 0 : $\exp(x) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{O}_1(x^n)$ et aussi $\log(1+x) = \mathrm{W}(x) + \mathrm{O}_2(x^n)$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\mathrm{W}(x)\big) &= \exp\big(\mathrm{W}(x)\big) - \mathrm{O}_1\big(\mathrm{W}(x)^n\big)\\ &= \exp\big(\log(1+x) - \mathrm{O}_2(x^n)\big) - \mathrm{O}_1\big(\mathrm{W}(x)^n\big).\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{W}(x)$ tend vers 0 avec x, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\mathrm{W}(x)\big) &= (1+x)\exp\big(-\mathrm{O}_2(x^n)\big) - \mathrm{O}_3(x^n)\\ &= (1+x)(1+\mathrm{O}_4(x^n)) - \mathrm{O}_3(x^n) = 1+x+\mathrm{O}_5(x^n).\end{aligned}$$

Par la question 1, on déduit qu'il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{W}(\mathrm{X})\big) = 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^n\mathrm{Q}.$$

On en déduit en évaluant en N l'égalité $\mathrm{E}\big(\mathrm{W}(\mathrm{N})\big) = \mathrm{I}_m + \mathrm{N}$.
Comme on peut factoriser $\mathrm{W}(\mathrm{N}) = \mathrm{N}\mathrm{W}_0(\mathrm{N})$, la commutation entre N et $\mathrm{W}_0(\mathrm{N})$ implique $\mathrm{W}(\mathrm{N})^q = 0$ pour $q \geqslant n$.
Ainsi, on conclut

$$\mathrm{I}_m + \mathrm{N} = \mathrm{E}\big(\mathrm{W}(\mathrm{N})\big) = \exp\big(\mathrm{W}(\mathrm{N})\big).$$

Remarque. Cette technique se couple bien avec la décomposition de Dunford. Si B est une matrice inversible complexe, on sait que $\mathrm{B} = \mathrm{D}+\mathrm{N}$, avec D diagonalisable et N nilpotente, et de plus, D est inversible, ce qui nous donne $\mathrm{B} = \mathrm{D}(\mathrm{I}+\mathrm{D}^{-1}\mathrm{N})$, avec $\mathrm{N}' := \mathrm{D}^{-1}\mathrm{N}$ nilpotent. Trouver une racine q-ième de B revient à trouver une racine q-ième de D et une racine q-ième de $\mathrm{I}+\mathrm{N}'$. Le premier se fait à l'aide de la diagonalisation, et le second avec ce petit exercice. Même chose pour le logarithme. On s'aide au passage du fait que $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$ lorsque A et B commutent.

Exercice 114 (Différentielle du déterminant)
On veut calculer la différentielle du déterminant

$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathrm{A} & \longmapsto & \det(\mathrm{A}). \end{array}$$

1. Pourquoi det est-elle différentiable ?
2. Montrer que la différentielle de det en I_n est la forme trace.
3. On fixe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que la différentielle $\mathrm{D}(\det)_\mathrm{A}$ de det en A est la forme [1]
$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathrm{H} & \longmapsto & \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(\mathrm{A})\mathrm{H}), \end{array}$$
où ${}^t\mathrm{com}(\mathrm{A})$ est la transposée de la comatrice de A.
4. Pour toute matrice M et pour i de 1 à n, on note M_i la i-ème colonne de M. On note également
$$\det(\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_n) := \det(\mathrm{M}).$$
Montrer que, pour tout H de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}(\det)_\mathrm{A}(\mathrm{H})$ est égal à
$$\det(\mathrm{H}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n) + \det(\mathrm{A}_1, \mathrm{H}_2, \dots, \mathrm{A}_n) + \dots + \det(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{H}_n).$$
5. Soient f_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$, dont on écrit les vecteurs en colonnes. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \det\big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big) \end{array}$$
est dérivable et expliciter sa dérivée.
6. Pour x réel on pose : $\mathrm{D}_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.
Montrer que D_n est une fonction dérivable puis calculer D'_n. En déduire l'expression de $\mathrm{D}_n(x)$.

