- Université Claude Bernard Lyon 1-

Master Mathématiques et Applications, Ingénierie mathématiques, spécialité recherche, première année, parcours mathématiques générales

Travail Encadré de Recherche de Florence BUISSON sous la direction de Véronique BATTIE

# *Observation de la transition lycée-université grâce à l'analyse didactique d'un exercice d'arithmétique en L1*

*Année universitaire 2007-2008*

Remerciements

Je tiens à remercier dans cette page toutes les personnes qui, à un moment ou un autre, m'ont apporté leur soutien.

Je remercie tout d'abord Thomas Blossier et Sophie Soury-Lavergne d'avoir accepté de participer au jury de ma soutenance.

Merci beaucoup à Delphine Jouve qui m'a aidée pour les détails « administratifs » par deux fois.

Je tiens à remercier aussi Laurent Habsieger et Serge Parmentier qui ont tous deux accepté très gentiment de me rencontrer pour m'éclairer sur le théorème chinois.

Je remercie vivement Philippe Caldero et à Pierre Lavaurs pour les deux entretiens menés. La richesse de ces deux entrevues a permis d'enrichir profondément mon travail et de lui apporter un regard différent.

Je remercie surtout Véronique Battie d'avoir accepté d'encadrer ce travail. Je lui suis extrêmement reconnaissante de m'avoir introduite à la didactique des mathématiques par le biais de son cours d'Histoire, Epistémologie et Didactique des Mathématiques en licence. Sous sa direction, ce travail a été très formateur et vraiment enrichissant. J'ai pris énormément de plaisir à le réaliser en suivant ses conseils toujours avisés, enthousiastes et pertinents. Je ne la remercierai jamais assez pour tout le temps et l'énergie qu'elle m'a consacrés.

Enfin, un grand merci à Sophie, Julie, Adeline, Florent, Caroline et au club des cinq pour m'avoir encouragée et soutenue dans les phases de découragement.

# TABLE DES MATIERES


**INTRODUCTION** ........ **4**

**PARTIE I : ANALYSE A PRIORI DU PROBLEME** ........ **6**

1- PROGRAMMES D'ARITHMETIQUE EN TERMINALE S SPECIALITE MATHEMATIQUES ET EN L1 ........ 7

*A- Connaissances transmises en Terminale Scientifique spécialité mathématiques ........ 7*

*B- Connaissances transmises en L1 ........ 8*

a) Cours ........ 8

b) Travaux dirigés ........ 12

2- ANALYSE MATHEMATIQUE ........ 15

*A- Analyse mathématique générale ........ 15*

a) Analyse « pratique » ou « constructive » du théorème chinois ........ 17

b) Approche « abstraite » ou « implicite » ........ 19

*B- Analyse mathématique du problème en jeu ........ 20*

a) Remarques générales ........ 20

b) Concernant le théorème de Bézout ........ 21

c) Concernant le théorème de Gauss ........ 21

d) Concernant l'algorithme d'Euclide ........ 22

3- ANALYSE DIDACTIQUE DU SUJET ........ 23

*A- Préparation des deux entretiens ........ 23*

a) Du point de vue pratique ........ 23

b) Contenu des entretiens ........ 24

*B- Choix du sujet ........ 25*

a) Choix du domaine : l'arithmétique ........ 25

b) Choix du sujet : la résolution d'une équation diophantienne ........ 27

*C- Analyse globale des questions et de leur enchaînement ........ 28*

a) Choix de la présentation sous forme d'un système de congruences ........ 29

b) Enchaînement des questions ........ 30

*D- Elaboration d'une grille d'analyse pour l'étude des copies ........ 31*

a) Construction plus précise des questions ........ 31

b) Elaboration d'une grille d'analyse ........ 32

Question 1: « montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux, et écrire une relation de Bézout associée. » ........ 32

Question 2 : « Quel est l'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 ? » .............. 33
Question 3 : En vous aidant de la relation de Bézout, trouver un entier no multiple de 16 qui vérifie par ailleurs no=1[7]. En déduire une solution du système (E). » ...................................................... 34
Question 4 : « Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E). ».............. 35
4- SYNTHESE DES HYPOTHESES DE TRAVAIL EFFECTUEES ............................................................... 36

**PARTIE II : ANALYSE DES COPIES.................................................................................................. 38**

1- DESCRIPTION DU CORPUS DE COPIES ......................................................................................... 39
*A- Composition du corpus de copies ............................................................................................ 39*
*B- Traitement global de l'exercice ............................................................................................. 39*
2- ANALYSE DES TROIS PREMIERES QUESTIONS.............................................................................. 41
*A- Montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux ........................................................................... 41*
*B- Remontée de l'algorithme d'Euclide pour trouver une relation de Bézout.................................. 43*
*C- Ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et 16 ........................................................ 45*
*D- Question 3 .......................................................................................................................... 47*
*E- Synhtèse .............................................................................................................................. 49*
3- LES ETUDIANTS FACE A L'AUTONOMIE DEVOLUE A LA QUESTION 4 ............................................. 51
*A- Les étudiants qui s'affranchissent de la structure de l'énoncé .................................................... 51*
*B- Cinq grands types de copies face à la résolution de la question 4 ............................................. 52*
a) Copies donnant la solution correcte sans justification ........................................................... 53
b) Ceux qui tentent de synthétiser............................................................................................. 54
c) Ceux qui tentent de contourner la difficulté........................................................................... 57
d) ceux qui choisissent une méthode synthétique et justifiée...................................................... 58
*C- Synthèse ............................................................................................................................... 60*

**CONCLUSION........................................................................................................................... 62**

**BIBLIOGRAPHIE....................................................................................................................... 65**

**ANNEXES ................................................................................................................................. 66**

ANNEXE 1.................................................................................................................................. 67
ANNEXE 2.................................................................................................................................. 69
ANNEXE 3.................................................................................................................................. 72
ANNEXE 4.................................................................................................................................. 87
ANNEXE 5.................................................................................................................................. 89

# INTRODUCTION

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une recherche menée sur « la transition lycée / université ». L'étude réalisée est centrée sur l'analyse d'un exercice d'arithmétique dans 73 copies d'étudiants en L1 de mathématiques en 2006/2007 à l'université Claude Bernard (Lyon 1). Le sujet de bac de mathématiques en série S de France métropolitaine de juin 2006, où un exercice de même type avait été proposé en tant qu'exercice de spécialité « mathématiques », sert de référence tout au long de l'étude. On l'utilise pour analyser les différences en matière d'autonomie entre des élèves préparant le baccalauréat, sésame pour l'entrée à l'université, et des étudiants en première année de licence de mathématiques. Il nous permet aussi de mieux comprendre les différences au niveau des attentes des enseignants vis à vis des connaissances à acquérir et des raisonnements à fournir.

Le problème mathématique général mis en jeu concerne la résolution d'une équation diophantienne. L'intérêt de se pencher sur un exercice d'arithmétique pour observer cette transition concerne le domaine mathématique mis en jeu. En effet, on voit au collège et en classe de Seconde générale quelques notions sur les nombres premiers et le PGCD mais seuls les étudiants issus d'une terminale S spécialité mathématiques ont refait de l'arithmétique. Cette partie du cours d'algèbre de L1 est donc presque entièrement nouvelle pour certains étudiants. Dans ce domaine, le choix de travailler sur la résolution d'une équation diophantienne n'est pas non plus anodin. Ce type de problème est cité dans le programme officiel de la spécialité mathématiques en TS comme application des théorèmes de Bézout et Gauss. Plus concrètement, la résolution des équations diophantiennes apparaît dans un grand nombre de sujets de bac *(cf.* **[1]***)*. C'est un thème récurrent. Pour les élèves de terminale S spécialité mathématiques, ces problèmes sont connus et très classiques. Pour les autres, ce sujet fait intervenir plusieurs notions clés du cours d'arithmétique. La présentation sous forme d'un système de congruence est elle aussi très importante parce que les congruences sont mises en avant au niveau de la dernière modification du programme de TS spécialité mathématiques (BO n°4 du 30 Août 2001 appliqué à la rentrée 2002) et parce que cette présentation renvoie au théorème chinois, qui aura, dans la suite du cursus universitaire, une importance capitale pour l'étude des $Z/nZ$. Au regard de ces éléments, on a choisi de séparer les étudiants suivant deux profils bien distincts selon qu'ils soient détenteurs d'un bac S spécialité mathématiques ou d'un autre bac.

Dans la première partie de ce travail, nous présenterons l'analyse a priori du problème et les hypothèses de travail effectuées en vue de l'analyse effective des copies. La seconde partie du mémoire concernera l'analyse des copies et nous comparerons les résultats de cette étude avec les hypothèses de travail formulées. On essaiera alors de mettre en évidence certains facteurs pouvant expliquer le taux d'échec très élevé en première année universitaire et notamment tout ce qui concerne les problèmes liés à la question de l'orientation des élèves à l'issue du bac.

# PARTIE I : Analyse a priori du problème

Dans cette partie, le but est d'analyser précisément et sous différents angles le sujet posé à l'examen de décembre 2006, dans le cadre de l'Unité d'Enseignement « Maths 1 : Algèbre ». Ce travail prépare l'objet central de notre étude : l'analyse des copies. Nous nous sommes appuyée sur plusieurs supports pour mener à bien cette tâche.

Tout d'abord, pour les connaissances transmises en arithmétique, nous avons étudié le programme de terminale S spécialité mathématiques, le cours de Pierre Lavaurs, l'un des deux professeurs en charge de l'unité d'enseignement (par la suite nous parlerons d'UE) « maths 1 : algèbre » pendant l'année scolaire 2006-2007, le cours d'un élève ayant suivi le cours de P. Lavaurs, la fiche de travaux dirigés correspondant à la partie arithmétique de cette UE.

Ensuite, pour l'analyse mathématique, nous avons utilisé en particulier l'ouvrage de M. Demazure **[2]**, et nous avons mené deux entretiens informels avec des chercheurs en mathématiques, MM Parmentier et Habsieger.

Enfin, nous avons mené deux entretiens avec les deux responsables de l'UE. Nous avons donc rencontré séparément MM Pierre Lavaurs et Philippe Caldero, qui tous deux avaient en charge des amphis, deux pour P. Lavaurs et un pour P. Caldero. Nous nous sommes adressée à eux à la fois en tant qu'enseignants responsables des connaissances transmises et en tant que concepteurs du sujet étudié. Leur rôle d'« enseignant » est évoqué en majeure partie dans la sous-partie « 1-B- Connaissances transmises en L1 ». Il s'agit d'évaluer les différences possibles entre les différents amphis et de chercher à savoir précisément ce qui a été fait en arithmétique en L1. L'aspect « concepteur du sujet » est détaillé dans la troisième sous-partie « analyse didactique ». On y trouvera en particulier le protocole opératoire élaboré pour la préparation de ces entretiens. Les références à ces deux entrevues seront, à chaque fois, signalées explicitement : on indiquera lequel des deux enseignants est concerné et les citations seront en italique.

## *1- Programmes d'arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques et en L1*

Dans cette partie, on fait un bilan exhaustif des connaissances transmises en arithmétique.

### A- Connaissances transmises en Terminale Scientifique spécialité mathématiques

Dans le secondaire, on a une introduction à l'arithmétique en classe de troisième avec les notions de PGCD, de PPCM, de nombres premiers et d'algorithme d'Euclide. Puis au lycée, l'arithmétique est abordée en classe de seconde générale avec la définition des nombres premiers. Enfin, c'est une partie essentielle du programme de la spécialité mathématique en Terminale Scientifique. Nous allons regarder les connaissances qu'ils ont reçues en s'appuyant sur le programme officiel de cet enseignement de spécialité. Dans l'extrait de B.O. qui suit, on a sélectionné uniquement ce qui semblait intéressant pour la suite de ce travail (*cf. Annexe 1* pour l'extrait complet concernant l'enseignement de spécialité en Terminale S)

| Extrait du B.O. (août 2001) |
|---|

L'arithmétique est un champ des mathématiques très vivant dont les applications récentes sont nombreuses ; c'est un domaine au matériau élémentaire et accessible conduisant à des raisonnements intéressants et formateurs. C'est un lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement. (50 % du temps préconisé)

| Contenus | Modalités de mise en œuvre | Commentaires |
|---|---|---|
| Divisibilité dans Z<br>Division euclidienne.<br>Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.<br>Congruences dans Z<br>Entiers premiers entre eux | On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde. | On montrera l'efficacité du langage des congruences.<br>On utilisera les notations : a=b(n) ou a=b(modulo n), et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication.<br>Toute introduction de Z/nZ est exclue |
| Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers<br>PPCM | | |
| Théorème de Bézout<br>Théorème de Gauss | Exemples simples d'équations diophantiennes | |

On peut déjà s'intéresser au volume horaire attribué à l'arithmétique en TS spécialité maths. Le programme conseille au professeur de consacrer 50% du volume horaire disponible à cette partie du programme. Sachant que la spécialité dispose de 2 heures par semaine, cela nous donne environ 30 heures d'arithmétique.

Au niveau du contenu de l'enseignement transmis, on remarque plusieurs choses dans le tableau. Un accent a bel et bien été mis sur les congruences. Il est recommandé d'insister sur l'efficacité de cet outil. Il est aussi explicitement précisé de ne pas introduire la notion de Z/nZ qui sera donc nouvelle pour tous les étudiants. On remarque ensuite que l'algorithme d'Euclide est étroitement lié avec la notion de nombres premiers entre eux. La décomposition en produit de facteurs premiers, qui permet aussi de prouver que deux entiers sont premiers entre eux, n'intervient qu'après. Les théorèmes de Bézout et de Gauss semblent être les deux théorèmes principaux du cours. La notion d'équations diophantiennes apparaît dans le programme, associée aux deux théorèmes principaux. Cette mise en valeur ajoutée au fait que les problèmes de type « résolution d'équations diophantiennes » apparaissent fréquemment dans les sujets de bac nous permettent d'affirmer sans grand risque d'erreur que tous les élèves de TS spécialité maths en ont rencontré et résolu. P. Caldero en est bien conscient *« Et en plus il faut bien voir que dans l'enseignement de spécialité en TS, ça c'est un gros morceau. Quand on leur demande « qu'est-ce que vous avez vu en plus des autres », ils disent généralement Bézout et ce genre d'équations, le reste chinois. C'est ça qu'ils voient. »*

## B- Connaissances transmises en L1

Le temps consacré à l'arithmétique durant ce semestre consiste en deux cours d'amphi et une fiche de TD soit à peu près une dizaine d'heures.

### a) Cours

Pour cette partie, on se base sur le cours de P. Lavaurs récupéré sur le site Internet de P. Caldero, qui a confirmé oralement suivre ce cours, sur le cours photocopié de l'élève qui suivait l'amphi de P. Lavaurs et sur les précisions demandées lors des deux entretiens. On rappelle que Pierre Lavaurs avait en charge deux amphis, Philippe Caldero un.

On effectue tout d'abord des remarques générales et ne se limitant pas au sujet étudié concernant le cours transmis par les deux enseignants :

• La relation ppcm(a,b) x pgcd(a,b)=ab est un complément sans commentaire et sans applications et ne semble donc pas avoir réellement été mise en valeur.

• La relation de Bézout est exploitée comme un moyen de calculer l'inverse d'un élément dans les Z/nZ. Il est instauré un lien très fort avec le groupe quotient. La relation est aussi utilisée pour la remontée de l'algorithme d'Euclide. Ce dernier n'apparaît qu'en lien avec la relation de Bézout. On repère alors une association privilégiée. Dans l'exemple choisi pour illustrer cette méthode, les nombres choisis sont premiers entre eux ce qui est susceptible d'engendrer des confusions dans cette relation.

• La définition des nombres premiers entre eux est donnée à la suite de l'algorithme d'Euclide et de la remontée de Bézout. Cette définition est donnée en terme de « diviseur commun positif égal à 1 ».

• Le théorème de Gauss n'est pas exploité et est juste indiqué à titre utilitaire pour la démonstration de l'unicité dans la décomposition en produits de facteurs premiers.

• On valorise la résolution dans Z/nZ et en particulier dans les Z/pZ. Ainsi, dans les quatre exemples proposés en fin de chapitre, seul le premier fait appel à une résolution « type terminale » (l'utilisation du théorème de Gauss est entre parenthèses) mais c'est la deuxième résolution qui est privilégiée «tellement plus agréable à écrire » :

Exemple 1 :

Résoudre dans Z l'équation, d'inconnue $x$ :

$$24x + 5 \equiv 0 \; [137]$$

On peut traiter cet exemple avec ou sans usage de Z/137Z. Faisons les deux successivement, on constatera que les énoncés simples sur les propriétés algébriques de Z/137Z remplacent avantageusement les techniques, il est vrai elles aussi simples, d'arithmétique classique.

