TESTS D'HYPOTHESES
Etude d'un exemple

✏ Un examinateur doit faire passer une épreuve type QCM à des étudiants. Ce QCM est constitué de 20 questions indépendantes. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles dont une seule correcte.

On suppose qu'il y a deux types d'étudiants :

- l'étudiant qui n'a pas travaillé et qui répond au hasard : il a alors une chance sur trois d'avoir une réponse juste.
- l'étudiant qui a travaillé : il a davantage de chance de donner une bonne réponse à chaque question mais le pourcentage de réussite est inconnu.

✏ L'examinateur veut déterminer une valeur critique k_c telle que :

- si le nombre de réponses correctes est supérieur ou égal à k_c , l'étudiant est reçu.
- si le nombre de réponses correctes est strictement inférieur à k_c , l'étudiant est recalé.

On considère la variable aléatoire X égale au nombre de réponses correctes parmi les 20 pour un étudiant choisi au hasard.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (20 ; p) avec p : probabilité de réussite d'un étudiant.

On s'intéresse aux étudiants qui n'ont pas travaillé. On a alors $p = \frac{1}{3}$.

✏ A l'issue d'un test, 4 cas sont possibles :

(1) l'étudiant n'a pas travaillé et il est recalé	(2) l'étudiant a travaillé et il est reçu	(3) l'étudiant n'a pas travaillé et il est reçu	(4) l'étudiant a travaillé et il est recalé

On a donc 2 risques d'erreur correspondant aux cas (3) et (4) :

- l'erreur α (dite erreur de première espèce) : on pense que l'étudiant a travaillé, on rejette donc l'hypothèse de départ (à savoir qu'il n'a pas travaillé) alors qu'elle est vraie.
- l'erreur β (dite erreur de seconde espèce) : on pense que l'étudiant n'a pas travaillé, on accepte donc l'hypothèse de départ alors qu'elle est fausse.

On veut contrôler l'erreur α : on cherche donc à recaler un maximum des étudiants qui n'ont pas travaillé.

Pour cela, on va construire **un test d'hypothèse.**

Construction du test

✏ ***Choix des hypothèses*** : hypothèse de départ (dite hypothèse nulle H_0) : l'étudiant n'a pas travaillé.

On a donc $p = \frac{1}{3}$ et X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\ ;\ \frac{1}{3})$.

hypothèse alternative (notée H_1) : l'étudiant a travaillé.

On a alors $p > \frac{1}{3}$.

✏ ***Détermination de la région critique*** : l'intervalle $[k_c\ ;\ 20]$ (trop de réponses correctes, ce qui amènera à refuser l'hypothèse de départ.)

Erreur de 1ère espèce : $\alpha = P(X \geq k_c / p = \frac{1}{3})$

si on choisit $k_c = 10$, alors $\alpha \approx$ **0,09** soit **9 %**.

$k_c = 15$, alors $\alpha \approx$ **0,02 %**.

par contre si on se fixe α (le seuil de risque), on détermine alors k_c : pour $\alpha = 1\ \%$, $k_c = 12$

Remarque : plus on diminue l'erreur α et plus on augmente l'erreur β.

Erreur de 2de espèce : $\beta = P(X < k_c / p = ?)$.

Supposons que le pourcentage p de réussite pour un étudiant qui a travaillé soit de 0,6; on obtient :

avec $k_c = 10$, alors $\alpha \approx$ **9 %** et $\beta \approx$ **0,13** soit **13 %**

avec $k_c = 12$, alors $\alpha \approx$ **1 %** et $\beta \approx$ **40 %**

avec $k_c = 14$, alors $\alpha \approx$ **0,1 %** et $\beta \approx$ **75 %** !

Comment arriver à réduire en même temps les deux erreurs ? En augmentant le nombre de questions.

Avec, par exemple, 40 questions et $k_c = 20$ (au moins la moitié des réponses correctes) :

$\alpha = P(X \geq 20 / p = \frac{1}{3}) \approx 0{,}02$

$\beta = P(X < 20 / p = 0{,}6) \approx 0{,}07$

✏ ***Enoncé de la règle de décision :***

On choisit un étudiant au hasard.

- si, à son test, il a au moins k_c réponses correctes, alors on rejette l'hypothèse H_0, et on le déclare reçu. (On a un risque α de se tromper)
- si, à son test, il a strictement moins de k_c réponses correctes, alors on n'a aucune raison de rejeter l'hypothèse H_0, et on le déclare recalé. (On a un risque β de se tromper)

Construction du test

✏ ***Choix des hypothèses*** : <u>*hypothèse de départ*</u> (dite <u>*hypothèse nulle*</u> H_0) : l'étudiant n'a pas travaillé.