Soluce

1. L'application det peut être vue comme une fonction polynomiale à n^2 variables réelles. Elle est donc bien différentiable.
2. Par unicité dans le développement de Taylor polynomial, cela revient à trouver la partie linéaire en H (*i.e.* homogène de degré 1 en les coordonnées de H) dans le développement de Taylor, en $\mathrm{H} = 0_n$, de $\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{H})$, avec $\mathrm{H} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Quand on développe le déterminant $\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{H})$, avec $\mathrm{H} = (h_{ij})$, on voit que les seuls termes de degré 1 en les h_{ij} apparaissent dans les termes qui contiennent exactement $n-1$ fois la constante 1. Comme les $n-1$ coefficients de $\mathrm{I}_n + \mathrm{H}$ qui

contiennent ces 1 se situent sur la diagonale, le n-ième coefficient est également sur la diagonale ; le terme linéaire est donc de la forme h_{ii} pour tout i. La différentielle est la somme de ces termes, c'est-à-dire la trace de H.

3. Comme det est polynomiale, l'application qui, à A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe $\mathrm{d}(\det)_{\mathrm{A}}$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, est continue. Nous allons montrer la formule

$$\forall \mathrm{H} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{d}(\det)_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(\mathrm{A})\mathrm{H})$$

pour A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la continuité que nous venons de relever entraînera la formule sur tout $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\det(\mathrm{A} + \mathrm{H}) = \det\big(\mathrm{A}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A}^{-1}\mathrm{H})\big) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{I}_n + \mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}),$$

et donc, d'après ce qui précède, la partie linéaire en H du développement de $\det(\mathrm{A} + \mathrm{H})$ est bien égale à

$$\det(\mathrm{A}) \,\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}) = \mathrm{tr}\big(\det(\mathrm{A})\mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}\big) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(\mathrm{A})\mathrm{H}).$$

4. Notons $\mathrm{com}(\mathrm{A}) = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la comatrice de A et ${}^t\mathrm{com}(\mathrm{A}) = (n_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, de sorte que $n_{ij} = m_{ji}$. En développant par rapport à la j-ème colonne, on a d'une part

$$\sum_{j=1}^{n} \det(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{j-1}, \mathrm{H}_j, \mathrm{A}_{j+1}, \ldots, \mathrm{A}_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ij} m_{ij}.$$

D'autre part, d'après la question précédente,

$$\mathrm{d}(\det)_{\mathrm{A}}(\mathrm{H}) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(\mathrm{A})\mathrm{H}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij} n_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij} m_{ij}$$

L'assertion en résulte [2].

5. Soit f l'application qui envoie x de $\mathbb{R}$ dans $\big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big) \in \mathbb{R}^n$. Alors, f est différentiable et sa différentielle en x est donnée par

$$\mathrm{d}f_x = \big(f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_n'(x)\big).$$

Comme $\mathrm{F} = \det \circ f$, il suffit d'appliquer la formule de la différentielle d'une composée : si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a.$$

Par la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{dF}_x = \det\big(f_1'(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big) + \det\big(f_1(x), f_2'(x), \ldots, f_n(x)\big) \\ + \cdots + \det\big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n-1}(x), f_n'(x)\big).\end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

2. Cette question peut se traiter directement, sans passer par la formule de la comatrice. Elle ne fait que traduire le fait que le déterminant est n-linéaire, ce qui permet de développer $\det(\mathrm{A}_1 + \mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{A}_n + \mathrm{H}_n)$ en une somme de 2^n déterminants, dont n sont linéaires en les H_j. On peut voir cette formule comme un analogue de la formule de la dérivation d'un produit.

6. On note $f_j(x)$ la j-ème colonne de $\mathrm{D}_n(x)$. On remarque que f_j est dérivable et que $f_j'(x) = f_{j+1}(x)$, pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Par la question précédente, D_n est donc dérivable et sa dérivée est donnée par la formule ($\heartsuit$). Comme le déterminant est alterné, tous les termes du membre de droite s'annulent, sauf le dernier :

$$\mathrm{D}_n'(x) = \det\big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x), f_n'(x)\big) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve : $\mathrm{D}_n'(x) = \mathrm{D}_{n-1}(x)$. Or, $\mathrm{D}_1(x) = x$ et $\mathrm{D}_k(0) = 0$ pour tout k (on reconnaît une matrice triangulaire avec des zéros sur la diagonale, donc de déterminant nul). Il en résulte que $\mathrm{D}_n(x) = x^n/n!$.

Remarque. On peut retrouver de façon directe les résultats des questions 2) et 3) en appliquant la formule donnant l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles.