**Première résolution (sans utiliser Z/137Z)**

Remarquons que 137 est premier, et donc que 137 et 24 sont premiers entre eux ; cherchons à écrire une identité de Bézout entre 137 et 24 ; en utilisant l'algorithme décrit plus haut, on découvre que : $1 = 40 \times 24 - 7 \times 137$

D'où on déduit (par une simple multiplication par 5) que : $5 = 200 \times 24 - 35 \times 137$

Reportons cette identité dans l'équation qui devient donc :

$$24x + 200 \times 24 - 35 \times 137 \equiv 0 \ [137]$$
$$\Leftrightarrow \ 24 \times (x + 200) \equiv 0 \ [137]$$
$$\Leftrightarrow \ 137 \text{ divise } 24 \times (x + 200)$$
$$\Leftrightarrow \ 137 \text{ divise } x + 200 \qquad \text{(en utilisant le lemme de Gauss)}$$
$$\Leftrightarrow \ x + 200 \equiv 0 \ [137]$$
$$\Leftrightarrow \ x \equiv -200 \ [137]$$
$$\Leftrightarrow \ x \equiv 74 \ [137]$$

**Deuxième résolution (avec Z/137Z)**

Remarquons que 137 est premier et donc que Z/137Z est un corps commutatif. Faisons tous les calculs dans ce corps.

L'équation proposée se réécrit :

$$\overline{24} \times \overline{x} + \overline{5} = \overline{0}$$
$$\Leftrightarrow \ \overline{24} \times \overline{x} = -\overline{5}$$
$$\Leftrightarrow \ \overline{x} = -\overline{5} \times (\overline{24})^{-1}$$

Calculons donc $(\overline{24})^{-1}$ : pour cela nous connaissons la bonne méthode : écrire une identité de Bézout entre 24 et 137 à savoir $1 = 40 \times 24 - 7 \times 137$

Puis redescendre aux classes d'équivalence dans Z/137Z : $\overline{1} = \overline{40} \times \overline{24}$

On en conclut que l'équation proposée équivaut à : $\overline{x} = -\overline{5} \times \overline{40} = -\overline{200} = \overline{74}$

On effectue maintenant des remarques générales concernant le cours photocopié de l'élève :

- Les démonstrations sont effectuées en exercices et sont séparées du cours.
- Dans l'exemple du cours cité au-dessus, la solution d'arithmétique « classique » est décrite comme une solution à la main alors que celle avec les Z/nZ est qualifiée de « solution outillée »

En comparant ces deux cours, quelques problèmes surgissent. On repère trois différences principales : la section des sous-groupes de Z est absente du cours de l'élève, la présentation des Z/nZ est différente, la définition des nombres premiers entre eux est elle aussi légèrement dissemblable. Nous avons utilisé les deux entretiens pour résoudre ces problèmes.

Pour la section des sous-groupes de Z, Pierre Lavaurs a confirmé qu'il ne l'enseignait plus *« Tout à fait cette section est restée imprimée mais elle n'est plus faite. Je l'ai peut-être faite une année où j'avais le temps. Elle n'est pas au programme. »*. En revanche, Philippe

Caldero m’assuré l’avoir faite, comme toutes les années *« Oui, oui je l’ai faite, bien sûr, toujours, parce que c’est vraiment la charnière entre l’arithmétique et la théorie des groupes. C’est quelque chose que je fais systématiquement et puis en plus c’est extrêmement utile dans les exercices, c’est vraiment quelque chose d’extrêmement important, pour plein de raisons. »*

Pour la présentation des Z/nZ, le cours de P. Lavaurs évoquait la relation d’équivalence (congruence modulo n) tandis que le cours de l’élève définissait Z/nZ comme étant l’ensemble des classes {0, …, n-1}. P. Lavaurs valide la définition du cours de l’élève *« j’avais une préférence pour le faire sans parler de la relation d’équivalence. Je sais que quand j’avais tapé le cours, j’avais fait pour me conformer aux collègues qui préféraient les initier aux structures quotients. Cependant, il est probable que j’ai fait comme je préfère à ce niveau là, c'est-à-dire comme étant l’ensemble {0, …, n-1}. »* Son objectif était d’éviter d’avoir à parler de structures quotient : *« je pense que les structures quotient ça passe très mal. Ils ont déjà beaucoup de mal à comprendre les relations d’équivalence alors les ensembles quotients, c’est plutôt pire »*. P. Caldero, quant à lui, est resté fidèle à la définition du cours, *« J’ai toujours fait les relations d’équivalences. Il est clair que l’équivalence et le passage au quotient sont quand même des notions incontournables. Le passage au quotient, est une notion qui, une fois qu’on l’a dominée, est extrêmement féconde. Une relation d’équivalence, ce n’est rien d’autre qu’une partition. En conséquence, je continue avec les partitions. Je n’ai pas du tout touché à ça. J’ai essayé et finalement ça n’a pas été convaincant et je ne pense pas que ce soit traumatisant outre mesure pour les étudiants de passer à la classe d’équivalence à partir du moment où on leur dit : regardez on partitionne juste l’ensemble. »*

Pour la définition des nombres premiers, le cours de P. Lavaurs parle de deux nombres dont le seul diviseur commun est égal à 1, celui de l’élève de deux nombres dont le PGCD est égal à 1. Il nous a semblé intéressant de creuser ce détail car l’allusion plus directe au PGCD incitera peut-être plus les étudiants à penser à l’algorithme d’Euclide pour les questions liées à ce problème. Nous avons demandé des précisions à ce sujet, uniquement dans l’entretien de P. Lavaurs : *« Je dois dire que je ne me pose même pas la question. Ce que je peux dire au tableau, c’est ce qui me passe par la tête. J’ai dit au tableau en termes de PGCD, et peut-être que trois ans avant, j’avais écrit en termes de diviseurs communs sans penser qu’il pouvait y avoir une nuance pour la compréhension mais c’est important de remarquer ce genre de choses. »*.

Ces trois points ont tendance à montrer que, selon l'enseignant qu'ils avaient en cours, les étudiants ont reçu les mêmes connaissances mais de manière différente. Le point le plus important pour nous, concerne la présentation des Z/nZ car cette notion peut intervenir dans l'exercice considéré. Cependant nous n'opérerons pas de différences entre les étudiants selon l'amphi ou le TD qu'ils ont suivi. En effet, nous n'avons pas les moyens de le faire et même s'il parait vraisemblable que les points de vue exploités en TD influencent les étudiants, les différences se situent essentiellement au niveau de la présentation des connaissances et non au niveau du contenu.

### b) Travaux dirigés

La feuille de TD intitulée « arithmétique » comporte 20 exercices (voir annexe). Il y a une quinzaine de groupes de TD. Nous avons choisi d'analyser uniquement les exercices ou les parties d'exercices en lien avec le sujet.

<u>Exercice 6 :</u> Calculer le PGCD de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bézout.

L'exercice 6 donne deux exemples où le PGCD ne vaut pas 1. S'il a été traité, il peut permettre à des étudiants de bien comprendre l'intérêt de calculer un PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide en vue de trouver une relation de Bézout.

<u>Exercice 7 :</u> Soient $a, b$ et $c$ trois entiers tels que $a$ et $b$ ne sont pas tous deux nuls. En utilisant l'identité de Bézout, démontrer que l'équation $ax + by = c$ a au moins une solution $(x, y) \in Z^2$ si et seulement si $\text{PGCD}(a, b)$ divise $c$

L'exercice 7 présente une équation diophantienne. Le but de l'exercice est de prouver la condition d'existence de solutions à cette équation. Cette question n'a pas été abordée en cours. Cet exercice amène les étudiants à percevoir qu'une équation de ce type n'a pas forcément de solutions. C'est ce qui constitue la différence fondamentale entre résoudre cette équation dans Z ou la résoudre dans $\Re$.

Exercice 8 : (a) Résoudre dans Z² l'équation $58x + 21y = 0$.

(b) Résoudre dans Z² l'équation $58x + 21y = 1$.

(c) Résoudre dans Z² l'équation $14x + 35y = 21$.

(d) Résoudre dans Z² l'équation $637x + 595y = 29$.

L'exercice 8 traite le cas de quatre équations diophantiennes très différentes. L'accent est mis, à l'image de l'exercice précédent, sur la condition d'existence de solutions. On peut imaginer que ces équations ont été résolues avec le théorème de Gauss qui, ici, nous semble être la méthode naturelle. Plus précisément, dans (a), Les coefficients sont premiers entre eux. Rien n'incite à passer au travail avec les groupes quotient (ni la formulation sans congruences, ni le choix de nombres dont aucun n'est premier). Le théorème de Gauss est à privilégier, notamment pour l'unicité du k. Dans (b), on a trouvé la solution générale de l'équation au (a), il reste à trouver la solution particulière. On retrouve la tâche routinière de spécialité en deux étapes : résolution générale et solution particulière. Dans (c), la résolution nécessite une étape supplémentaire : la simplification des coefficients par 7. Dans (d), l'équation choisie n'a pas de solutions ce qui tend à confirmer que l'insistance sur les conditions d'existence a réellement été voulue dans cet exercice.

Cet exercice montre que la résolution classique en Terminale S spécialité mathématiques a aussi été présentée en L1, ce que confirme un des exercices du sujet de rattrapage :

1) Montrer que les entiers 28 et 15 sont premiers entre eux.

2) Résoudre dans Z² l'équation $28x + 15y = 0$.

3) Donner une solution de l'équation $28x + 15y = 1$.

4) Résoudre dans Z² l'équation $28x + 15y = 1$.

Revenons en aux exercices de la feuille de TD.

Exercice 9 : Résoudre le système suivant dans Z :

$$\begin{cases} n \equiv 13 \ [19] \\ n \equiv 6 \ \ [12] \end{cases}$$

L’exercice 9 propose exactement le même système que celui du sujet de baccalauréat. C’est donc l’analogue de l’examen mais aucune méthode de résolution n’est proposée. Cette constatation renforce l’importance de savoir comment ont été construites les questions de l’exercice étudié car celui du TD sur lequel il semble s’appuyer n’est pas du tout détaillé.

| |
|---|
| Exercice 19 : (a) Résoudre dans Z l’équation $13x + 2 \equiv 0 \ [97]$ |

Dans cette question, on refait un exemple du cas déjà traité dans le cours (premier exemple cité précédemment). ~~On peut imaginer que seule la « solution outillée » a été mise en valeur.~~ De même que dans l’exemple du cours, 13 et 97 sont premiers entre eux, 97 est un nombre premier. C’est une application tout à fait similaire à celle effectuée dans le cours. On renforce là encore le lien très fort avec le travail algébrique possible pour la résolution de ce type d’équation.

## *2- Analyse mathématique*

L'exercice étudié teste les connaissances en arithmétique acquises au cours de l'UE « maths 1 : algèbre ». Plus précisément, le problème se penchait sur la résolution d'un système de deux congruences.

### A- Analyse mathématique générale

Nous disposons de deux sujets issus de contextes institutionnels très différents. Le premier sujet correspond à l'exercice étudié. Il s'agit d'un exercice d'arithmétique extrait de l'examen posé à des étudiants en première année de licence de mathématiques à l'université Claude Bernard de Lyon, en décembre 2006. Le second sujet est tiré d'une épreuve de mathématiques du baccalauréat session 2006, série S, posé en France métropolitaine. L'exercice considéré est celui de spécialité (cet exercice diffère de celui proposé aux candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques).

**Exercice 2 de l'examen de décembre 2006.**

Le but de cet exercice est de résoudre dans Z le système de congruences suivant, d'inconnue n : $(E)\ \begin{cases} n \equiv 3\ (7) \\ n \equiv 0\ (16) \end{cases}$

<u>Question 1</u> : « montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux, et écrire une relation de Bézout associée. »

<u>Question 2</u> : « Quel est l'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 ? »

<u>Question 3</u> : « En vous aidant de la relation de Bézout, trouver un entier $n_0$ multiple de 16 qui vérifie par ailleurs $n_0 \equiv 1\ [7]$. En déduire une solution du système (E). »

<u>Question 4</u> : « Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E). »

## Sujet de Baccalauréat (France métropolitaine, juin 2006)

**Partie A : Question de cours**

1) Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss

2) Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout

**Partie B**

Il s'agit de résoudre dans Z le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13 \ (19) \\ n \equiv 6 \quad (12) \end{cases}$

1) Démontrer qu'il existe un couple (u,v) d'entiers relatifs tel que : 19u + 12v = 1 (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre N = 13 x 12v + 6 x 19u est une solution de (S)

2) a- Soit $n_0$ une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 \ (19) \\ n \equiv n_0 \ (12) \end{cases}$.

b- Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \ (19) \\ n \equiv n_0 \ (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \ (12 \times 19)$.

3) a- Trouver un couple $(u,v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b- Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2)b)

4) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Dans les deux sujets, le but est de résoudre un système de deux congruences, soit un système chinois à deux équations. Dans cette partie, nous allons donc nous pencher sur ce théorème, abordé à l'université de Lyon pour la première fois en L3, et sur ses démonstrations. Ni les élèves de Terminale S spécialité mathématiques, ni les étudiants de L1 ne connaissent ce théorème. Néanmoins, sa compréhension est indispensable pour appréhender entièrement les raisons de la construction des deux problèmes et bien saisir les enjeux d'une telle étude. Il y a deux façons principales d'aborder ce théorème et de le présenter : une approche pratique et constructive du théorème chinois permettant l'écriture explicite de solutions et une approche plus abstraite démontrant l'intérêt de ce théorème en algèbre.

### a) Analyse « pratique » ou « constructive » du théorème chinois

En L3, l'énoncé du théorème met en jeu la résolution d'un système de congruences et la démonstration proposée se base sur une approche constructive qui permet d'obtenir une solution explicite du problème. On retrouve dans cette démonstration deux théorèmes fondamentaux d'arithmétique : le théorème de Bézout (dans la partie qui démontre l'existence de solutions) et le théorème de Gauss (dans la partie montrant l'unicité modulo le produit des $m_i$).

<u>Enoncé du théorème chinois :</u>

| |
|---|
| Soient $m_1,\ldots,m_r$ des entiers strictement positifs, deux à deux premies entre eux et soient $a_1,\ldots,a_r \in \mathbb{Z}$.<br>Alors le système suivant admet des solutions :<br>$\begin{cases} x \equiv a_1 [m_1] \\ x \equiv a_2 [m_2] \\ \ldots \\ x \equiv a_r [m_r] \end{cases}$<br>De plus, si $x$ et $x'$ sont deux solutions alors $x \equiv x' [m_1 \ldots m_r]$ |

Passons maintenant à la démonstration de ce théorème.

Pour cette démonstration, on a besoin de deux lemmes :

| |
|---|
| Lemme 1 : Si $m_1,\ldots,m_r$ sont tous premiers avec $n$ alors $m_1 \ldots m_r \wedge n = 1$ |

<u>Démonstration du lemme 1 :</u>

On applique Bézout : $a_i m_i + b_i n = 1$

Par multiplication, on obtient : $(a_1 \ldots a_r) \times m_1 \ldots m_r + Bn = 1$ ce qui démontre le lemme.

| |
|---|
| Lemme2 : Soient $m_1,\ldots,m_r$ des entiers deux à deux premiers entre eux. Si $m_i / n$ pour $i = 1,\ldots,r$ alors $m_1 \ldots m_r / n$ |

Démonstration du lemme 2 :

On effectue une récurrence sur $r \geq 1$

$r = 1$ clair

On suppose maintenant que l'hypothèse de récurrence est vraie pour $r-1$

$n = m_1 \ldots m_{r-1} q$

On applique le théorème de Gauss : $m_r / n$ et $m_1 \ldots m_{r-1} \wedge m_r = 1$ donc $m_r / q$

Ainsi $m_1 \ldots m_r / n$

On peut maintenant passer à la démonstration du théorème proprement dite.

Existence :

Soit $M = m_1 \ldots m_n$ et $M_i = M / m_i$ pour $1 \leq i \leq n$

Alors $m_i \wedge M_i = 1$

$\exists c_i$ tel que $M_i \times c_i \equiv 1 \; [m_i]$

Posons $x_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k M_k c_k$

$$x_0 \equiv a_i M_i c_i \; [m_i]$$

$$x_0 \equiv a_i \; [m_i]$$

Unicité :

Soit $x$ une solution du système

Alors $x \equiv x_0 \; [m_i]$

Donc $x \equiv x_0 \; [m_1 \ldots m_n]$ d'après le lemme 2 c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule solution modulo $m_1 \ldots m_n$

On voit donc que cette démonstration permet en fait une résolution explicite du système.