On a donc $p = \frac{1}{3}$ et X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; \frac{1}{3})$.

<u>*hypothèse alternative*</u> (notée H_1) : l'étudiant a travaillé.

On a alors $p > \frac{1}{3}$.

✏ ***Détermination de la région critique*** : l'intervalle $[k_c ; 20]$ (trop de réponses correctes, ce qui amènera à refuser l'hypothèse de départ.)

<u>*Erreur de 1ère espèce*</u> : $\alpha = P(X \geq k_c / p = \frac{1}{3})$

si on choisit $k_c = 10$, alors $\alpha \approx$ **......** soit **...** %.

$k_c = 15$, alors $\alpha \approx$ **......** %.

par contre si on se fixe α (le <u>*seuil de risque*</u>), on détermine alors k_c

pour $\alpha = 1$ %, alors $k_c =$ **.....**

Remarque : plus on diminue l'erreur α et plus on augmente l'erreur β.

<u>*Erreur de 2de espèce*</u> : $\beta = P(X < k_c / p = ?)$.

Supposons que le pourcentage p de réussite pour un étudiant qui a travaillé soit de 0,6; on obtient :

avec $k_c = 10$, alors $\alpha \approx$ **...** % et $\beta \approx$ **.....** soit **...** %

avec $k_c = 12$, alors $\alpha \approx$ **...** % et $\beta \approx$ **...** %

avec $k_c = 14$, alors $\alpha \approx$ **...** % et $\beta \approx$ **...** %

Comment arriver à réduire en même temps les deux erreurs ? En augmentant le nombre de questions.

Avec, par exemple, 40 questions et $k_c = 20$ (au moins la moitié des réponses correctes) :

$\alpha = P(X \geq 20 / p = \frac{1}{3}) \approx 0{,}02$

$\beta = P(X < 20 / p = 0{,}6) \approx 0{,}07$

✏ ***Enoncé de la règle de décision :***

On choisit un étudiant au hasard.

- si, à son test, il a au moins k_c réponses correctes, alors on rejette l'hypothèse H_0, et on le déclare reçu. (On a un <u>*risque*</u> α de se tromper)

- si, à son test, il a strictement moins de k_c réponses correctes, alors on n'a aucune raison de rejeter l'hypothèse H_0, et on le déclare recalé. (On a un <u>*risque*</u> β de se tromper)