Exercice 115 (La matrice non inversible la plus proche de chez vous !)
On considère l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme quadratique N_2 comme dans l'exercice 67. On note $\mathrm{Sing}_n := \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices singulières de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\mathrm{M} \in \mathrm{Sing}_n$,

$$\mathrm{N}_2(\mathrm{A} - \mathrm{M}) \geqslant \sqrt{\lambda_n},$$

où λ_n est la plus petite valeur propre de $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}$, puis de fournir un cas d'égalité.

1. Soit p un projecteur orthogonal de rang 1 de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et s un endomorphisme autoadjoint.
   (a) Montrer que dans toute base orthonormée (e_i) de $\mathbb{R}^n$, les coefficients diagonaux de la matrice de p dans la base (e_i) sont positifs.
   (b) En déduire que $\mathrm{tr}(p \circ s) \geqslant \lambda_n$, où $\lambda_n = \min \mathrm{Spec}(s)$.
   (c) Soit f_n un vecteur propre de s pour la valeur propre minimale λ_n. Montrer que l'égalité est atteinte si p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}f_n$.
2. Soit N une matrice telle que $\mathrm{N} = {}^t\mathrm{N}\mathrm{N}$. Montrer que N est une matrice de projection orthogonale.
3. Montrer qu'il existe une matrice M de Sing_n telle que $\mathrm{N}_2(\mathrm{A}-\mathrm{M})$ est minimale.
4. Montrer par le théorème des extrema liés que $\mathrm{N} := \mathrm{M}\mathrm{A}^{-1}$ est un projecteur orthogonal de rang $n-1$.
5. Montrer que $\mathrm{N}_2(\mathrm{A} - \mathrm{M})^2 = \mathrm{tr}\big((\mathrm{I}_n - \mathrm{N})\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}\big)$ et conclure.

Soluce

1. (a) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle\, ,\, \rangle$, on note (g_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, une base orthonormée dans laquelle p a pour matrice $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1)$. Comme p est un endomorphisme orthogonal, $p(x) = \langle x, g_n \rangle g_n$. Soit (e_i) une base orthonormée quelconque de $\mathbb{R}^n$. On peut écrire
$$p(e_i) = \langle e_i, g_n \rangle g_n = \langle e_i, g_n \rangle \sum_{j=1}^{n} \langle g_n, e_j \rangle e_j.$$
Le i-ième coefficient diagonal de la matrice de p dans la base (e_i) est donc $\langle e_i, g_n \rangle \langle g_n, e_i \rangle = \langle e_i, g_n \rangle^2 \geqslant 0$.

   (b) Comme s est autoadjoint, il existe une base orthonormale (f_i) dans laquelle s est une matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, avec $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Soient α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, les coefficients diagonaux de p dans la base (f_i). Puisque p est un projecteur de rang 1, $\mathrm{tr}(p) = 1$. Comme $\alpha_i \geqslant 0$, il vient
$$\mathrm{tr}(p \circ s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \geqslant \lambda_n \,\mathrm{tr}(p) = \lambda_n.$$

   (c) Dans la formule précédente, l'égalité peut être atteinte pour $\alpha_i = \delta_{in}$, où δ est le symbole de Kronecker. Si p est l'endomorphisme dont la matrice dans la base (f_i) est $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1)$, l'égalité est bien obtenue, et p est la projection orthogonale sur $\mathbb{R} f_n$.

2. Tout d'abord, N est symétrique puisque ${}^t\mathrm{N}\mathrm{N}$ l'est. Elle vérifie de plus $\mathrm{N}^2 = \mathrm{N}\mathrm{N} = {}^t\mathrm{N}\mathrm{N} = \mathrm{N}$, donc c'est une matrice de projection. Comme N est symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, et c'est donc bien une projection orthogonale.

3. Montrons qu'il existe un M dans Sing_n qui minimalise $\mathrm{N}_2(\mathrm{A}-\mathrm{M})$. En effet, si on fixe M_0 quelconque dans Sing_n, trouver ce M dans Sing_n revient à trouver M dans Sing_n intersecté avec la boule fermée B (pour N_2) de centre A et de rayon $\mathrm{N}_2(\mathrm{A}-\mathrm{M}_0)$. Comme $\mathrm{C} := \mathrm{Sing}_n \cap \mathrm{B}$ est un fermé borné, c'est un compact et donc le minimum de la fonction continue sur $\mathrm{C} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{N}_2(\mathrm{A}-\mathrm{X})$ est atteint.