En effet, la solution générale du système est donnée par $x \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i M_i c_i \; [M]$

Cette approche sert de base aux deux sujets considérés car elle ne fait intervenir que des théorèmes abordés en spécialité maths ou en L1 à savoir le théorème de Bézout et le théorème de Gauss et elle permet de répondre à la question de manière satisfaisante au regard du niveau de difficulté et d'efficacité.

### b) Approche « abstraite » ou « implicite »

Dans la suite du cursus universitaire, et notamment en M1, on le présente sous une forme plus abstraite faisant intervenir la notion d'isomorphisme. Ici, c'est plutôt la notion de décomposition en produit de facteurs premiers qui intervient. La démonstration ne fournit pas de solutions explicitement.

Enoncé du théorème :

L'homomorphisme $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z} \\ x\ [n] \mapsto x\ [m_1], \ldots\ldots, x\ [m_r] \end{cases}$ est bijectif, $n \in \mathbb{N}$

Passons maintenant à la démonstration de ce théorème.

Unicité (c'est-à-dire le fait que l'application soit injective) :

On fait la même démonstration que celle effectuée pour la première présentation de ce théorème.

Existence (c'est-à-dire le fait que l'application soit surjective) :

On raisonne sur les cardinaux des deux ensembles considérés. Ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments, ce qui, rajouté à l'injectivité du morphisme, assure la bijectivité de l'application.

Cette présentation n'est pas accessible à des étudiants de L1 et ne permet pas de résoudre les deux exercices considérés dans ce travail. En revanche, elle est tout à fait essentielle pour comprendre l'intérêt de ce théorème en algèbre et en théorie des nombres, et plus généralement son intérêt mathématique pour des étudiants et pour des chercheurs.

Pour mieux approfondir ce point, deux entretiens informels avec des chercheurs en mathématiques, Serge Parmentier, spécialisé en algèbre, géométrie et logique et Laurent Habsieger, spécialisé en théorie des nombres, ont été menés.

M Parmentier a surtout voulu insister sur une idée qu'illustre ce théorème. Selon lui, une partie de l'algèbre consiste à simplifier l'étude d'un élément en le cassant en des petits éléments plus simples ou mieux connus, l'exemple le plus parlant étant celui de l'espace vectoriel et de sa base. C'est, selon lui, ce qui rend ce théorème intéressant car il permet de restreindre l'étude d'un Z/$n$Z à l'étude des Z/ $p_i^{\alpha_i}$ Z que l'on connaît mieux en général (les $p_i^{\alpha_i}$ sont les nombres premiers qui apparaissent dans la décomposition de $n$ en produit de facteurs premiers).

M Habsieger a lui aussi pointé l'importance de cet isomorphisme. Cette décomposition a de nombreuses applications dans le domaine touchant à la théorie des nombres et en particulier en cryptographie. M Habsieger a illustré ses propos en me citant le système de codage RSA et en m'expliquant brièvement le concept.

## B- Analyse mathématique du problème en jeu

Le problème mathématique général mis en jeu est la résolution d'un système chinois à deux équations. Ce problème se ramène en fait à la résolution d'une équation diophantienne.

### a) Remarques générales

Tout d'abord, on constate que la construction de l'exercice du sujet de bac semble s'appuyer sur la démonstration, que nous avons précédemment qualifiée de constructive, du théorème chinois. La question 1 est très révélatrice de cette intention car le N que l'on propose, sans aucune justification, suit exactement la formule qui découle de cette démonstration:

$$\text{Si } \begin{cases} n \equiv a_1 \ \left(m_1\right) \\ \cdots \\ n \equiv a_r \ \left(m_r\right) \end{cases} \text{ alors } n \equiv \sum_{i=1}^{r} a_i M_i c_i \ \ (M) \text{ où } M = m_1 \cdots m_r,\ M_i = M / m_i,\ M_i c_i \equiv 1 \ \left(M\right)$$

La suite du sujet de bac confirme cette idée. L'enjeu de la question 1 est de démontrer les résultats qui seront utiles lors de la partie existence et construction de solutions. On prouve, dans la question 2, l'unicité à la congruence près. Enfin, la question 3 montre l'existence en construisant des solutions à l'aide de la question 1.

Dans le sujet universitaire, en revanche, les notions à mettre en jeu sont identiques mais les méthodes de résolution choisies sont un peu différentes. Ainsi, la partie existence est, par exemple, séparée en deux par la question sur l'unicité. Ce sujet offre aussi la possibilité à l'étudiant de transformer un travail classique d'arithmétique pur en un travail plus algébrique sur Z/pZ. Enfin, ce sujet s'inscrit dans un phénomène assez marginal dans le secondaire (peu exploité bien que présent) mais omniprésent dans l'enseignement supérieur : le phénomène de linéarité. Le but des concepteurs du sujet était de poser un problème insistant sur l'importance du phénomène de linéarité en mathématiques et s'inscrivant réellement dans ce cadre de travail, ce qu'explique P. Caldero *« on va utiliser quelque chose qui est général et puis qu'ils ont déjà vu, c'est ce phénomène de linéarité qui est omniprésent dans les mathématiques. Et là dans ce cas là, le but de cet acheminement du problème c'est un parallélisme avec l'équation différentielle linéaire, la résolution d'équation linéaire, de système linéaire dans un corps quelconque, pourquoi pas dans R »*. Nous verrons par la suite comment cette volonté forte s'est traduite lors de l'élaboration des questions.

De manière plus précise, les principales notions mathématiques associées à ce problème sont le théorème de Bézout, le théorème de Gauss et l'algorithme d'Euclide.

### b) Concernant le théorème de Bézout

On retrouve ce théorème dans les deux sujets. On demande de l'appliquer dans la question 1) du sujet de bac après l'avoir fait énoncer et utiliser dans les questions de cours. Puis, dans la question 3)a), il faut trouver une solution à l'équation de Bézout. Dans la première question du sujet universitaire, on demande clairement d'écrire une relation de Bézout. Dans les deux cas, aucune méthode n'est préconisée pour trouver cette relation.

### c) Concernant le théorème de Gauss

La question 2)b) du sujet de bac se construit essentiellement autour du théorème de Gauss qui apparaît vraiment comme une clé de cet exercice. Dans cette question, son application est presque incontournable pour des TS spécialité maths afin de démontrer correctement l'équivalence proposée. On peut remarquer que ce théorème est déjà mis en relief par les questions de cours où il s'agit de l'énoncer puis de le démontrer.

En revanche, le théorème de Gauss n'est pas indispensable pour résoudre l'exercice du sujet universitaire. On peut bien sûr l'utiliser pour résoudre la question 2 mais il parait plus simple de répondre à cette question à l’aide du PPCM. On peut aussi s’en servir à la question 3 mais là encore une méthode ne l’utilisant pas est possible. Cette méthode met en relief un lien fort avec l’algèbre et le travail dans les Z/pZ. Les questions permettent vraiment de la suivre. On peut donc, si on veut, échapper totalement à ce théorème. On verra dans la suite de notre analyse qu’il faudra alors calculer l’inverse d’un élément dans Z/7Z en utilisant la relation de Bézout précédemment trouvée (c’est la méthode de la solution outillée du cours de P. Lavaurs).

### d) Concernant l’algorithme d’Euclide

Cet algorithme n’est cité dans aucun des sujets. En revanche, dans les deux sujets, il peut permettre de prouver que les nombres en jeu sont premiers (questions 1) des deux sujets) puis il peut être « remonté » afin de trouver un couple solution de l’équation de Bézout (question 3)a) du sujet de bac et question 1) du sujet universitaire). La première utilisation de ce théorème ne constitue pas la seule méthode possible pour prouver que deux nombres sont premiers entre eux mais, comme l’algorithme devra de toute façon être explicité pour avoir la relation de Bézout, il constitue tout de même une méthode plutôt judicieuse dans ce contexte.

## *3- Analyse didactique du sujet*

Nous allons maintenant nous intéresser à plusieurs aspects du sujet étudié : choix du domaine mathématique mis en jeu et du problème posé dans ce cadre, construction effective du sujet, méthodes de résolution possibles. On trouvera ces méthodes de résolution possibles détaillées dans l'annexe « Résolution linéaire du problème » *(cf. Annexe 2).*
Toutefois, nous allons en premier lieu décrire le protocole opératoire mis en place dans le cadre des deux entretiens.

### A- Préparation des deux entretiens

Nous nous limiterons ici à la fonction « concepteurs du sujet ». En effet, le rôle d'« enseignants » a déjà été évoqué et n'a pas nécessité un gros travail de préparation, étant donné qu'il s'agissait simplement de faire des mises au point sur les connaissances transmises et sur les différences susceptibles d'y avoir entre les trois amphis.

#### a) Du point de vue pratique

Tout d'abord, nous avons choisi de mener séparément deux entretiens et non un unique avec les deux enseignants concernés. On permet ainsi à chacun de parler plus librement et de ne pas être influencé par les réponses de l'autre. Nous avons aussi décidé, après l'accord des deux enseignants concernés, d'enregistrer les entretiens à l'aide d'un dictaphone numérique. Cela nous a permis d'éviter un travail fastidieux et approximatif de prise de notes puis, par la suite, nous avons alors pu retranscrire les conversations obtenues et y avoir accès dans leur intégralité (*cf. Annexe 3)*. Les entretiens se découpent en quatre parties que nous avions indiquées aux deux enseignants dans un mail. Nous avions aussi mis le sujet de bac en fichier joint. Au début des entretiens, P. Caldero et P. Lavaurs connaissent le cadre de travail dans lequel nous nous inscrivons. Ils savent que je viens les voir en tant que concepteurs du sujet et que l'entretien sera découpé suivant les quatre parties : choix du domaine mathématique, choix de l'application dans ce domaine, construction globale des questions, analyse locale du sujet proposé.
Nous nous sommes d'abord entretenue avec P. Caldero puis avec P. Lavaurs. A l'issue du premier entretien, nous avons décidé de garder les mêmes questions pour le deuxième

entretien. De cette manière, le fait que nous nous soyons entretenue avec P. Caldero puis avec P. Lavaurs n'avait aucune incidence sur nos entretiens.

### b) Contenu des entretiens

Les entretiens sont divisés en quatre grandes parties déjà citées que l'on peut regrouper deux par deux.

Les deux premières concernent le choix du sujet. Nous n'avions formulé aucune hypothèse pour ces deux parties.

Dans un premier temps, on s'intéresse au choix de l'arithmétique qui constituait une part importante de l'examen de cette UE (deux exercices sur quatre). Le but de cette partie est de chercher à savoir deux choses.

Premièrement, on veut savoir quel est l'intérêt de ce domaine mathématique pour des enseignants chercheurs :

- Est-ce que l'arithmétique est un domaine qu'ils jugent formateur, essentiel dans un cursus universitaire ?
- Quelle vision de l'arithmétique ont-ils personnellement ?
- Que connaissent-ils des notions d'arithmétique au programme dans le secondaire ?

Deuxièmement, on se demande quel est l'intérêt de ce domaine pour des étudiants de L1 :

- Permet-il d'acquérir des mécanismes de réflexion ? Aide-t-il les étudiants à mieux appréhender les différents types de raisonnement ?
- Est-ce un domaine facile d'accès, compréhensible par le plus grand nombre, adapté à leur niveau ?

Dans un deuxième temps, on s'interroge sur le choix de faire travailler des étudiants sur la résolution de ce système de deux congruences, application simple du théorème chinois.

- Ont-ils choisi consciemment de mettre en valeur un théorème qui sera capital dans la suite du cursus universitaire ?
- Qu'est-ce qui a guidé ce choix de sujet ? La volonté de faire un pont entre l'arithmétique et les groupes ? Le fait que ce problème fasse intervenir plusieurs notions clés du cours d'arithmétique (Bézout, nombres premiers entre eux) et synthétise donc assez bien cette partie du cours d'algèbre ? La volonté de donner de l'importance aux congruences à l'image du nouveau programme de TS spécialité mathématiques ?

Les deux dernières parties ont un but bien différent. Dans celles-ci, on cherche à comprendre comment le sujet a été construit, premièrement de manière globale et deuxièmement de manière plus précise. Nous avions déjà réfléchi à ces deux questions et avions formulées des hypothèses. Ces parties nous permettent d'accéder au point de vue du concepteur, d'avoir un autre regard sur l'étude menée.
Dans un premier temps, on s'interroge sur la construction globale du sujet.
Dans un second temps, on s'intéresse à l'analyse plus précise des questions du sujet.
Nous préciserons les points traités au cours de cette partie de l'entretien pendant l'analyse des questions et au cours de l'élaboration des grilles.

Dans la suite, nous allons analyser et prendre en compte les réponses à ces différentes questions. Dans la partie qui suit, on détaillera les réponses obtenues aux deux premières parties de l'entretien. Cette partie ne fera intervenir que les résultats de ces deux démarches auprès de MM Lavaurs et Caldero. Les réponses obtenues dans les deux dernières parties ne seront pas traitées de la même manière, nous y reviendrons.

## B- Choix du sujet

Cette partie se consacre donc aux réponses de P. Lavaurs et de P. Caldero aux deux premières parties des entretiens.

### a) Choix du domaine : l'arithmétique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux deux questions déjà évoquées : quel est pour des enseignants-chercheurs en mathématiques l'intérêt de ce domaine mathématique précis et quel est l'intérêt pour eux de tester les connaissances en arithmétique des étudiants de L1 ?

Concernant l'arithmétique, les deux enseignants, P. Caldero et P. Lavaurs ont des idées bien différentes.

Pour Philippe Caldero, il est important d'enseigner rapidement l'arithmétique aux étudiants. Il voit à cela plusieurs raisons. Pour lui, il ne serait pas cohérent de créer un cursus universitaire algébrique sans parler d'arithmétique car *« les méthodes de l'algèbre ont été* *développées, en tout cas beaucoup d'entre elles, pour pouvoir faire de l'arithmétique»*. C'est donc un choix logique, en accord avec la suite du cursus universitaire proposé à Lyon 1 *« A partir du moment où on fait un cursus algébrique, il faut savoir le défendre et ces problèmes d'arithmétique, ainsi que les problèmes de diagonalisation, sont les deux problèmes types, qui justifient qu'on ait besoin de bases algébriques. »*. Il trouve aussi une raison plus subjective et plus personnelle à la transmission des connaissances dans ce domaine *« il faut habituer les gens assez tôt aux problèmes d'arithmétique parce que les nombres c'est extrêmement primitif, c'est un plaisir qui nous relie à l'enfance. Il y a des gens qui aiment les nombres et compter c'est une façon de comprendre. »*.

Pierre Lavaurs, en revanche, a un avis contraire sur la question et estime qu'il n'est pas nécessaire de l'aborder dès la L1 *« à titre personnel, je ne suis pas convaincu qu'il faudrait la faire si tôt. […] je pense qu'on leur répète le même point de vue qu'en terminale »*. Pour lui, l'intérêt des raisonnements en jeu ne semble pas faire le poids par rapport à l'application d'un programme *« On fait de l'arithmétique par une sorte de reproduction des programmes à l'identique. L'arithmétique est dans le premier semestre parce qu'il y avait des gens qui tenaient à ce qu'elle soit au premier semestre. »*.

La dernière question posée, dans cette partie de l'entretien concernait l'arithmétique dans le secondaire et avait pour but de savoir si ces deux enseignants avaient conscience que les étudiants n'en avaient pas forcément fait beaucoup avant. Là encore, les réponses sont très différentes.

Pierre Lavaurs semblait connaître les connaissances au programme en arithmétique *« Je crois qu'on fait à peu près la même chose. On fait à peu près la même chose avec Z/nZ en plus, c'est ça l'idée que je m'en fais. »* mais ignorer que la TS spécialité mathématiques était la seule classe concernée par cet enseignement **«** *D'accord, il y a des gens pour qui c'est nouveau… »*.

En revanche Philippe Caldero apparaît comme bien informé : *« Oui, oui, j'ai été prof pendant 12 ans dans le secondaire. Le secondaire, je connais bien. J'ai suivi tout ce cursus. Je me rends bien compte de leurs difficultés. C'est un truc que je connais bien. Chaque année, je leur demande s'ils ont fait ou pas une spécialisation. Et c'est vrai qu'on est obligé de faire avec un tronc commun en se disant que s'ils ont fait la spécialisation ça leur rajoutera quelque chose. »*

### b) Choix du sujet : la résolution d'une équation diophantienne

Ici, nous avons cherché à comprendre les raisons de proposer, dans le domaine de l'arithmétique, la résolution d'une équation diophantienne, qui, présentée sous cette forme faisait référence au théorème chinois. Avant de s'intéresser aux réponses des deux enseignants, nous avions aussi eu l'avis de Serge Parmentier qui avait en charge un TD et avait corrigé une partie des copies de l'examen. Il avait paru assez en accord avec notre idée, consistant à dire que ce pouvait être une bonne introduction à ce théorème et un moyen de l'avoir déjà appréhendé une fois.