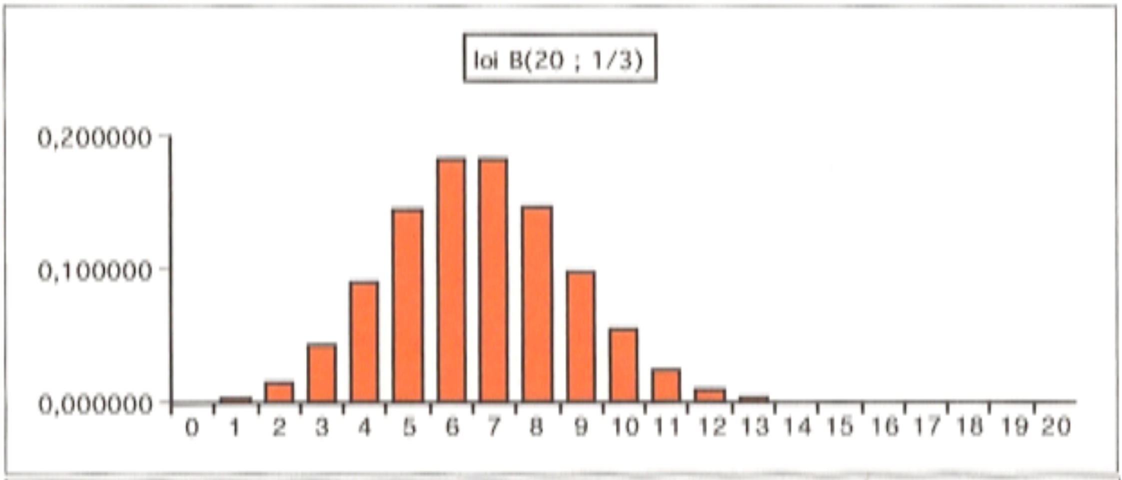
tables de la loi Binomiale **n = 20**

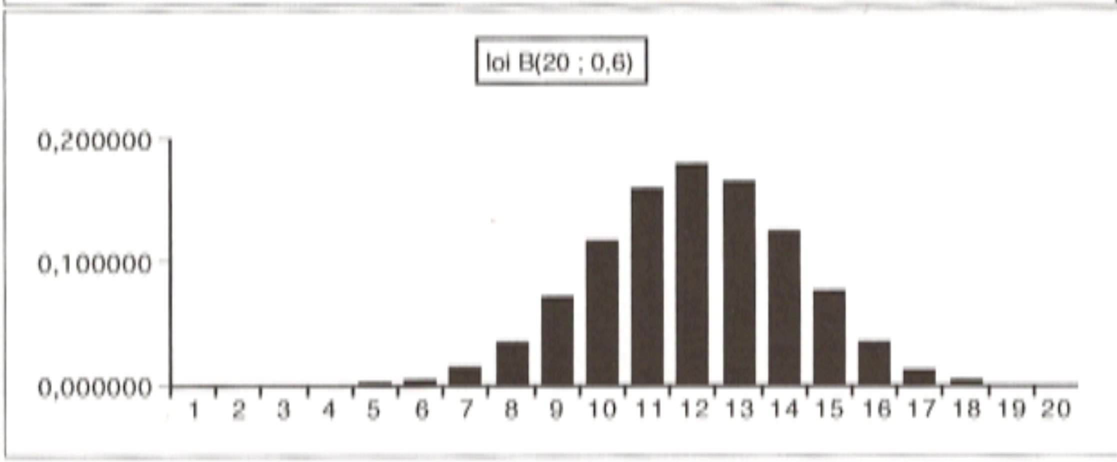
p = 1/3

k	P(X=k)	P(X≥k)
0	0,000301	1,000000
1	0,003007	0,999699
2	0,014285	0,996692
3	0,042854	0,982407
4	0,091064	0,939554
5	0,145703	0,848489
6	0,182129	0,702786
7	0,182129	0,520657
8	0,147980	0,338529
9	0,098653	0,190549
10	0,054259	0,091896
11	0,024663	0,037637
12	0,009249	0,012973
13	0,002846	0,003725
14	0,000711	0,000879
15	0,000142	0,000167
16	0,000022	0,000025
17	0,000003	0,000003
18	0,000000	0,000000
19	0,000000	0,000000
20	0,000000	0,000000

p = 0,6

k	P(X=k)	P(X<k)
0	0,000000	0,000000
1	0,000000	0,000000
2	0,000005	0,000000
3	0,000042	0,000005
4	0,000270	0,000047
5	0,001294	0,000317
6	0,004854	0,001612
7	0,014563	0,006466
8	0,035497	0,021029
9	0,070995	0,056526
10	0,117142	0,127521
11	0,159738	0,244663
12	0,179706	0,404401
13	0,165882	0,584107
14	0,124412	0,749989
15	0,074647	0,874401
16	0,034991	0,949048
17	0,012350	0,984039
18	0,003087	0,996389
19	0,000487	0,999476
20	0,000037	0,999963





tables de la loi Binomiale

n = 20

p=1/3

k	P(X=k)	P(X≥k)
0	0,000301	1,000000
1	0,003007	0,999699
2	0,014285	0,996692
3	0,042854	0,982407
4	0,091064	0,939554
5	0,145703	0,848489
6	0,182129	0,702786
7	0,182129	0,520657
8	0,147980	0,338529
9	0,098653	0,190549
10	0,054259	0,091896
11	0,024663	0,037637
12	0,009249	0,012973
13	0,002846	0,003725
14	0,000711	0,000879
15	0,000142	0,000167
16	0,000022	0,000025
17	0,000003	0,000003
18	0,000000	0,000000
19	0,000000	0,000000
20	0,000000	0,000000

p=0,6

k	P(X=k)	P(X<k)
0	0,000000	0,000000
1	0,000000	0,000000
2	0,000005	0,000000
3	0,000042	0,000005
4	0,000270	0,000047
5	0,001294	0,000317
6	0,004854	0,001612
7	0,014563	0,006466
8	0,035497	0,021029
9	0,070995	0,056526
10	0,117142	0,127521
11	0,159738	0,244663
12	0,179706	0,404401
13	0,165882	0,584107
14	0,124412	0,749989
15	0,074647	0,874401
16	0,034991	0,949048
17	0,012350	0,984039
18	0,003087	0,996389
19	0,000487	0,999476
20	0,000037	0,999963