4. Notons que minimaliser $\mathrm{N}_2(\mathrm{A}-\mathrm{X})$ revient à minimaliser $\mathrm{N}_2(\mathrm{A}-\mathrm{X})^2$ c'est-à-dire $\mathrm{tr}\left({}^t(\mathrm{A}-\mathrm{X})(\mathrm{A}-\mathrm{X})\right)$, plus agréable à manier, sur l'ensemble fermé $\mathrm{Sing}_n = \{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(\mathrm{X}) = 0\}$. Par le théorème des extrema liés, on sait qu'il existe un réel λ (appelé multiplicateur de Lagrange), tel que la différentielle en M de
$$\mathrm{L}(\mathrm{X}) := \mathrm{tr}\left({}^t(\mathrm{A}-\mathrm{X})(\mathrm{A}-\mathrm{X})\right) - \lambda \det(\mathrm{X}) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{A}\mathrm{A}) - 2\,\mathrm{tr}({}^t\mathrm{A}\mathrm{X}) + \mathrm{tr}({}^t\mathrm{X}\mathrm{X}) - \lambda \det(\mathrm{X})$$
est nulle. Le calcul donne, comme dans l'exercice 66, que pour tout H :
$$0 = d_{\mathrm{M}}\mathrm{L}(\mathrm{H}) = -2\,\mathrm{tr}({}^t\mathrm{A}\mathrm{H}) + 2\,\mathrm{tr}({}^t\mathrm{M}\mathrm{H}) - \lambda\,\mathrm{tr}(\widetilde{\mathrm{M}}\mathrm{H}) = -2\,\mathrm{tr}\left(({}^t(\mathrm{A}-\mathrm{M}) + \frac{1}{2}\lambda\widetilde{\mathrm{M}})\mathrm{H}\right),$$
où $\widetilde{\mathrm{M}}$ est la transposée de la comatrice de M. Comme cette égalité est valable pour toute matrice H , il vient que ${}^t(\mathrm{A}-\mathrm{M}) + \frac{1}{2}\lambda\widetilde{\mathrm{M}} = 0$ car la forme bilinéaire $\mathrm{tr}(\mathrm{XY})$ est non dégénérée.
On sait par hypothèse que M est de rang $r < n$. Si par l'absurde, $r < n-1$, alors $\widetilde{\mathrm{M}} = 0$ car, dans ce cas, chaque mineur de taille $(n-1)$ est nul, et donc $\mathrm{A} = \mathrm{M}$, ce qui est absurde car A est inversible et M ne l'est pas. Donc $r = n-1$.

En multipliant l'égalité obtenue par M et en notant que $\widetilde{\mathrm{M}}\mathrm{M} = \det(\mathrm{M})\mathrm{I}_n = 0$, il vient ${}^t(\mathrm{A}-\mathrm{M})\mathrm{M} = 0$. On a alors en posant $\mathrm{N} := \mathrm{MA}^{-1}$:

$${}^t\mathrm{NN} = {}^t\mathrm{A}^{-1}\,{}^t\mathrm{MMA}^{-1} = {}^t\mathrm{A}^{-1}\,{}^t\mathrm{AMA}^{-1} = \mathrm{MA}^{-1} = \mathrm{N}.$$

Donc, par 2), N est bien un projecteur orthogonal, de même rang que M, c'est-à-dire $n-1$.

5. On a montré précédemment que ${}^t\mathrm{MM} = {}^t\mathrm{AM}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_2(\mathrm{A}-\mathrm{M})^2 &= \mathrm{tr}\left({}^t(\mathrm{A}-\mathrm{M})(\mathrm{A}-\mathrm{M})\right) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AA}) - 2\,\mathrm{tr}({}^t\mathrm{AM}) + \mathrm{tr}({}^t\mathrm{MM})\\ &= \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AA}) - \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AM}) = \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{M})\right) = \mathrm{tr}\left((\mathrm{A}-\mathrm{M})\,{}^t\mathrm{A}\right)\\ &= \mathrm{tr}\left((\mathrm{I}_n-\mathrm{N})\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}\right).\end{aligned}$$

Comme N est un projecteur orthogonal de rang $n-1$, $\mathrm{I}_n - \mathrm{N}$ est un projecteur orthogonal de rang 1. L'inégalité $\mathrm{N}_2(\mathrm{A}-\mathrm{M})^2 \geqslant \lambda_n$ résulte de la question 1b), où λ_n est la plus petite valeur propre de $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}$. On voit que l'inégalité est bien optimale car l'égalité est atteinte, par 1c), lorsque $\mathrm{I}_n - \mathrm{N}$ est la matrice de projection orthogonale sur $\mathbb{R}v_n$, où v_n est le vecteur propre pour la valeur propre λ_n, c'est-à-dire, pour $\mathrm{M} = \mathrm{NA}$, où N est la matrice de projection orthogonale sur $(\mathbb{R}v_n)^\perp$.