Pour Philippe Caldero, il y a surtout l'intérêt mathématique du problème posé qui entre en jeu *« Le lemme chinois, qui est un lemme qui est du 12$^{ème}$ siècle, je ne sais pas, je dis 12ème siècle comme ça, mais un truc très ancien, donc vraiment des trucs qui correspondent à des besoins beaucoup plus primitifs que ceux de notre société de maintenant. Ca me parait être des beaux problèmes. Montrer que des choses abstraites, comme Lagrange ou le petit théorème de Fermat, permettent de résoudre ces questions, je trouve ça bien. Donc voila pourquoi ces questions. Je suis plus convaincu par ces trucs là que par des problèmes du style montrer que f est injective. Il faut bien sûr vérifier s'ils ont bien compris les nouvelles notions mais il faut toujours les relier aux problèmes principaux : on a des restes de division, c'est un problème inverse par rapport à un problème qu'ils avaient avant. Maintenant ils ont des restes et il faut qu'il trouve n. C'est finalement un chemin qu'ils connaissent bien ».* Il inscrit le choix du sujet dans l'histoire des mathématiques générale et dans le passé mathématique des étudiants *« L'équation diophantienne, c'est une façon de dire, pour moi, dans votre passé vous avez écrit des équations de droites, ax+by=c, et là, on tombe devant un problème qui est typique en mathématiques, on sait faire sur R, donc on a une droite et il faut chercher les points entiers et aussi, généralement, les points rationnels. Ca vise à ce type de problème qui amène encore à des problèmes algébriques, à des problèmes d'entiers. Donc on fait un lien avec ce bon vieux problème : on a une droite et on cherche des points entiers sur une droite. »*. Enfin, il prend en compte l'importance qu'a un sujet d'examen à l'université par rapport au contexte institutionnel *« Je veux leur poser un problème intéressant, ils n'en font pas beaucoup, ils ne font même pas de devoirs maisons. Ils vont réfléchir à ce problème, ils liront la correction, des gens de l'année d'après s'y intéresseront, ils se demanderont ce qu'il y a eu, ils chercheront à le faire etc. Donc c'est important de mettre des exercices un peu intéressants ».*

Pour Pierre Lavaurs, l'exercice sert à valoriser le travail des étudiants *« Honnêtement, ça fait partie des exercices, si on voulait être cynique, qui sont faits pour donner des points à l'examen. Quand on prépare l'examen, on sait que l'exercice traditionnel d'arithmétique autour de Bézout, est l'exercice qui permet aux gens qui travaillent normalement et qui révisent un minimum à la maison, d'éviter la catastrophe. Donc, c'est un exercice dont le principal intérêt est d'être stéréotypé. L'idée c'est de faire l'exercice où quelqu'un qui travaille a les points. C'est ça la logique : c'est d'évaluer le travail, de vérifier qu'ils ont travaillé plutôt que de vérifier qu'ils savent des mathématiques »*. Il diverge aussi sur la vision de P. Caldero sur l'importance d'un sujet d'examen *« Il faut aussi voir que ce n'est pas solennel d'écrire un sujet d'examen. Il y a beaucoup de décorum autour des examens avec les amphis, les listes d'appel mais du point de vue interne, un examen ressemble plus à une interrogation en terminale qu'à quelque chose de solennel. C'est un sujet parmi d'autres. »*

## C- Analyse globale des questions et de leur enchaînement

Ici, on inclura les résultats de la seconde partie des entretiens menés avec les deux enseignants. Ils nous apporteront une vision différente et enrichiront notre étude sans remplacer l'analyse que nous avions menée avant de les rencontrer.

Avant de mener ces deux entretiens, nous pensions que MM Lavaurs et Caldero avaient conçu le sujet ensemble mais il s'est avéré que c'est P. Caldero qui avait en charge la partie arithmétique du problème. *« On s'était partagé le travail, les exercices d'arithmétique, c'est Philippe Caldero qui les a écrits »* précise P. Lavaurs. Dans toute cette partie, on ne fera référence quasiment qu'à l'entretien eu avec Philippe Caldero, Pierre Lavaurs ayant seulement assuré la relecture globale du sujet. Il considère, pour sa part, que la construction du sujet repose sur la volonté de proposer un exercice proche de ce qui a été fait en TD *« Comment on construit ? On prend les feuilles de TD et on fait un exercice qui est absolument assimilable aux exercices posés dans la feuille de TD, en recollant des questions qui ont été posées dans des exercices différents. C'est vraiment veiller à ce que l'exercice soit absolument semblable à quelque chose qui existe déjà sur la feuille qui a été traitée en TD dans tous les groupes. »*

### a) Choix de la présentation sous forme d'un système de congruences

Il nous a semblé essentiel de chercher à savoir pourquoi le sujet proposé préférait, à la forme de présentation plus classique d'une équation diophantienne (sous la forme d'une équation de droite ax+by=c), le système de deux congruences.

Plusieurs hypothèses justifiant ce choix sont envisageables. Premièrement, cette présentation permet, à l'image du programme de TS spécialité mathématiques, de mettre en valeur l'outil « congruences » *(cf. Annexe 1)*. Deuxièmement, cette forme illustre le lien entre l'arithmétique et le travail algébrique dans les Z/nZ. Elle le rend très visible. Troisièmement, elle permet d'inscrire ce problème dans le cadre général du phénomène de linéarité. Ainsi le but profond de P. Caldero était vraiment de créer un lien très fort avec la notion de linéarité *« c'est cette notion qu'ils doivent avoir, qu'une certaine partie des mathématiques se suffit de la linéarité. Une fois qu'on a compris un certain nombre de petites choses de la linéarité, après on les retrouve dans des domaines aussi différents que l'analyse, les équations différentielles. »*. Il ne se reconnaît pas dans l'hypothèse concernant la volonté de valoriser le travail algébrique *« Ce n'est pas du tout comme ça que j'ai pensé. Cela aurait pu être pensé comme ça mais cela n'était pas mon idée. Je crois que l'idée directrice se centre dans la théorie générale de la linéarité. »*. Même si les intentions du concepteur du sujet étaient différentes, l'importance qui a été mise, dans le cours au moins, sur le lien entre la résolution d'équation sous forme de congruence et le travail dans les Z/pZ aura probablement un impact sur la manière qu'auront les étudiants d'aborder le sujet. Enfin, cette présentation permet d'extraire le problème d'un contexte géométrique caractérisé par la présentation sous la forme d'une équation de droite ce que valide P. Caldero dans un mail visant à compléter l'entretien. *« Je voulais juste apporter une précision sur les façons de résoudre le problème des restes chinois. Il y a deux façons de faire instructives : la linéarité avec la solution particulière et générale et la façon plus géométrique avec la recherche des points entiers d'une droite d'équation ax+by=c. Une droite est donnée par un point et un vecteur directeur. Le point correspond à la solution particulière donnée par l'algorithme d'Euclide et sa relation de Bézout, le vecteur directeur est donné par (-b, a). Mais alors que dans R tous les vecteurs directeurs se valent, dans Z, qui n'est plus un corps mais un anneau principal, il n'y a, au signe près, qu'un vecteur minimal qui fournit tous les points entiers de la droite à partir d'un point particulier.»*.

### b) Enchaînement des questions

A la lecture du sujet, on se rend compte que la partie existence est séparée en deux par la question sur l'unicité. Cette question est totalement indépendante de la question 1) et de la question 3) et il nous semblait plus logique de la mettre après la question 3) pour faire le lien entre les deux questions touchant à l'existence et à la construction des solutions du système.

P. Caldero a éclairci ce point en distinguant deux types de questions. Pour lui, les deux premières questions sont des applications directes du cours qui permettent aux étudiants qui ont travaillé d'avoir des points à l'exercice *« le 1) c'est vraiment une relation de Bézout, bien sûr, parce qu'ils ont vu la relation de Bézout, et ça leur donne des points. Ce qui est important est de mettre une première question où ils seront à l'aise, et où ils savent qu'ils vont avoir des points. » et « Le 1) et le 2) sont pratiquement des questions de cours. Donc le 1), je veux qu'ils sachent le faire parce que je leur ai dit « faut savoir le faire ». Le 2), c'est une pure application du lemme de Gauss ou sans même parler de Gauss, on peut parler juste de PPCM. »* Les deux dernières questions lui permettent de *« départager ceux qui ont lu le cours, qui ont essayé d'apprendre, de ceux qui ont ce petit plus de savoir-faire »*. Puis les questions 3) et 4) vont ensemble parce qu'elles demandent plus de réflexion et de savoir-faire que les deux premières. L'idée directrice reste quand même d'inscrire ce problème dans le cadre du phénomène de linéarité : *« Dans la linéarité, on cherche en quelque sorte des bases, même si les bases, ils n'en sont pas encore là. Ici, quand on va chercher des solutions de n est congru à $n_0$ et n congru à $m_0$ modulo des nombres, on va se ramener, en fait, aux solutions (1,0) et (0,1) et ensuite, on fera une Z-linéarité par rapport à ces solutions là. C'est ça l'idée même si là pour la solution n=0, dans un certain monde, on va devoir utiliser un déterminant, et là on utilise Gauss. Bien sûr les techniques changent. « Quel est l'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 » sert à leur faire résoudre le cas 0 qui va donc être la solution générale. Alors, je propose une méthode. Le 1) c'est Bézout. Après le 2), c'est bien sûr le lemme de Gauss, et en parallèle, on a déjà la solution pour (0,0), la solution de l'équation générale associée sans second membre. Après, trouver un entier $n_0$ multiple de 16 qui vérifie par ailleurs $n_0$ congru à 1, c'est l'idée de la base (1,0) finalement. Si on avait plus de temps, évidemment, j'aurais fait un truc un peu plus gros que 3, 0, et j'aurais fait une question pour la solution du membre de droite égal à (1,0), et pour le membre de gauche égal (0,1) pour qu'ensuite ils fassent une combinaison linéaire des deux, afin de leur montrer :*

*« regardez, vous êtes devant un problème de type linéaire ». Cela rappelle l'algèbre linéaire. »*

## D- Elaboration d'une grille d'analyse pour l'étude des copies

### a) Construction plus précise des questions

Dans cette partie, deux questions dominent : le choix du coefficient 0 et la formulation très vague de la question 4. Cette question demande un gros effort de synthèse de la part de l'étudiant et se différencie vraiment des trois autres par l'absence d'indications précises pour permettre sa résolution. Ces deux points ont été traités au cours de l'entretien avec P. Caldero.

Dès le départ, le choix du 0 nous est apparu significatif. Plusieurs raisons sont susceptibles d'éclairer ce choix. Une première raison est en accord avec notre hypothèse concernant la mise en valeur du travail algébrique. Le choix du zéro prend son sens dans le fait que sans ce choix, cette méthode de résolution dans les Z/pZ n'est pas sérieusement envisageable. Elle est possible mais compliquée et moins efficace que l'utilisation du théorème de Gauss. La position du 0 est elle aussi cruciale car 7 est premier, à la différence de 16, ce qui permet directement le travail dans le Z/7Z en se ramenant à une congruence de même forme que celle que l'on trouve dans le premier exemple du cours et dans l'exercice 19 question a) du TD. La deuxième raison s'inscrit dans le cadre de la linéarité. Pour P. Caldero, cette volonté de faire un parallèle avec la linéarité se traduit clairement dans ce choix de coefficient nul *« Si je veux garder l'objectif de la linéarité, je suis obligé de poser les questions (1,0) et (0,1) mais ce sont deux questions redondantes et on n'a que deux heures. Je n'ai pas envie de perdre des points sur un truc dont je sais que si il ne sait pas faire l'un, il ne sait pas faire l'autre. En conséquent, il me semblait suffisant de mettre (3,0) et cela me permettait d'être optimal entre un exercice intéressant mêlant l'arithmétique et la linéarité et toutes les notions. Je veux que chaque question soit rentabilisée. »*

La question 4) est celle qui différencie le plus le sujet de baccalauréat, du sujet universitaire car elle demande de faire le lien avec les questions précédentes pour ne pas tout redémontrer, et de synthétiser les résultats obtenus. P. Caldero le sait *« Donc ça c'est le niveau supérieur de l'exercice pour voir un peu les meilleurs parce que là, il n'y en a plus beaucoup qui restent, même si c'est très facile. »*

### b) Elaboration d’une grille d’analyse

Dans cette partie, on va essayer, à travers une analyse précise de chaque question d’élaborer une grille d’analyse des copies permettant de synthétiser l’ensemble des résultats obtenus ici et tous les renseignements collectés dans les parties précédentes afin de nous aider à résoudre notre problématique initiale. Nous avons choisi de conserver pour le moment l’ordre des questions proposées même si nous les regrouperons de manière différente dans les grilles d’analyse.

***Question 1: « montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux, et écrire une relation de Bézout associée. »***

Dans cette première question, 3 méthodes sont possibles pour montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux *(cf. Annexe 2)*

On peut utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers, un argument du style : 7 et premier et 7 ne divise pas 16 ou encore l’algorithme d’Euclide. On peut penser que les étudiants qui ont suivi la spécialité mathématique en TS penseront plus facilement que les autres à l’algorithme d’Euclide. En effet dans le programme officiel, les notions de nombres premiers entre eux et d’algorithme d’Euclide sont étroitement liées. Pour les autres, aucune méthode ne semble avoir été privilégiée dans le cours. Nulle part, on ne dit explicitement, pour montrer que deux nombres sont premiers entre eux, il faut utiliser telle ou telle méthode.

On remarque tout de même que pour Philippe Caldero, la méthode naturelle semble ici être celle utilisant l’algorithme d’Euclide ce qui est compréhensible au regard de la deuxième partie de la question. Toutes les méthodes sont aussi efficaces et de mises en œuvre aussi faciles mais celle utilisant l’algorithme d’Euclide est, en effet, plus judicieuse. On peut ainsi faire l’hypothèse que les étudiants ayant utilisé l’algorithme d’Euclide seront plus à même de trouver la relation de Bézout. Il ne reste qu’à remonter les calculs. Les autres seront de toute façon obligés d’écrire cet algorithme pour trouver la relation demandée ou de chercher une solution à la main. La remontée de l’algorithme d’Euclide est une question classique et a été vue en cours.

On remarque que cette question apparaît de manière similaire dans le sujet de bac, aux questions 1) et 3)a). Les étudiants issus d’une TS spécialité mathématiques sont familiers avec ce type de problème.

***Question 2 : « Quel est l'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 ? »***

Dans cette question, deux méthodes de résolution sont possibles *(cf. Annexe 2).* Elles sont d'ailleurs toutes les deux citées par Philippe Caldero *« Le 2), c'est une pure application du lemme de Gauss ou de dire, à la fois multiples de 7 et de 16, c'est multiple du PPCM. C'est multiple de a et de b si et seulement si c'est multiple du PPCM. Donc, sans même parler de Gauss, on peut juste parler de PPCM. C'est même mieux de le voir comme ça. »* Il indique ici sa préférence pour la méthode utilisant le PPCM.

Le PPCM est habituellement une notion qui est supplantée par celle de PGCD, le PPCM étant moins utilisé. Il est toutefois explicitement au programme de TS spécialité mathématiques est sera donc bien connu des étudiants titulaires de ce bac. Le fait que les entiers à la fois multiples de 7 et 16 soient les entiers multiples du PPCM résulte d'un théorème du cours. Cette relation PPCM / PGCD / produit des deux entiers n'apparaît pas explicitement dans le programme officiel de la spécialité maths. Même si elle a pu être énoncée par le professeur en TS (notamment lors de l'introduction du PPCM où rien n'est précisé), on ne peut pas considérer que cette notion ait été nécessairement transmise aux étudiants issus de ce bac. Les deux profils pourraient donc se recouper sur cette question. Dans le cadre de cette première méthode, ce point est fondamental pour une bonne justification de la réponse à la question 2) mais certains étudiants risquent de citer uniquement le fait que le PGCD soit égal à 1 sans préciser clairement qu'ils utilisent cette relation.

La deuxième méthode revient à utiliser le théorème de Gauss. On se retrouve avec une équation diophantienne dont le coefficient « c » est nul. Cette méthode fait appel à des réflexes instaurés en Terminale S spécialité mathématiques. On peut faire l'hypothèse que les étudiants issus de ce bac y auront plus facilement recours que les autres.

On remarque dans cette question, traitant l'unicité à une congruence près, que la présentation est ici tout à fait différente de celle du sujet de bac. Dans l'exercice de bac, deux équivalences successives conduisent l'élève à ramener la résolution du système proposé à la résolution de la congruence, $n \equiv n_0 (12 \times 19)$ où $n_0$ est une solution particulière. Le fait que la solution générale soit un multiple du PPCM est totalement caché. La démonstration de ce fait n'est pas à la charge de l'élève de manière explicite. De plus, c'est dans cette partie du sujet de bac que le théorème de Gauss est utilisé.

Là encore, cette question reflète la volonté des concepteurs du sujet de ne pas trop s'appuyer sur le théorème de Gauss, en accord avec le cours qui ne valorise pas ce théorème.

***Question 3 : En vous aidant de la relation de Bézout, trouver un entier*** $n_0$ ***multiple de 16 qui vérifie par ailleurs*** $n_0 \equiv 1$ [7]. ***En déduire une solution du système (E). »***

On recherche ici une solution particulière du système (E') $\begin{cases} n_0 \equiv 1 \ (7) \\ n_0 \equiv 0 \ (16) \end{cases}$, soit le premier élément de la base décrite par P. Caldero. Toutefois la formulation de la question, qui ne présente pas $n_0 \equiv 0 \ (16)$ mais comme un multiple de 16 peut entraîner l'étudiant à écrire $n_0 = 16k$ puis à remplacer dans la première congruence ce qui donne ensuite deux méthodes possibles menant à la solution : soit il résout dans Z/7Z, soit il exprime la congruence en terme de division euclidienne *(cf. Annexe 2).*

Ces deux méthodes nécessitent la relation de Bézout et ont été étudiées en cours, la première sous le titre de solution outillée et la seconde sous le titre de solution à la main. On repère aussi la question a) de l'exercice 19 du TD qui propose la résolution d'une congruence de même nature. L'utilisation de Bézout est ordonnée par l'énoncé et n'est donc pas à la charge de l'élève. Ce qui relève de son autonomie c'est vraiment le fait de savoir comment l'utiliser et à quel moment. Selon la méthode choisie, la relation de Bézout ne sert pas de la même manière. Si l'élève choisit de travailler dans Z/7Z, la relation lui servira à trouver l'inverse qui intervient dans cette méthode. Plusieurs exemples ont été traités en cours et cette utilisation de Bézout est mise en valeur. Si l'élève choisit la méthode où il traduit la première congruence du système après y avoir injecté le $n_0$ comme multiple de 16k, il lui faut seulement adapter les coefficients de la relation pour trouver une solution. Si l'étudiant ne voit pas qu'il lui suffit juste d'adapter les coefficients trouvés à la question 1, il risque de proposer une autre relation de Bézout et de perdre les bénéfices du travail effectué au début de l'exercice. Cette méthode peut sembler plus naturelle ou même plus automatique à des étudiants issus de la spécialité mathématiques. En effet, le passage « congruence / division euclidienne » est une des bases de l'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité maths. De plus, la notion algébriste de Z/nZ est totalement nouvelle pour eux ce qui lui donne peut-être moins de force. Pour les autres, la première méthode aura peut-être plus de poids au vu du cours qu'ils ont reçu même si l'intervention de Philippe Caldero nous oblige à plus nuancer ce point étant donné qu'il n'avait pas du tout pensé à cette possibilité de se ramener à un travail dans Z/7Z.

A la fin de la première partie de la question l'étudiant doit veiller à revenir à $n_0$ une fois que le « k » ou les « $k_i$ » ont été trouvés. En effet, l'utilisation de la relation de Bézout donne à l'étudiant la valeur du k de $n_0 = 16k$ pour la première méthode et de deux $k_i$ pour la deuxième méthode. Il faut donc que l'élève repasse au $n_0$ pour répondre correctement à la question. On peut penser que les étudiants ayant opté pour la première méthode n'ont pas de problème mais il faut que ceux ayant préféré la deuxième soient vigilants dans le choix du $k_i$ lorsqu'ils remplacent.

Pour la deuxième partie de la question, il suffit simplement de multiplier une congruence par un k dans Z et faire le lien entre (E) et (E'). Ce point fait intervenir un résultat précis du cours :

$$\boxed{\text{Soit } n \geq 1 \text{ fixé et soient } a, b, c \text{ trois entiers relatifs. Alors si } \quad a \equiv b \ [n] \quad \text{alors} \quad ac \equiv bc \ [n]}$$

D'après le cours de l'étudiant, ce résultat a été démontré pendant le cours en exercice. Une fois que l'étudiant comprend que $3n_0$ est une solution particulière de (E), il répond totalement à la question.

On peut enfin remarquer que « en déduire » indique qu'il faille utiliser ce qu'on a fait avant concernant la recherche de la solution du système (E') mais que certains risquent de chercher des solutions à la main surtout s'ils n'ont pas réussi à trouver une solution particulière de (E') ou s'ils ne font pas le lien entre (E) et (E').

***Question 4 : « Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E). »***

Une grande liberté est laissée pour la résolution de cette question. C'est cette question qui différencie fondamentalement le sujet de bac du sujet universitaire. Dans le sujet de bac, chaque question est guidée et ne laisse pas de place à l'élaboration d'une méthode de résolution. L'élève n'a pas à réfléchir sur le sens de la question et sur le pourquoi de la question, il doit juste essayer d'appliquer les bonnes méthodes de résolutions spécifiques à des tâches bien précises (appliquer l'algorithme d'Euclide, démontrer une équivalence) En forçant un peu le trait, on peut dire qu'un élève qui n'a compris le sujet de bac que superficiellement est quand même capable de résoudre entièrement l'exercice car son autonomie est de l'ordre de l'application pure de connaissances ou de méthodes simples et vues en cours. Aucune place n'est laissée à la conduite d'un raisonnement ou à l'imagination d'une méthode de résolution. Au contraire dans le sujet universitaire, il est impossible de répondre correctement à la dernière question si on ne comprend pas le problème en jeu. L'étudiant doit fournir un réel travail de synthèse. Dans les trois premières questions, l'énoncé impose à l'étudiant la résolution d'un problème précis et lui demande de mettre en œuvre des techniques familières, souvent vues en cours (algorithme d'Euclide, PPCM). On est alors très poche des questions du sujet de bac. Cette dernière question est tout à fait différente. On ne peut pas la traiter indépendamment des précédentes et il faut avoir compris la logique de l'exercice et le raisonnement en jeu pour la réussir. La seule indication donnée aux étudiants concerne l'importance des deux questions précédentes mais rien n'indique la façon dont elles doivent être utilisées. Il n'y a pas une méthode à appliquer. Deux démarches principales mènent à la solution *(cf. Annexe 2)* de manière directe et en utilisant les questions précédentes. Cependant, d'autres démarches plus maladroites sont possibles à ce niveau et doivent être prises en considération. S'il ne parvient pas à synthétiser les résultats obtenus dans les questions précédentes, l'étudiant, surtout s'il est issu d'une terminale S spécialité mathématiques, risque d'effectuer un retour à l'automatisme du théorème de Gauss, à la tâche « routinière » de TS concernant la résolution d'équations diophantiennes. En effet, s'il traduit sous la forme de divisions euclidiennes les deux relations qu'il obtient, il risque de perdre tout l'avantage du travail réalisé à la question 2) et à la question 3), à savoir qu'il connaît déjà la solution particulière et la solution générale et qu'il ne lui reste donc plus qu'à sommer les deux.

Toutes ces considérations nous amène à élaborer une grille d'analyse des copies en prenant en compte certains critères. L'enchaînement des questions proposé suivait un ordre de difficulté croissant mais il nous a semblé plus cohérent, d'un point de vue mathématique, de traiter ensemble les questions 1 et 3 qui permettent de résoudre le problème de l'existence des solutions. Ainsi, dans la première grille nous traiterons l'existence, dans une deuxième grille, nous traiterons l'unicité et dans une troisième, la question 4 qui est un peu la question bilan de l'exercice. Ces grilles sont jointes en annexe *(cf. Annexe 4).*

## 4- Synthèse des hypothèses de travail effectuées

D'un point de vue mathématique, on a vu que l'exercice proposé avait un réel intérêt et permettait aux étudiants d'avoir un premier aperçu du théorème chinois. C'est aussi un choix de sujet permettant d'interroger les étudiants sur toutes les notions clés du programme d’arithmétique en L1, à savoir, le théorème de Bézout, le théorème de Gauss et l’algorithme d’Euclide. Enfin, il permet de mettre en valeur la passerelle naturelle entre algèbre et arithmétique.

Cependant, ce qu’il faut retenir principalement de notre analyse a priori est la spécificité du sujet qui permet, assez naturellement, de séparer les étudiants en deux groupes bien distincts selon qu’ils soient ou pas issus d’un bac S spécialité mathématiques. La résolution d’une équation diophantienne, les trois premières questions du sujet universitaire font appel à des connaissances transmises en terminale S spécialité mathématiques. La suite de notre étude devra donc déterminer si les étudiants détenteurs d’un bac S spécialité mathématiques seront avantagés et plus à l’aise avec ces notions ou si au contraire ils seront tentés de se rassurer en ramenant le problème posé à la résolution classique d’équation diophantienne abordée en terminale. Les réflexes acquis en vue de la résolution de ce type de problèmes peuvent les conduire à ne pas intégrer les nouvelles approches spécifiques à la L1, comme le travail dans les Z/pZ ou l’illustration de l’omniprésence du phénomène de linéarité en mathématiques. On cherchera aussi à voir si, sur les questions qualifiées de cours par P. Caldero, ils sont plus à l’aise. Cela devrait être le cas étant donné que les deux, voire trois, questions en jeu sont typiques du genre de problème posé au bac et apparaissent explicitement dans le programme officiel de cette classe. Pour les autres, il sera intéressant d’étudier l’impact du cours qu’ils ont reçu, notamment par rapport à la résolution choisie à la question 3. Il paraîtrait cohérent qu’ils adoptent une résolution plus algébrique. Pour tous, on verra si ils ont eu conscience du phénomène de linéarité qui a guidé la construction du problème. On se demandera si cette observation les a aidés à résoudre la dernière question. Finalement, c’est sur cette dernière question que nous allons nous pencher en priorité. Elle est emblématique de la différence de fond entre l’enseignement secondaire et l’enseignement supérieur. Les capacités de raisonnement et de synthèse demandées par cette question sont spécifiques à l’enseignement post-bac et risquent de déstabiliser les étudiants les plus fragiles. C’est ici qu’il faut chercher certaines des raisons au fort taux d’échec en première année d’université. Ces observations devront nous aider à mieux appréhender cette transition lycée-université.

# PARTIE II : Analyse des copies

Dans cette deuxième partie, nous menons une analyse sur 73 copies d'étudiants de L1 qui se sont penchés sur l'exercice étudié. Cette analyse utilise les grilles construites dans le cadre de l'analyse didactique effectuée dans notre première partie. Les grilles ont été remplies pendant la lecture des copies. A l'issue de notre analyse a priori, trois grandes questions se posent : la diversité des méthodes de résolution évoquée dans l'analyse a priori est-elle représentée dans les copies ? Comment les élèves gèrent-ils l'autonomie dévolue à la résolution de la question 4 ? Quelles sont les particularités propres aux deux profils considérés ? La prise en compte des deux populations d'étudiants selon le bac obtenu s'effectuera tout au long de cette partie.

Après avoir présenté notre corpus de copies et pour tâcher de répondre à ces trois questions, nous nous pencherons tout d'abord sur l'analyse des trois premières questions de l'exercice. Puis, nous analyserons le comportement des étudiants face à l'autonomie dévolue à la question 4.

## *1- Description du corpus de copies*

Dans cette partie, on présente la composition de notre corpus de copies. On donne ensuite un aperçu statistique et global du sujet.

### A- Composition du corpus de copies

Nous disposons d'un corpus de 73 copies. Parmi elles, 30 sont rédigées par des étudiants issus d'un bac S spécialité mathématiques (pour faciliter la lecture, ils seront dans la suite dénommés Smaths). Les 43 étudiants restants (dénommés NonSmaths) viennent de différents bacs :

| Bac | option | spécialité | nombre d'étudiants (43) |
|---|---|---|---|
| S | SVT | physique - chimie | 5 |
| | | SVT | 9 |
| | STI | / | 17 |
| STI | Génie électrique | / | 3 |
| | Génie civil | / | 1 |
| | Génie mécanique opt. A prod. Meca | / | 2 |
| | Génie electrotechnique | / | 1 |
| STT | gestion | / | 1 |
| ES | mathématiques | / | 1 |
| Bac étranger | / | / | 3 |

On a une bonne représentation des deux groupes considérés.

### B- Traitement global de l'exercice

On dispose d'un nombre important de copies, 73, ce qui nous permet de faire quelques remarques d'ordre statistique. L'exercice 2, dans son intégralité est absent de 4 copies (6%). 18 (25%) s'arrêtent avant la question 3. 36 copies (49 %) n'abordent pas la question 4 et ne répondent donc pas au problème. 14 étudiants (19 %) donnent le bon ensemble solution à cette question 4.

On différencie maintenant les deux profils. Par curiosité, on peut regarder du point de vue de la notation ce qui se passe. Une note prise hors de son contexte n'est pas significative en elle-même mais elle reste l'outil fondamental pour l'évaluation des étudiants.

| Notes | nombre d’étudiants | Smaths | NonSmaths |
|---|---|---|---|
| 0 | 14 | 1 | 13 |
| 0,25 | 1 | 0 | 1 |
| 0,5 | 2 | 0 | 2 |
| 1 | 4 | 1 | 3 |
| 1,5 | 17 | 6 | 11 |
| 2 | 8 | 2 | 6 |
| 2,5 | 7 | 5 | 2 |
| 2,75 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 7 | 5 | 2 |
| 3,25 | 1 | 1 | 0 |
| 3,5 | 4 | 2 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 0 |
| 4,5 | 4 | 4 | 0 |

Le tableau suivant fait un bilan des questions traitées en différenciant les deux profils.

| | Smaths | NonSmaths |
|---|---|---|
| Aucune question traitée | 0 | 4 (9 %) |
| Question 1 traitée | 30 (100 %) | 38 (88 %) |
| Question 2 traitée | 28 (93 %) | 27 (63%) |
| Question 3 traitée | 28 (93 %) | 27 (63 %) |
| Question 4 traitée | 20 (67 %) | 16 (37 %) |
| Toutes les questions sont abordées | 17 (57 %) | 11 (26 %) |

On observe des ressemblances et des différences dans la répartition des étudiants selon le profil considéré. L’évolution du nombre d’étudiants dans chaque question suit sensiblement le même schéma pour les deux profils. Ainsi beaucoup d’étudiants répondent aux trois premières questions même s’ils sont plus nombreux en Smaths. La question qui fait défaut à beaucoup est la question 4 quelque soit le profil. Pour les différences, tous les étudiants de Smaths répondent à la question 1 ce qui n’est pas le cas des étudiants NonSmaths. La différence s’accentue à la question 2 où quasiment tous les Smaths répondent tandis qu’un tiers des NonSmaths ne donne pas de réponses à cette question. La question 4 est plus présente chez les Smaths que chez les autres et on pourra se demander si ces étudiants, qui ont reçu une formation scientifique et qui ont déjà fait de l’arithmétique, sont plus aptes à construire un raisonnement mathématique que les autres. Un peu plus de la moitié des Smaths traitent l’ensemble des questions dont 4 sans aucune erreur. Moins d’un tiers des NonSmaths traitent l’ensemble des quatre questions dont aucun sans erreur.

## 2- Analyse des trois premières questions

On se consacre ici à l'analyse des trois premières questions de l'exercice. Quelles sont les difficultés rencontrées par les étudiants ? A quoi sont-elles dues ? Quelles sont les notions bien exploitées par les étudiants ? Y a-t-il des différences entre les profils ? Les copies traduisent-elles la diversité des méthodes possibles ? Cette partie sera organisée suivant les différentes tâches proposées aux élèves.

### A- Montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux

Montrer que deux nombres sont premiers entre eux semble acquis pour 55 étudiants sur les 64 qui répondent à la question. Les trois méthodes envisagées dans l'analyse a priori sont représentées (on obtient 66 réponses car deux étudiants donnent deux arguments).

| | PGCD (7 ; 16) = 1 | | | Arguments faux pour montrer : PGCD (7 ; 16) = 1 |
|---|---|---|---|---|
| | Décomposition en produit de facteurs premiers | 7 est premier et ne divise pas 16 | Algorithme d'Euclide | |
| Nb de copies | 6 | 11 | 38 | 11 |

La méthode la plus judicieuse en vue de la suite, celle utilisant l'algorithme d'Euclide, est aussi la plus choisie. L'algorithme d'Euclide est mentionné, à un moment ou un autre, dans 48 copies même si c'est parfois de façon imprécise.