Remarque. On sait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On sait donc que pour A fixé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une boule ouverte, pour la norme N_2 incluse dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On connaît maintenant le rayon maximal de la boule ; il s'agit de la racine carrée de la plus petite valeur propre de $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}$, qui est aussi la racine carrée de la plus petite valeur propre de ${}^t\mathrm{AA}$, puisque AB et BA ont même spectre. Ce rayon est donc la plus petite valeur propre de la matrice symétrique définie positive de la décomposition polaire de A.

Si la norme choisie sur l'espace des matrices réelles est la norme $|||\,.\,|||_2$ subordonnée à la norme quadratique, les choses sont un peu plus simples, grâce au caractère sous-multiplicatif de la norme. On voit que la distance de A à Sing_n est égale à $\left|\left|\left|\mathrm{A}^{-1}\right|\right|\right|_2^{-1}$, qui est aussi $\sqrt{\lambda_n}$ dans l'exercice, voir l'épreuve 2 de l'agrégation interne/CAER 2018, question 16.

Chapitre 15

Annexe. Mémento sur l'interversion des limites

La cave à Boivin

15.0.1 Notations et préliminaires

Suites de fonctions, séries de fonction

On résume ici tous les résultats à retenir sur les différents types de convergence de suites de fonctions.

Dans les tableaux, on distinguera les hypothèses portant sur la fonction f_n de celles portant sur la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On notera également f la limite de la suite (f_n).

Intégrales à paramètres

On considère la fonction f, définie sur $\mathrm{X}\times\mathrm{T}$, où X et T sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

On pose $\mathrm{F}(x) = \int_{\mathrm{T}} f(x,t)\mathrm{d}t$, et $t \mapsto l(t) = \lim\limits_{x\to a} f(x,t)$.

On note enfin D, la fonction de domination : $\forall x \in \mathrm{X}$, $|f(x,t)| \leqslant \mathrm{D}(t)$.

Intégration sur un intervalle

On résume ici les hypothèses du Théorème de Convergence Dominée (TCD), permettant la permutation limite/intégrale ; ainsi que l'Intégration Terme à Terme (ITT), sur la permutation somme infinie/intégrale.

On note $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, et $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

On rappelle la définition :

Définition. Une fonction f est continue, resp. $\mathscr{C}^k$, par morceaux sur le segment $[a,b]$ s ?il existe une subdivision *finie* $a = a_0 < \cdots < a_n = b$, telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu, resp. $\mathscr{C}^k$, à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Une fonction f est continue, resp. $\mathscr{C}^k$, par morceaux sur l'intervalle I si f est continue, resp. $\mathscr{C}^k$, par morceaux sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I.

15.0.2 Les tableaux d'interversion

Suites de fonctions				
Caractère Domaine	Objet	Continuité Limite	CV vers f	Résultat
$\lim\limits_{x\to a}$ sur vois. de a	Fonction f_n	$\lim\limits_{a} f_n$ existe		$\lim\limits_{a} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{a} f_n$
$a \in \overline{\mathbb{R}}$	Suite $(f_n)_n$		$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$	
Continuité sur ouvert	Fonction $f_n(x)$	f_n continue		f est continue sur ouvert
	Suite $(f_n)_n$		$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$	
Intégration sur $[a;b]$	Fonction f_n	f_n continue p.m		$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$
	Suite $(f_n)_n$		$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$	
Dérivation	Fonction $f_n(x)$	f_n est C^1	(CVS en un pt x_0 suffit)	
sur ouvert	Suite $(f_n)_n$		$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} f$	$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$
	Suite $(f_n')_n$		$f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} g$	(CVU si I borné)
	Fonction f_n	f_n de classe C^p	(CVS sur un pt x_0 $\forall i$)	
Dérivation p fois	Suite $(f_n)_n$		$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} f$	$\forall i \in [1;p]$,
sur ouvert	Suite $(f_n')_n$		$f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} g_1$	$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(i)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(i)}$
	...		...	
	Suite $(f_n^{(p-1)})_n$		$f_n^{(p-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} g_{p-1}$	(CVU sur un borné)
	Suite $(f_n^{(p)})_n$		$f_n^{(p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} g_p$	