Quelles sont les erreurs rencontrées dans la réalisation de cet algorithme ?
10 étudiants donnent des arguments faux ou incomplets pour cette tâche. La copie 72 donne un argument juste (à savoir l'algorithme d'Euclide) et un argument incomplet. Dans cinq copies (7, 17, 34, 43 et 65), l'importance est mise sur l'utilisation de la division euclidienne et même de la division tout court. Les copies 45 et 70 produisent des lignes de calcul rappelant dans l'idée l'algorithme d'Euclide mais ne semblent en retenir qu'un élément significatif : le 1. Ils savent qu'ils doivent trouver le PGCD égal à 1 et savent qu'il y a un lien avec l'algorithme d'Euclide mais ils ne parviennent pas à effectuer cet algorithme. Cette importance du 1 est aussi très visible dans les copies car beaucoup d'étudiants (17 copies) le mettent en valeur en l'encadrant, le soulignant. La copie 27 donne une congruence fausse.

Le tableau suivant présente les différents arguments erronés rencontrés (il correspond à la quatrième colonne de notre grille d'analyse concernant cette tâche, cf. annexe 2) :

| N° de la copie | Arguments faux pour montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux |
|---|---|
| 7 | La division de 16 par 7 et celle de 7 par 16 ne donnant pas comme résultat un entier, 7 et 16 sont donc premiers entre eux |
| 17 | 7 et 16 sont premiers entre eux car $\begin{array}{r\|l} 16 & 7 \\ \hline & 2{,}22846 \end{array}$ et $\begin{array}{r\|l} 7 & 16 \\ \hline & 0{,}18439 \end{array}$ |
| 27 | $16 \equiv 1\ [7]$ |
| 34 | $\begin{array}{r\|l} 16 & 7 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$ $1 = 2 + 2\times 7$ <br> $1 = 2\times 8$ Donc 7 et 16 sont premiers entre eux |
| 43 | $\frac{7}{0+n}$ où $n$ est un entier$\in [1;+\infty[$ à pour première solution $n$=7 si l'on souhaite obtenir un entier. Donc 7 est bien premier. <br> $\frac{16}{0+n}$ où $n$ est un entier$\in [1;+\infty[$ à pour première solution $n$=16 si l'on souhaite obtenir un entier. Donc 16 est bien premier. |
| 45 | $16 = 2\times 7 + 2$ <br> $7 = 1\times 6 + 1$ $\Rightarrow$ Donc 7 et 16 sont premiers entre eux |
| 65 | Le reste de la division euclidienne de 16 par 7 est 1 donc 7 et 16 sont premiers entre eux (théorème de Bézout) |
| 70 | On peut écrire 7 comme $7 = 3\times 2 + 1$ <br> On peut écrire 16 comme $16 = 3\times 5 + 1$ Donc 7 et 16 sont premiers entre eux |

Toujours pour l'algorithme d'Euclide, 4 copies donnent une troisième ligne fausse, à savoir $3 = 2\times 1 + 1$, 10 ne donnent pas la dernière ligne faisant apparaître le reste nul. Bien que ces erreurs n'aient pas de conséquence néfaste sur leurs réponses, elles montrent que la restitution de l'algorithme par les étudiants comporte beaucoup d'imprécisions.

2 copies (71 et 72) donnent un argument incomplet : 7 est premier donc 7 et 16 sont premiers entre eux. Il leur manque la moitié de l'argument c'est-à-dire 7 est premier **et** 7 ne divise pas 16.

Distinguons à présent les étudiants selon les profils envisagés.

On voit dans le tableau qui suit la répartition des étudiants suivant leurs réponses.

| | Smaths | NonSmaths |
|---|---|---|
| Algorithme d'Euclide | 21 | 17 |
| Décomposition | 3 | 3 |
| $3^{ème}$ argument | 3 | 8 |
| Arguments faux ou incomplets | 4 | 5 |

Seuls trois étudiants Smaths (copies 27, 38 et 65) ne parviennent pas à donner d'arguments corrects pour montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux. 72 donne un argument incomplet. On peut penser, au regard de la méthode la plus largement choisie pour résoudre cette première partie de la question, que ces notions étaient déjà acquises ou en cours d'acquisition avant la L1 car 21 Smaths utilisent l'algorithme d'Euclide sur les 27 (soit 78 %) qui donnent un argument correct. Les NonSmaths qui répondent correctement à la question ne sont que 61 % à choisir l'algorithme d'Euclide.

## B- Remontée de l'algorithme d'Euclide pour trouver une relation de Bézout

Concernant la relation de Bézout et plus particulièrement la remontée de l'algorithme d'Euclide pour la trouver, il est intéressant de constater que cette méthode vue en cours et probablement en TD, réapparaît dans beaucoup de copies (44 copies). On a 21 étudiants qui n'en proposent pas.

| | Relation de Bézout associée à 7 et 16 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Relation trouvée, question 1 | | Relation trouvée, question 3 | | Relation fausse |
| | Avec Euclide | A la main | Avec Euclide | A la main | Euclide tenté |
| Nb de copies | 36 | 1 | 6 | 2 | 2 |

On remarque qu'effectuer l'algorithme d'Euclide pour calculer un PGCD n'est pas naturel pour 8 étudiants qui donnent une relation de Bézout seulement à la question 3 en utilisant pourtant l'algorithme. Pour eux, seul le lien « Bézout - Algorithme d'Euclide » est exploité ce qui les empêche de répondre à la question 1 totalement.
Au contraire, 3 étudiants ont effectué l'algorithme d'Euclide entre 7 et 16 à la question 1 mais ne trouvent pas de relation de Bézout. Ceux-ci ont fait le lien « premiers entre eux – Algorithme d'Euclide » mais pas « Bézout - Algorithme d'Euclide ».

Concernant les erreurs, 4 copies (18, 20, 45, 67) témoignent d'imprécisions dans l'apprentissage de la notion « relation de Bézout » : les copies 18 et 67 semblent se rappeler que l'on doit avoir le second membre égal au PGCD mais la copie 18 ne relie pas 7 et 16 et la copie 67 donne une absurdité ; les copies 20 et 45 mettent en avant le lien avec l'algorithme d'Euclide sans le connaître précisément.

| N° de la copie | Relation de Bézout associée à 7 et 16 | |
|---|---|---|
| | Relation fausse | |
| | Relation trouvée | Euclide tenté ? |
| 18 | 8-7 = 1 | non |
| 20 | $2 = 16 - 7 \times 2$ | non |
| 45 | $16 = (1 \times 6 + 1) \times 2 + 2$ | oui |
| 67 | $1 = 7 - 3 \times 16$ | non |

2 étudiants trouvent une relation de Bézout fausse à cause d'erreurs de calcul dans la remontée de l'algorithme d'Euclide :

| N° de la copie | Relation de Bézout associée à 7 et 16 | |
|---|---|---|
| | Relation fausse | |
| | Relation trouvée | Euclide tenté ? |
| 10 | $16 \times (-2) + 7 \times (-5)$ | oui |
| 38 | $7 \times 5 + 16 \times (-3)$ | oui |

Ces deux erreurs n'ont pas de conséquence par la suite car la copie 10 donne à la question 3 une solution particulière trouvée à la main et la copie 38 ne traite que les deux premières questions.

Regardons maintenant de plus près nos deux populations.

| | Smaths | NonSmaths |
|---|---|---|
| Euclide question 1 | 21 | 15 |
| Euclide question 3 | 3 | 3 |
| main question 1 | 0 | 1 |
| main question 3 | 1 | 0 |
| échec | 1 | 5 |
| pas de réponse | 4 | 19 |

24 Smaths ont intégré la technique consistant à remonter l'algorithme d'Euclide contre 18 NonSmaths. Très peu d'étudiants Smaths n'essaient pas de répondre à cette question. On voit dans le tableau ci-après que la plupart des étudiants, quelque soit le profil, ont utilisé la technique d'Euclide quand ils répondent juste. La principale différence étant qu'un tiers de NonSmaths ne répond pas à cette partie de la question.

## C- Ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et 16

Un nombre faible d'étudiants parvient à résoudre cette question proche du cours. Cette question ne nécessite pas de mécanismes automatiques de résolution et n'est pas associée à une tâche précise du cours contrairement aux notions évoquées précédemment ce qui peut expliquer ces constatations.

36 copies donnent le bon ensemble dont un tiers sans aucune justification et un tiers avec une justification correcte.

| | Ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ensemble correct | | | | | |
| | PPCM | | | | gauss | |
| | Sans justif | PGCD = 1 | Relation PGCD/PPCM | Relation et PGCD = 1 | système (linéarité) | 16k=7k' |
| Nb de copies | 12 | 7 | 4 | 11 | 0 | 2 |

Plusieurs erreurs découlent de problèmes liés à la notion d'ensemble. On rappelle que l'ensemble à trouver est $\{112k /\ k \in Z\}$. Premièrement, 3 étudiants ne connaissent pas la forme d'un ensemble. La copie 9 note l'ensemble ($\underline{112k}$). La copie 47 le note 112 [2$k$] ($k \in Z$) et la copie 73 sous la forme de l'intervalle [0,1]. Deuxièmement, on trouve des problèmes par rapport à la nature des nombres en jeu. Les copies 1, 16, 35 et 71 pensent que $k \in N$, la copie 43 pense que $k \in [-1, +\infty[$. On a ensuite des erreurs liées à des confusions entre les notions de multiple et de diviseur. Ainsi, pour les copie 29, 32 et 55, {-1 ;1} ou 1 sont les seuls diviseurs communs de 7 et 16 ce qui est vrai mais il fallait donner l'ensemble des multiples. 10 étudiants se contentent de donner des valeurs de ce qu'ils pensent être des multiples de 7 et 16.

| N° de la copie | Ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 | | |
|---|---|---|---|
| | Ensemble faux | | |
| | Donnée de quelques valeurs | Problème avec la définition de l'ensemble | autre |
| 22 | {-1 ; 1} | | |
| 25 | 1, 2, 3, 7 | | |
| 28 | {-21 ; 21 ; 0 ; 1 ; -1} | | |
| 39 | 1 | | |
| 42 | {0 ; 1} | | |
| 47 | 112 ; 224 (de manière expérimentale) | | |
| 55 | -1 et 1 | | |
| 60 | {1 ; 3 ; 9} | | |
| 67 | {-112 ; 112} | | |
| 73 | M=[0 ; 1] | | |

On voit bien dans ce tableau que la plupart des réponses sont totalement inappropriées car elles se réfèrent de manière plus ou moins explicite et juste aux diviseurs de 7 et 16 et non aux multiples. Les copies 47 et 67 donnent des multiples exacts, à noter que la copie 47 tente de généraliser la forme obtenue des multiples calculés expérimentalement et propose comme ensemble : 112 [2*k*] ( $k \in Z$ ). On peut aussi observer que seules 4 copies du tableau précédent n'essaieront pas de traiter la question 4 alors que leur solution générale est fausse.

On trouve dans la copie 7 une erreur surprenante que nous ne parvenons pas à expliquer : la réponse proposée est « l'ensemble des solutions de $x \times 7^n \times y \times 16^m$ avec $x, y, n, m$ des entiers relatifs ».

La copie 69 fait une erreur purement calculatoire en écrivant que $7 \times 16 = 142$ au lieu de 112. De même pour la copie 54 qui écrit $3 \times 64 = 202$. La copie 54 ne traite pas la question 4. Son erreur est donc sans conséquence sur les autres questions traitées. En revanche, la copie 69 obtiendra un ensemble solution en question 4 faux à cause de cette erreur mais logique : « L'ensemble des solutions de (E) : $\{\forall x \in Z / 142x + 80\}$ ».

En ce qui concerne la notion d'unicité, là encore les Smaths répondent mieux de manière générale. Seuls 4 étudiants de Smaths sur les 28 qui répondent se trompent tandis que 14 étudiants sur les 27 de NonSmaths qui répondent donnent un argument faux.

| | Smaths | NonSmaths |
|---|---|---|
| sans justification | 5 | 7 |
| pgcd=1 | 5 | 2 |
| relation pgcd /ppcm | 3 | 1 |
| relation pgcd /ppcm et pgcd=1 | 10 | 0 |
| th de gauss | 1 | 3 |
| donnée de qqs valeurs | 2 | 8 |
| pb avec def ensemble | 1 | 1 |
| autre | 1 | 5 |

On voit aussi que ce sont majoritairement les Smaths proposent des justifications complètes. Ils semblent aussi plus soucieux de justifier même si les arguments sont parfois incomplets.

## D- Question 3

Enfin, la question 3 permet d'évaluer l'impact de l'enseignement reçu par les étudiants. En effet, la méthode avec le Z/7Z (voir annexe) a été mise en avant comme nous l'avons précisé dans la partie I du mémoire.

| | Solution particulière de $n_{à}$ multiple de 16 et congru à 1 modulo 7 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Travail dans Z/7Z | | Travail sans Z/7Z | | solution à la main |
| | réussite | échec | réussite | échec | |
| Nb de copies | 3 | 1 | 20 | 8 | 14 |

On s'aperçoit que la méthode privilégiée dans le cours n'a été que tentée quatre fois.
Beaucoup d'étudiants, devant la simplicité des coefficients en jeu cherchent une solution à la main. Parmi les étudiants qui ne parviennent pas au bout de la technique sans le Z/7Z, certains donnent tout de même une solution à la main.
Le passage de l'outil congruences à la division euclidienne semble bien maîtrisé (sauf exceptions : On a déjà vu que la copie 23 traduit mal la congruence : $n \equiv 3\ [7] \Rightarrow\ n = 7 + 3x$, on trouve dans la copie 22, $4 \equiv 3\ [7]$ et $4 \equiv 0\ [7]$. Enfin dans la copie 20, il est écrit $16k \equiv 3\ [7] \Rightarrow\ 16 \equiv \frac{3}{\mathrm{k}}\ [7]$.)

A nouveau, on remarque une confusion entre les notions de diviseur et de multiple. Les copies 11 et 62 affirment dans la question 3 que 8 est un multiple de 16. Quatre copies (2, 21, 28, 53) oublient de repasser à $n_0$ quelque soit la méthode de résolution choisie et d'autres se perdent dans leurs notations en traduisant les congruences. Par exemple la copie 25 trouve à la question 1, pour les coefficients de la relation de Bézout « on peut donc voir que x = 7 et y = -3 ». Puis à la question 3, on a alors « $n_0 \equiv 1[7] \Leftrightarrow n_0 = 7x+1$. D'après la première question, on peut dire que x = 7 d'où on peut écrire que $n_0 = 50$. » Dans la copie 58 « on cherche une relation de Bézout par $16k - 7k' = 1$. De l'équation 1, on a donc $k = -3$ et $k' = 7$. $n_0 = k = -3$. Enfin, dans cette question, même si on ne peut pas réellement parler d'erreur de raisonnement, on constate une faiblesse du raisonnement utilisé pour trouver la solution particulière de (E'). En effet, 4 étudiants (copies 9, 12, 32, 35) ne voient pas qu'il suffit d'adapter les coefficients de la relation de Bézout obtenue à la question 1 « $1 = 7\times 7 - 16\times 3$ » pour résoudre l'exercice si on adopte la méthode utilisant le théorème de Gauss (on doit alors trouver une solution particulière de $1 = 16\times k_1 - 7\times k_2$ ). Ils cherchent donc une solution à la main en testant, à notre avis, les valeurs entières positives de $k_1$ les unes après les autres car la solution qu'ils obtiennent est $n_O = 64$. A l'image de cette question, on se rend compte que localement et sur des points précis, la structuration de l'énoncé met en échec des étudiants et engendre des difficultés.

Affinons le tableau proposé précédemment en distinguant les différents profils :

| | Solution particulière de $n_0$ multiple de 16 et congru à 1 modulo 7 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Travail dans Z/7Z | | Travail sans Z/7Z | | solution à la main |
| | réussite | échec | réussite | échec | |
| Nb de copies | 3 | 1 | 20 | 8 | 14 |
| Smaths | 1 | 0 | 15 | 3 | 5 |
| NonSmaths | 2 | 1 | 5 | 5 | 9 |

En proportion, on a plus de NonSmaths qui ont essayé la méthode avec le Z/7Z mais le nombre très faible de copies incite à la prudence en ce qui concerne le coté statistique. Les réflexes de Terminale diminuent certainement le poids de cette méthode pour les Smaths. Il faut tout de même préciser que l'étudiant de Smaths qui l'utilise la réussit.

## E- Synhtèse

Ces trois premières questions nous permettent de commencer à répondre à nos hypothèses.

L'analyse de la résolution des ces questions dans les copies montre une grande diversité dans le choix des arguments et des méthodes. Toutes les méthodes que nous avions imaginées pour résoudre les questions dans l'analyse a priori se retrouvent effectivement dans les copies. Le moindre espace de liberté est exploité par les étudiants. Les étudiants ont, pour la plus grande part, suivi les questions de l'énoncé mais ils n'ont pas toujours opté pour la méthode pensée par le concepteur du sujet ou qui semble la plus naturelle au regard de l'enseignement reçu. Ainsi, le travail dans le Z/7Z ne réapparaît pas beaucoup dans les copies alors que cela semblait être une idée forte du cours de P. Lavaurs. Le travail sans le Z/7Z, qui correspond à la tâche routinière classique de la résolution d'équations diophantiennes, a plus de poids pour la majorité des étudiants. Il semble que seules les applications directes du cours, comme remonter l'algorithme d'Euclide pour trouver une relation de Bézout ou montrer que deux nombres sont premiers entre eux, soient associées par les étudiants à des méthodes de résolution plus précises et on trouve alors d'autres méthodes mais de façon plus marginale. Par exemple, sur les 55 arguments corrects montrant que 7 et 16 sont premiers entre eux, 38 (soit 69 %) utilisent l'algorithme d'Euclide.

Au niveau des erreurs rencontrées dans ces questions, on s'aperçoit que les erreurs d'ordre calculatoire sont rares. Les erreurs de raisonnement, c'est-à-dire des erreurs dues à des arguments incomplets, faux ne sont pas non plus conséquentes d'un point de vue qualitatif ce qui peut s'expliquer par le fait que les questions concernées par l'étude précédente faisaient appel à des raisonnements connus et souvent classiques. Dans ces trois questions, on trouve beaucoup d'erreurs liées à des imprécisions au niveau du cours ou à des problèmes liés aux outils mathématiques en jeu.

Si on se penche plus précisément sur les deux populations en jeu, on se rend compte que les Smaths font peu d'erreurs lorsqu'il s'agit de manipuler les notions ou applications classiques du cours en jeu. C'est la deuxième fois qu'ils voient les notions d'algorithme d'Euclide, de PGCD, PPCM, de relation de Bézout. De manière générale, on peut donc dire qu'à l'issue du semestre les connaissances en arithmétiques ne paraissent pas acquises de la même manière selon le profil considéré. Ainsi les Smaths restituent correctement la plupart des notions principales en jeu dans l'exercice et connaissent plutôt bien les techniques de résolution pour des tâches précises. Le bilan est plus mitigé pour les étudiants issus d'autres bacs. Leurs connaissances en arithmétique semblent fragiles. Dès qu'une question porte sur l'exploitation de l'enseignement reçu de manière plus singulière ou moins classique, on est confronté à une désertion des NonSmaths et à des justifications incomplètes, imprécises, inachevées.

## *3- Les étudiants face à l'autonomie dévolue à la question 4*

Cette question, de par le travail de synthèse à fournir, différencie fondamentalement le sujet de bac du sujet universitaire et est très caractéristique de ce qu'on attend d'un étudiant en mathématiques.

Avant de se pencher précisément sur les différents types de copies que l'on observe dans cette question, nous allons regarder de plus près le cas des trois étudiants qui s'affranchissent de la structure de l'énoncé pour résoudre le problème. Ils ne s'appuient pas sur les trois premières questions pour résoudre le problème posé.

### A- Les étudiants qui s'affranchissent de la structure de l'énoncé

Trois étudiants (copies 2, 25 et 53) ne suivent pas l'ordre des questions et essaient très vite de retomber sur la résolution classique d'une équation diophantienne. Ils n'hésitent pas à sortir du cadre établi par le concepteur du sujet pour proposer une méthode de résolution différente. La méthode qu'ils proposent s'appuie sur la résolution classique de TS spécialité mathématique. Parmi eux, seule la copie 23 s'affranchit totalement de la structure de l'énoncé et ne répond à aucune question.

La copie 2 prouve que 7 et 16 sont premiers entre eux à la question 1, trouve une relation de Bézout au début de la question 2 puis propose une résolution ne prenant plus en compte l'énoncé des questions suivantes. L'étudiant ici concerné résout entièrement (E') au lieu de chercher une solution particulière mais fait une erreur car oublie de repasser à n, puis il multiplie par 3 les solutions trouvées pour résoudre (E). La copie 53 montre de la même manière que 7 et 16 sont premiers entre eux à la question 1, trouve la solution générale à la question 2 puis continue la résolution du problème dans la question 3 en faisant la même erreur que la copie 2. L'étudiant ne prend pas en compte le fait qu'il faille juste trouver une solution particulière mais il cherche à résoudre le système (E') dans son intégralité. Là, il fait une erreur dans la traduction de la congruence ce qui lui donne une équation à résoudre fausse puis il oublie de repasser à n. Avec ces deux copies, on voit que ces étudiants ont essayé de se conformer au cadre proposé par l'exercice mais assez rapidement, ils sortent du schéma fourni pour tenter de se remettre dans une situation qu'ils semblent préférer. Cette situation ne leur est pas favorable car ils font des erreurs et ne parviennent pas à la solution.

Le cas de la copie 23 est encore plus flagrant. Dans cette copie, on ne trouve aucune trace des questions posées. L'étudiant s'appuie uniquement sur le système proposé qu'il traduit en terme de division euclidienne puis il cherche à résoudre l'équation obtenue en utilisant le théorème de Gauss. S'il ne s'était pas trompé dans cette traduction ($n \equiv 3\ [7] \Rightarrow\ n = 7 + 3x$) il aurait résolu le système car toute la suite du raisonnement est correcte. Sa deuxième erreur est de résoudre aussi le système (E') (de la même manière mais cette fois la congruence est bien traduite) et de penser que la solution juste qu'il trouve est aussi solution de (E) comme il l'indique à la fin de sa démonstration : E = { k / 48k + 16 ou 112k – 48 }.

Ces étudiants qui se sont réfugiés dans un raisonnement qu'ils pensaient mieux maîtriser se retrouvent tout de même en situation d'échec.

## B- Cinq grands types de copies face à la résolution de la question 4

Dans cette dernière partie, on essaie de se focaliser sur les capacités des étudiants à conduire ou à suivre un raisonnement mathématique. Les capacités de raisonnement et de synthèse demandées par cette question risquent de déstabiliser les étudiants les plus fragiles. Nous pensons que c'est ici qu'il faut chercher certaines des raisons au fort taux d'échec en première année d'université. On fait l'hypothèse que les Smaths, de part leur formation scientifique seront plus aptes que les autres à mener un raisonnement.

On distingue cinq grands types de copies face à cette question :

1. celles qui n'essaient pas de répondre à la question et s'arrêtent, au mieux, à la question 3
2. celles qui donnent la solution sans justification (copies 1 ; 8 ; 20 ; 30 ; 31 ; 36 ; 40 ; 47 ; 48 ; 57 ; 66 ; 69)
3. celles qui comprennent qu'il y a un travail de synthèse à fournir et qui mixent les questions deux et trois sans se soucier du sens mathématique (copies 9 ; 12 ; 15 ; 16 ; 17 ; 21 ; 22 ; 24 ; 33 ; 35 ; 58 ; 64 ; 67)
4. celles qui ne parviennent pas à synthétiser mais, comprenant le problème en jeu, cherchent alors à contourner la difficulté (copies 2 ; 10 ; 18 ; 25 ; 26 ; 62 ; 63)
5. celles qui choisissent une méthode synthétique justifiée (copies 29 ; 46 ; 56 ; 72)

On récapitule ces ensembles de copies et leurs effectifs dans le tableau ci-dessous ainsi que les effectifs suivant nos deux profils.

| ensemble | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| effectif | 36 | 12 | 13 | 7 | 4 |
| Smaths | 11 | 8 | 4 | 3 | 4 |
| NonSmaths | 25 | 4 | 9 | 4 | 0 |

On dispose d'un effectif cumulé de 72 copies car on n'a pas compté la copie 23 qui s'affranchit totalement des questions et ne peut donc pas synthétiser des questions qu'elle n'a pas traitées. Les copies 2 et 53, qui sortent du cadre proposé mais ont traité les premières questions, sont comptées dans le tableau, respectivement dans les ensembles 4 et 1 car 53 n'a pas cherché à résoudre (E) et 2 utilise Gauss pour résoudre (E). Nous n'exploiterons pas les copies de la catégorie 1. On peut toutefois remarquer que l'autonomie dévolue à cette question est trop grande pour près de la moitié des étudiants. L'absence d'indications précises peut dérouter des étudiants, jusque là plutôt habitués à répondre à des questions très précises.

## a) Copies donnant la solution correcte sans justification

Douze copies donnent une solution correcte mais ne proposent aucune justification. Nous devons donc nous limiter ici à des hypothèses reposant sur de maigres indices… Nous formulons trois hypothèses pouvant expliquer la démarche des étudiants. Nous approfondirons ces trois hypothèses dans la suite.

Premièrement, il y a les étudiants qui savent qu'il faut synthétiser les résultats obtenus mais qui ne comprennent pas le sens mathématique du problème et le raisonnement induit par l'énoncé. Ils décident donc de sommer les deux solutions qu'ils obtiennent, à l'image de ceux dans l'ensemble 3 qui décident, eux, de les multiplier. On peut penser que c'est par chance qu'ils choisissent la bonne opération.

Deuxièmement, il y a les étudiants qui se souviennent de la forme que doit avoir la solution et s'appuient sur leurs connaissances concernant la résolution d'équations diophantiennes.

Troisièmement, il y a les étudiants qui ressentent la volonté d'inscrire le problème dans le cadre de la linéarité, idée très forte pour le concepteur du sujet. Ils somment la solution générale et la solution particulière tout naturellement sans parvenir à nommer le contexte de linéarité dans lequel ils s'inscrivent.

On peut penser que chaque hypothèse est représentée dans l'échantillon considéré au regard du reste des copies qui, elles, justifient leurs réponses. La première hypothèse est identique à celle que nous allons développer dans la partie B (ensemble 3 de copies), la deuxième renvoie à ceux qui privilégient des connaissances mieux maîtrisées et se réfèrent au théorème de Gauss (ensemble 4), la dernière est illustrée par un élève qui parle clairement de linéarité (ensemble 5).

Ces réponses non justifiées se retrouvent principalement en Smaths (8 étudiants sur les 12 de cette catégorie). On peut penser que ces étudiants ressentent le contexte de linéarité ou se réfèrent à la forme des solutions avec laquelle ils sont familiers depuis la terminale. Ici, ce n'est pas réellement un problème de raisonnement. Ces 8 réponses non justifiées semblent plutôt caractériser des difficultés à mettre en place des méthodes justifiant un raisonnement maîtrisé et un sens mathématique certain.

## b) Ceux qui tentent de synthétiser

Treize copies sont concernées.

On a d'abord 4 copies qui ne prennent en compte que la solution particulière et qui essaient de créer un ensemble à partir de cette solution. Ces copies ne sont pas dans le même cas par rapport à la solution générale : la copie 12 a le bon ensemble pour la solution générale, la copie 17 ne traite pas la question, 22 répond {-1; 1} et 67 répond {-112 ; 112}. Dans ces deux derniers cas, on remarque la similitude de forme des ensembles donnés par ces copies.

| N° de la copie | Ensemble des solutions de (E) | |
|---|---|---|
| | Ensemble faux | |
| | Erreur héritée | Autre |
| 12 | | $\{64k \,/\, k \in Z\}$ |
| 17 | | $\{48 + k \,/\, k \in Z\}$ |
| 22 | trouve 4 pour solution particulière | {-4 ; 4} |
| 67 | trouve $\frac{16}{3}$ pour solution particulière | $\left\{-\frac{16}{3}; \frac{16}{3}\right\}$ |

On a ensuite 6 étudiants qui donnent donc un argument où apparaissent la solution particulière et la solution générale sans préciser le raisonnement mathématique qu'ils mettent en œuvre, ce qui les amène souvent à des absurdités. Il est intéressant de voir à quel point la forme influence les étudiants. Quand on résout un système de deux équations à deux inconnues en algèbre, on donne deux solutions ce qui conduit quatre étudiants de ce groupe à donner deux solutions bien qu'il n'y ait ici qu'une inconnue.

| N° de la copie | Ensemble des solutions de (E) | |
|---|---|---|
| | Ensemble faux | |
| | Erreur héritée | Autre |
| 9 | | $\begin{cases} n = 192 \times k_1 \\ n = 112 \times k_2 \end{cases}$ |
| 15 | | $n_1 = 144$ <br> $n_2 = 112x \, , x \in N$ |
| 16 | | $16 \times 4 \times 3 \times 7x \times 7y$ |
| 24 | | $\{192 \times 112k\}$ |
| 33 | | $\{n = -48 \times (3 + 7k) / \, n = 112l \, , l \in N\}$ |
| 35 | | $\begin{cases} 192 \equiv 3 \; [7] \\ 192 \equiv 0 \; [16] \end{cases}$ et $7u+16v=1$ qui a (-9 ;4) pour solution |

On a ceux qui semblent plus ou moins traduire l'énoncé et essayer de fabriquer un ensemble à partir de cette traduction sans chercher apparemment à savoir si ce qu'ils obtiennent est une solution et non une nouvelle équation.

| N° de la copie | Ensemble des solutions de (E) | |
|---|---|---|
| | Ensemble faux | |
| | Erreur héritée | Autre |
| 21 | | $\{n_0 = 7k - 3, n_0' = 16k + 7, Z\}$ |
| 64 | | $\{3 + 7m = 16p \, / \, (m, p) \in Z\}$ |

Dans la dernière copie, l'étudiant se base sur une relation qu'il a établie dans la question 3 : $-9\times16+21\times7=3$ et en déduit un ensemble, là encore à deux éléments.

| N° de la copie | Ensemble des solutions de (E) | |
|---|---|---|
| | Ensemble faux | |
| | Erreur héritée | Autre |
| 58 | | $\{-9\times16+7v\,,\,21\times7+16u\ /\ (u,v)\in Z\}$ |

Dans toutes ces copies, on repère ici une sorte de contrat didactique implicite. On a l'impression que ces étudiants ont plus cherché à synthétiser qu'à comprendre le raisonnement en jeu. Ils disposent de deux solutions au système avec lesquelles ils essaient de créer la solution du problème. Le sens mathématique leur importe peu. Ils répondent à la question « synthétiser les résultats obtenus » et non à la question « donner l'ensemble solution du système (E) ». Ils ne parviennent pas à construire un raisonnement mathématique argumenté et ne peuvent donc pas répondre correctement à la question. Il manque à ces étudiants des étapes du raisonnement en jeu qu'ils ne savent pas reconstituer par eux-mêmes ; On a aussi un gros problème de fond. 8 copies sur 13 donnent deux solutions ou deux ensembles de solutions et ne se rendent pas compte que la seule inconnue du problème est *n*.

Penchons nous maintenant sur nos deux profils. Neuf étudiants NonSmaths donnent des réponses n'ayant aucun sens mathématique. Pour ces 9 étudiants, qui tentent de synthétiser mais donnent des réponses inattendues, on a un vrai problème dans le raisonnement mathématique. Ils répondent à la question « synthétiser les résultats obtenus » et non à la question « donner l'ensemble solution du système (E) ». Bizarrement, 8 étudiants sur ces 9 sont issus d'un baccalauréat scientifique avec d'autres options ou spécialités. On pourrait penser que ces étudiants, ayant reçu une formation scientifique, seraient plus à même de faire preuve de rigueur lorsqu'ils affirment quelque chose et auraient plus de faciliter à élaborer des raisonnements mathématiques mais cela ne semble pas être le cas. Est-ce que ce sont les notions mathématiques en cause qui gênent les étudiants? Est-ce que le cloisonnement encore trop présent entre les matières empêche les étudiants tout juste sortis du secondaire de penser qu'ils peuvent appliquer aux mathématiques des démarches scientifiques acquises dans d'autres matières ? On ne trouve donc dans cette catégorie que 4 Smaths. Ils apparaissent plus vigilants par rapport au sens mathématique de leurs arguments.