Séries de fonctions				
Caractère Domaine	Objet	Continuité Limite	CV vers f	Résultat
$\lim\limits_{x\to a}$ sur vois. de a $a \in \overline{\mathbb{R}}$	Fonction f_n	$\lim\limits_{a}$ existe		$\lim\limits_{a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$
	$\sum_{k=0}^{n} f_k$		$\sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} \lim\limits_{a} f_k$
Continuité sur ouvert	Fonction f_n	f_n continue		$\sum_n f_n$ continue
	$\sum_n f_n$		$\sum_n f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$	
Intégration sur $[a;b]$	Fonction f_n	f_n continue		$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a;b]} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\mathrm{d}x$
	$\sum_n f_n$		$\sum_n f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$	$= \int_{[a;b]} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$
Dérivation sur ouvert	Fonction f_n	f_n est C^1	(CVS en un pt x_0 suffit)	$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right)'$
	$\sum f_n$		$\sum_n f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} f(x)$	$= \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x)$
	$\sum f_n'$		$\sum_n f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} g$	(CVU sur un borné)
Dérivation p fois sur ouvert	Fonction $f_n(x)$	f_n continue et C^p	(CVS sur un pt x_0 $\forall i$)	
	$\sum f_n$		$\sum_n f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} f(x)$	$\forall i \in [1;p]$,
	$\sum f_n'$		$\sum_n f_n'(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} g_1(x)$	$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)^{(i)}(x)$
	...			$= \sum_{k=0}^{+\infty} f_k^{(i)}(x)$
	$\sum f_n^{(p-1)}$		$\sum_n f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} g_{p-1}(x)$	
	$\sum f_n^{(p)}$		$\sum_n f_n^{(p)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} g_p$	(CVU sur un borné)

Intégrales à paramètres

Caractère Domaine	Objet	Continuité	Intégrabilité	Résultat
Continuité sur X	$x \mapsto f(x,t)$	continue sur X $\forall t$		$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathrm{T}} f(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie et est continue
	$t \mapsto f(x,t)$	c. p. m. sur T $\forall x$		
	$t \mapsto \mathrm{D}(t)$	c. p. m. sur T	intégrable sur T	
$\lim\limits_{x\to a}$ sur un vois. de a	$t \mapsto f(x,t)$	c. p. m. $\forall x$		$\int_{\mathrm{T}} f(x,t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_{\mathrm{T}} l(t)\mathrm{d}t$
	$\lim\limits_{x\to a} f(x,t) = l(t)$	c. p. m.		
$a \in \overline{\mathbb{R}}$	$t \mapsto \mathrm{D}(t)$	c. p. m.	intégrable sur T	
Dérivation sur X	$t \mapsto f(x,t)$	c. p. m.	intble sur T $\forall x$	F est C^1, et $\mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{T}} \frac{\delta}{\delta x} f(x,t)\mathrm{d}t$
	$t \mapsto \frac{\delta}{\delta x} f(x,t)$	c. p. m. $\forall x$		
	$x \mapsto \frac{\delta}{\delta x} f(x,t)$	continue $\forall t$		
	$t \mapsto \mathrm{D}(t)$	D c.p.m. domine $\frac{\delta}{\delta x} f$	intégrable sur T	
Dérivation d'ordre n sur X	$\forall k \in [0; n-1]$, $t \mapsto \frac{\delta^k}{\delta x^k} f(x,t)$	c. p. m. $\forall x$	intble sur T $\forall x$	F est C^n, et $\mathrm{F}^{(n)}(x) = \int_{\mathrm{T}} \frac{\delta^n}{\delta x^n} f(x,t)\mathrm{d}t$
	$t \mapsto \frac{\delta^n}{\delta x^n} f(x,t)$	c. p. m. $\forall x$		
	$x \mapsto \frac{\delta^n}{\delta x^n} f(x,t)$	continue $\forall t$		
	$t \mapsto \mathrm{D}(t)$	D c.p.m. domine $\frac{\delta^n}{\delta x^n} f$	intégrable sur T	

Intégration sur un intervalle

Théorème	Objet	Intégrabilité	Convergence	Résultat
Interversion suite/intégrale (CVU)	Suite $(f_n)_n$		$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$	f est intégrable, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$
	Fonction f_n	c.p.m	f c.p.m	
	Intervalle I : borné			
Interversion suite/intégrale (TCD)	Suite $(f_n)_n$		$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} f(x)$	f est intégrable, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$
	Fonction f_n	intégrable, c.p.m	f continue par morceaux	
	Fonction dominante $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^+$	intégrable, c.p.m		
Interversion série/intégrale (CVU)	Suite $(\sum_{k=0}^n f_k)_n$		$\sum_{k=0}^n f_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} \mathrm{S}$	S est intégrable, et $\int_{\mathrm{I}} \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_n \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\mathrm{d}t$
	Fonction f_n	intégrable, c.p.m	S continue par morceaux	
	Intervalle I : borné			
Interversion série/intégrale (TCD séries)	Suite $(\sum_{k=0}^n f_k)_n$		$\sum_{k=0}^n f_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} \mathrm{S}(x)$	S est intégrable, et $\int_{\mathrm{I}} \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_n \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\mathrm{d}t$
	Fonction f_n	intégrable, c.p.m	S continue par morceaux	
	Série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}} \lvert f_n(t)\rvert \mathrm{d}t$		convergente	

Théorèmes de Fubini			
Théorème d'interversion	Objet	Convergence	Résultat
Interversion de séries doubles $u_{m,n}$	série $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)_m$	absolument convergente	$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$
	série $\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)_n$	absolument convergente	$= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$
Intégration de $f(x,y)$ sur un rectangle $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$	$x \mapsto \int_{\mathrm{Y}} \lvert f(x,y)\rvert \mathrm{d}y$	existe et intégrable sur X	$\int_{\mathrm{X}}\int_{\mathrm{Y}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
	$y \mapsto \int_{\mathrm{X}} \lvert f(x,y)\rvert \mathrm{d}x$	existe et intégrable sur Y	$= \int_{\mathrm{Y}}\int_{\mathrm{X}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

15.0.3 Extension des hypothèses et contre-exemples

Extension des hypothèses :

On peut généraliser la plupart des propriétés vues dans tous ces tableaux en changeant l' espace d'arrivée $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par un espace métrique complet (pour les problèmes d'échange de limites, ou de continuité), et par un espace de Banach pour tout ce qui concerne les séries et l'intégration.

Dans le tableau d'intégrales à paramètres, si l'espace de départ X est un ouvert de $\mathbb{C}$, on peut remplacer dérivable par holomorphe dans un voisinage de $x \in \mathrm{X}$ (dans l'hypothèse et dans le résultat).

Contre-exemples importants :

Suites de fonctions, limites et continuité.

Soit $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$. On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \delta_{x,1}$, où δ est le symbole de Kroenecker. On voit que (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ qui converge vers une fonction non continue. Ceci est lié à la convergence non uniforme de $f_n(x)$ sur $[0,1]$. De même, on a

$$\lim_{x\to 1^-}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1^-} f_n(x).$$

Suites de fonctions, intégration.

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [n, n+1] \\ 4x - 4n & \text{si } x \in [n, n+\frac{1}{2}] \\ -4x + 4n + 4 & \text{si } x \in [n+\frac{1}{2}, n+1] \end{cases}$$

Alors, pour tout x, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$. Or, $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$, et donc $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 1$. Ceci est lié à la convergence non uniforme de $f_n(x)$ vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.

Intégrales à paramètres, continuité.

Soit $f(x,t)$ la fonction définie sur $[0,+\infty[^2$ par $f(x,t) = xe^{-xt}$. La fonction f est bien continue sur $[0,+\infty[^2$. Soit $\mathrm{F}(x) := \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$. On a

$$\mathrm{F}(0) = 0, \text{ et si } x \neq 0, \mathrm{F}(x) = \left[-e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = 1,$$

donc F n'est pas continue en 0. Cela est lié au fait que $f(x,t)$ ne possède pas de fonction dominante $\mathrm{D}(t)$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Intégration sur un intervalle, échange de limites.

Soit $\mathrm{I} = \mathbb{R}^+$, $f_n(t) = n^2te^{-nt}$. On a pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$, et donc $\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 0$. Or, $-(nt+1)e^{-nt}$ est une primitive[1] de $f_n(t)$, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \left[-(nt+1)e^{-nt}\right]_0^{+\infty} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Cela est lié au fait que $f_n(t)$ ne possède pas de fonction dominante $g(t)$ intégrable sur I.

Fubini pour les séries.

Soit $u_{m,n}$ la suite définie par

$$u_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -\frac{1}{2^{n-m}} & \text{si } m < n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

On a d'une part,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = -\frac{1}{2^n} - \cdots - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{2^n}, \text{ donc, } \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = 2,$$

et d'autre part,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{n=m}^{+\infty} u_{m,n} = 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2^k} - \cdots = 0, \text{ donc, } \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = 0.$$

Ceci est lié au fait que la série en n de terme général $\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{m,n}| = 2 - \frac{1}{2^n}$ diverge (elle ne tend pas vers 0).

Fubini-Tonelli.

On regarde la fonction $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ sur $[0,1]^2$. On trouve d'abord,

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{x^2+1}, \text{ puis, } \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

On ne peut donc pas échanger les intégrales, puisque $f(y,x) = -f(x,y)$ et donc

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}.$$

Cela provient du fait que $\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = +\infty$. En effet,

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2x}\mathrm{d}x = +\infty.$$

1. On peut obtenir cela par une intégration par parties.

15.0.4 Séries de Fourier

On suppose dans cette partie que f est une fonction 2π-périodique.

On note $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$, où $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{[0;2\pi]} f(t)e^{-int}dt$.

On note $\Sigma_N(f) = \frac{S_0(f)+\cdots+S_{N-1}(f)}{N}$.

On définit également la norme $\|\cdot\|_2$ sur l'espace des fonctions de carré intégrable comme suit : $\|g\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi} \int_{[0;2\pi]} |g(t)|^2 \,dt$.

Théorie de Fourier			
Théorème	Objet	Continuité et dérivabilité de f	Résultat
Parseval	série (S_N)	f de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$	$\|f - S_N\|_2^2 \longrightarrow 0$,
	série $\left(\sum_{n=0}^{N} |c_n|^2\right)_N$		$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 = \|f\|_2^2$
Dirichlet	série (S_N)	f de classe $C^1_{\text{p.m.}}$	$S_N(x) \to \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$
Conv. normale	série (S_N)	f continue et de classe $C^1_{\text{p.m.}}$	$S_N \xrightarrow{\text{CVN}} f$
Fejér	suite (Σ_N)	f continue	$\Sigma_N \xrightarrow{\text{CVN}} f$

Index

Bibliographie

[1] Francesco ALTOMARE et Michele CAMPITI : *Korovkin-type approximation theory and its applications*, volume 17. Walter de Gruyter, 2011.

[2] Antoine DELCROIX et Christian SILVY : Fonction constante et dérivée nulle : un résultat si trivial. *Recherches et ressources en éducation et formation*, 3:77–89, 2009. En ligne sur HAL : `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00318449/`.

[3] Jean-Pierre DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. Presses universitaires de Grenoble, 1991.

[4] Philippe Caldero et JÉRÔME GERMONI : *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries-Tome premier*. Calvage et Mounet, 2017.

[5] Philippe Caldero et JÉRÔME GERMONI : *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries-Tome second*. Calvage et Mounet, 2018.

[6] Philippe Caldero et MARIE PERONNIER : *Carnet de voyage en Algébrie*. Calvage et Mounet, 2019.

[7] Xavier GOURDON : *Analyse – Mathématiques pour MP**. Ellipses, 2008. 2e édition.

[8] Jean-Étienne ROMBALDI : *Éléments d'analyse réelle*. EDP Sciences, 2004. CAPES et agrégation de mathématiques.

[9] Michelle SCHATZMAN : *Analyse numérique*. InterEditions, Paris, 1991. Cours et exercices pour la licence.

[10] Georges SKANDALIS : *Analyse - Résumé et exercices*. Université Paris Diderot - IREM de Paris, 2017. Disponible en ligne sur `https://webusers.imj-prg.fr/~georges.skandalis/AnResEx.pdf`.

Index : développements (testés et approuvés !)

Index : méthodes et résultats classiques

« Si tu veux l'agreg, prépare la paix » : ce fascicule d'exercices nous amènera sur les chemins arpentés de l'agrégation interne, et de l'externe, si affinité. Un livre qui reste avant tout « la meilleure façon de se payer un costard » et qui propose de l'analyse clés en main, en joignant l'utile à l'agrégable.

Utilisation de Python à l'oral d'analyse

978-2-9553560-1-2