## c) Ceux qui tentent de contourner la difficulté

7 copies sont concernées. On met dans cet ensemble les étudiants qui, ne parvenant pas à synthétiser les résultats obtenus dans les questions précédentes, tentent de répondre au problème de manière rigoureuse en utilisant une méthode familière, qu'ils pensent mieux maîtriser. Ces étudiants créent un raisonnement, différent de celui attendu par le concepteur du sujet, mais font preuve d'un certain sens mathématique ou plutôt d'un certain savoir-faire mathématique même si, et c'est ce qui est frappant, aucun étudiant ne parvient au résultat en utilisant sa propre méthode. Les raisonnements fournis par les étudiants se basent tous sur la tâche routinière de la résolution d'une équation diophantienne et démarrent de cette manière : l'étudiant traduit les deux congruences, tombent sur la forme géométrique de l'équation diophantienne, déroule le raisonnement propre à la résolution de ce problème.

On remarque aussi qu'aucun étudiant n'a suivi l'une des hypothèses envisagées dans l'analyse a priori à savoir : utiliser le théorème de Gauss au lieu de la question 2, c'est à dire perdre le bénéfice de cette question uniquement.

Enfin, très peu d'étudiants citent explicitement le théorème qu'ils utilisent ce qui, pour nous, tend à confirmer l'idée qu'il s'agisse d'une application mécanique du théorème de Gauss et non le fruit d'une réflexion sur l'utilisation des théorèmes d'arithmétique connus pour résoudre le problème posé.

| N° de la copie | Ensemble des solutions de (E) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Ensemble faux | | | |
| | Gauss au lieu de la question 2 | | Retour à la tâche routinière dès le départ | |
| | Gauss cité | Gauss pas cité | Gauss cité | Gauss pas cité |
| 2 | | | échec | |
| 10 | | | | échec |
| 18 | | | | échec |
| 25 | | | | échec |
| 26 | | | | échec |
| 62 | | | | échec |
| 63 | | | échec | |

La copie 62 débute cette technique mais ne va pas loin (elle obtient l'équation diophantienne à résoudre puis s'arrête).
3 copies ne parviennent pas à la solution car elles oublient de revenir à *n* mais le déroulement de Gauss est juste (copies 2, 10 et 63).

Les copies 18, 25 et 26 font une erreur dans le déroulement de la tâche routinière ce qui les amène à un ensemble faux quand ils en proposent un. 18 et 25 font quasiment la même erreur. Ils trouvent une solution particulière à l'équation traduite $16x-7y=3$ , font la différence des deux équations et obtiennent $16(x-x_0)-7(y-y_0)=0$. La copie 25 s'arrête là alors que la copie 18 conclut que « les solutions de (E) sont : $\forall y', x' \in z$ , $x=x'+21$ et $y=y'+9$ ». La copie 26 fait une erreur très intéressante au cours de sa résolution. Elle traduit le système et obtient pour équation diophantienne $7x-16y=-3$ puis elle affirme que cela implique $7\times(-3a)-16\times(-3b)=-3$ enfin elle simplifie par -3. Elle déroule le raisonnement sans autre problème ou erreur et finit par conclure que l'ensemble des solutions de (E) est « les n tels que $n=-336k-144$ ». Elle choisit des x et des y multiples de 3 ce qui ne lui donne que certains points (un point sur 3). On comprend ici l'importance que Philippe Caldero a mise sur la notion de vecteur minimal dans son mail visant à compléter l'entretien (voir I-3-C-a).

La tâche routinière de résolution d'une équation diophantienne utilisant le théorème de Gauss n'a pas été plébiscitée par les Smaths contrairement à ce qu'on pouvait supposer. Seulement trois l'utilisent. On peut continuer à penser que cette tâche a été détaillée en TD car 4 NonSmaths la connaissent. On remarque que les Smaths qui, comme nous l'avons déjà expliqué dans l'analyse a priori, ont certainement eu à résoudre des équations diophantiennes ne maîtrisent pas cette technique pour autant. La copie 62 traduit le système sous sa forme plus géométrique et s'arrête là, la copie 63 oublie de repasser à n et la copie 26 fait une erreur dans le déroulement de la méthode. Cette méthode n'a peut-être pas autant de poids ou en tout cas n'est pas si familière pour les élèves que ce que l'on pouvait penser dans l'analyse a priori.

### d) ceux qui choisissent une méthode synthétique et justifiée

Premièrement, les quatre étudiants qui donnent le bon ensemble avec un argument correct et complet sont issus d'un bac S spécialité mathématiques. Ce sont aussi les quatre étudiants qui résolvent le problème sans aucune erreur. Il est intéressant de constater que parmi ces quatre copies, on a des représentants pour les deux méthodes de justification effectuées dans notre résolution linéaire (voir annexe).

| N° d'étudiant de la copie | Ensemble des solutions de (E) | |
|---|---|---|
| | Ensemble correct | |
| | On ramène n à $n_0$ puis on applique la question 2 (esprit bac) | Evocation du phénomène de linéarité |
| 29 | | * |
| 46 | | * |
| 56 | * | |
| 72 | * | |

La copie 29 emploie les expressions caractérisant le phénomène de linéarité : « solution générale » et « solution particulière ». A la question précédente, cette copie a utilisé la méthode avec le Z/7Z. Dans cette copie, on retrouve la résolution du problème telle qu'elle est souhaitée par le concepteur du sujet. L'étudiant a acquis les méthodes de L1 (pour la résolution de la question 3) et inscrit sa démarche de résolution dans le cadre de la linéarité. La copie 46 n'évoque pas clairement le phénomène de linéarité mais l'argument qu'elle propose s'y réfère. A la différence de la copie 29, elle a utilisé la méthode sans le Z/7Z pour résoudre la question 3. Après avoir traduit les résultats obtenus aux deux questions précédentes sous la même forme que celle adoptée par l'énoncé, elle somme et conclut :

| N° de la copie | Argument |
|---|---|
| 46 | $\begin{cases} -144 \equiv 0 \ [16] \\ -144 \equiv 3 \ [7] \end{cases}$ et $\begin{cases} 112n \equiv 0 \ [16] \\ 112n \equiv 0 \ [7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -144 - 112n \equiv 0 \ [16] \\ -144 - 112n \equiv 3 \ [7] \end{cases}$. <br> Ainsi $S(E) = \{-112n - 144 \ / \ n \in Z\}$ |

Les deux autres copies ont aussi utilisé la méthode sans le Z/7Z pour répondre à la troisième question. Ces deux copies utilisent la même méthode consistant à raisonner par équivalence entre les différents systèmes en jeu dans le sujet de bac. On voit donc ici la profonde différence entre le sujet de bac et le sujet universitaire. Dans le sujet de bac, le raisonnement mis en jeu par ces deux étudiants est détaillé dans la question 2 (voir page 15). Dans le sujet universitaire, les étudiants doivent réaliser ce travail sans indication. Deux étudiants y parviennent.

On recopie dans un tableau leurs arguments pour la question 4 qui relèvent plutôt d'un esprit bac.

| N° de la copie | Argument |
|---|---|
| 56 | $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv -144 \ [7] \\ n \equiv -144 \ [16] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+144 = 7k \\ n+144 = 16k' \end{cases} \Leftrightarrow n+144 \in \{112k \,, k \in Z\}$ <br> $\Leftrightarrow n \in \{112k - 144 \,, k \in Z\} = \{112k' - 32 \,, k' \in Z\}$ |
| 72 | Donc on cherche $\begin{cases} n \equiv -144 \ [7] \\ n \equiv -144 \ [16] \end{cases}$ car $-144 \equiv 3 \ [7]$ et $-144 \equiv 0 \ [16]$. <br> Donc $\begin{cases} n+144 \equiv 0 \ [7] \\ n+144 \equiv 0 \ [16] \end{cases}$. Ainsi $n+144$ est un multiple de 7 et de 16. <br> Ainsi $n+144 \in \{112k \,/\, k \in Z\}$. <br> Donc $n+144 = 112k \quad k \in Z \Leftrightarrow n = 112k - 144 \quad \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$. <br> L'ensemble des solutions de (E) sont $S = \{112k - 144 \,/\, k \in Z\}$ |

## C- Synthèse

Notre analyse de cette question 4 confirme l'idée qu'il y a un énorme fossé entre ces questions et les trois précédentes. La moitié des étudiants ne sait pas comment aborder cette question et ne répond pas. Parmi ceux qui tentent de répondre, beaucoup ne justifient pas, construisent des raisonnements incomplets ou faux. Seuls quatre étudiants sont capables de synthétiser et de justifier correctement le raisonnement qu'ils construisent pour résoudre la question. Les problèmes se situent autour de trois tâches : la justification d'un raisonnement, l'élaboration propre d'un raisonnement mathématique, la synthèse des résultats obtenus et leur intégration dans le raisonnement construit. Ces trois tâches sont caractéristiques de ce qu'on attend d'un étudiant en mathématiques et sont cruciales dans l'enseignement supérieur. Il est assez préoccupant de se rendre compte qu'elles posent problème à quasiment tous les étudiants de L1. Faut-il chercher des explications dans l'enseignement transmis et reçu dans le secondaire ? L'analyse, même succincte, du sujet de bac, inciterait à répondre que oui. En effet dans ce sujet, aucune question de synthèse n'intervient et il n'y a pas non plus à élaborer un raisonnement mathématique. La seule tâche qui apparaît dans la plupart des questions concerne la justification guidée du raisonnement choisi par l'énoncé. On ne peut évidemment pas tirer de conclusion sur la base d'un unique sujet mais la construction de l'exercice du bac envisagé est quand même assez révélatrice des attentes de l'enseignement secondaire.

Notre analyse a montré que les Smaths, sur cette dernière question sont en difficulté mais avec des différences non négligeables par rapport à notre deuxième profil. 12 étudiants sur les 18 qui répondent (soit 67 %) proposent un ensemble juste même s'ils ne sont que 4 à le justifier. 3 étudiants seulement proposent un ensemble dépourvu de sens mathématique. La situation est bien différente pour les NonSmaths. 4 étudiants sur les 18 qui répondent (soit 22 %) proposent un ensemble juste. Aucun ne justifie sa réponse. Mais surtout, 10 étudiants donnent un ensemble dépourvu de sens mathématique.

Enfin, concernant la diversité des méthodes, on fait le même constat que dans la première partie. Les différentes méthodes de résolution envisagées dans l'analyse a priori se retrouvent dans les copies. Le phénomène de linéarité, pourtant fondateur de la construction du sujet, est peu exploité. On remarque aussi que le poids de la tâche routinière concernant la résolution d'une équation diophantienne est à nuancer. On a la copie 23 qui montre l'importance et le poids de cette tâche car elle supplante les questions de l'énoncé. On a aussi les deux copies qui l'introduisent à un moment et qui en finissent par en oublier l'énoncé. Enfin, on a ces copies qui ne synthétisent pas les résultats démontrés et qui reviennent à cette tâche. Néanmoins, cela ne concerne que 9 étudiants dont 4 Smaths.

# CONCLUSION

Le but de ce travail était de se pencher sur la transition « lycée / université » en analysant un exercice d'arithmétique dans 73 copies d'étudiants en L1 de mathématiques en 2006/2007 à l'université Claude Bernard (Lyon 1). Pour cette étude, nous avons choisi de séparer les étudiants suivant deux profils bien distincts selon qu'ils soient issus d'un bac S spécialité mathématiques ou pas. Cette caractérisation de deux profils distincts a permis de mettre en évidence certains facteurs pouvant expliquer en partie certains problèmes liés à la question de l'orientation des élèves à l'issue du bac. De l'ensemble de nos analyses, on tire donc plusieurs conclusions intéressantes regroupées en trois points.

Premièrement, on s'aperçoit que la diversité des méthodes de résolution imaginées au cours de l'analyse a priori est effectivement présente dans les copies étudiées. Ainsi, quand on sort des questions très proches du cours ou des questions fortement liées à une méthode de résolution spécifique, comme par exemple la remontée de l'algorithme d'Euclide pour trouver une relation de Bézout, les étudiants ne vont pas forcément vers la résolution attendue par le concepteur ou vers la résolution la plus proche de l'enseignement reçu. Dès qu'ils disposent d'un peu de liberté pour la résolution d'une question, on a une réelle diversité de méthodes, peut-être en partie due à l'influence des TD. On peut prendre l'exemple de la résolution avec le Z/7Z que l'on retrouve dans quelques copies même si cette méthode n'avait pas du tout été pensée par le concepteur du sujet. Dans ce cas-là, les étudiants produisent une résolution non prise en compte par le concepteur lors de l'élaboration de son sujet mais cette résolution est conforme à l'enseignement reçu. Au contraire, l'inscription de l'exercice dans le cadre général de la linéarité a sous-tendu la conception de l'exercice. La linéarité permettait de donner un argument très simple pour la question 4. Ce phénomène étant relativement mal perçu par les étudiants, on se retrouve avec un large éventail de résolutions proposées dont certaines relèvent d'arguments compliqués ou d'arguments ne synthétisant pas les résultats obtenus auparavant. Ils s'appuient sur des notions mieux comprises comme par exemple la tâche routinière de la résolution d'équations diophantiennes utilisant le théorème de Gauss, avec le cas extrême de l'étudiant qui s'affranchit totalement des questions de l'énoncé.

Deuxièmement, l'analyse de la question 4 illustre le fossé entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur et permet d'en analyser quelques causes. La résolution de l'exercice proposé et plus particulièrement de cette question fait intervenir trois tâches cruciales dans les mathématiques de l'enseignement supérieur : la justification d'un raisonnement, l'élaboration d'un raisonnement mathématique, la synthèse des résultats obtenus et leur intégration dans le raisonnement construit. Ces trois tâches posent problème à la majorité des étudiants puisque seulement quatre étudiants parviennent au résultat en réalisant ces tâches correctement. Ces trois tâches participent à l'élaboration d'un savoir mathématique universitaire bien construit. On se rend compte qu'elles ne sont pas du tout maîtrisées par les étudiants de L1. Pourtant, dans le cursus universitaire, elles ne seront enseignées qu'indirectement, au travers de démonstrations par exemple ou de résolutions complètes d'exercice. Selon nous, le cœur du problème d'échec à l'université se situe ici. Les élèves de Terminale sont amenés à justifier, à l'aide d'arguments souvent simples ou classiques, un raisonnement et les étudiants de L1 à le créer. L'autonomie dévolue à l'étudiant est donc radicalement différente de celle dévolue à l'élève de Terminale. Quelque soit le bac qu'il a obtenu, l'étudiant de L1 en mathématiques va être confronté à des problèmes testant des capacités et des aptitudes au raisonnement qu'il n'a pas acquises en Terminale. Cependant, les étudiants ayant obtenus un bac S spécialité mathématiques semblent mieux armés pour les exigences du supérieur.

En effet, et c'est là notre troisième point, on se rend compte que les choses sont bien différentes que l'on soit issu d'un bac scientifique spécialité mathématique ou d'un autre bac. Du point de vue des connaissances transmises en arithmétique, on peut dire que les étudiants issus d'un bac S spécialité mathématiques ont pu renforcer leurs connaissances dans le domaine et sont donc nettement plus à l'aise que les autres dans la manipulation de ces notions. Ils semblent aussi plus familiers avec les outils mathématiques en jeu (congruences, ensemble de nombres) et les tâches précises demandées de manière plus ou moins explicite par l'énoncé (remontée de l'algorithme d'Euclide). Une grande majorité d'étudiants de ce profil parvient à suivre un raisonnement proposé. On repère aussi que, selon le bac obtenu, les étudiants ne sont pas égaux vis-à-vis des tâches définies précédemment. La plupart des étudiants de L1, dans leur ensemble, donnent des réponses qu'ils ne savent pas justifier. Un apprentissage de la rigueur mathématique reste à construire. La synthèse des résultats obtenus et leur intégration dans le raisonnement sont difficiles pour tous. Certains étudiants tentent de contourner le problème en s'appuyant sur des notions jugées mieux maîtrisées, sur des mécanismes de résolution mieux sus mais ils se retrouvent tous dans une nouvelle situation d'échec. En revanche, l'élaboration d'un raisonnement mathématique crée principalement des difficultés aux étudiants qui n'ont pas reçu une culture scientifique et mathématique forte au lycée grâce au bac S et à la spécialité mathématiques. En effet, les seuls à donner une réponse argumentée et juste sont des étudiants détenteurs de ce bac. On trouve surtout des absurdités ou des non-sens dans les copies d'étudiants NonSmaths. L'avantage pour les étudiants issus d'un bac S spécialité mathématiques est qu'ils ont une culture mathématique plus forte et une initiation au travail universitaire par le biais de la spécialité. Ils ont quelques clés pour parvenir à s'adapter aux nouvelles tâches à réaliser. Pour les autres, la situation est plus problématique. On a vu que même des élèves qui avaient suivi une formation scientifique étaient en difficulté pour les notions de rigueur et de clarté des raisonnements ainsi que pour l'élaboration des raisonnements.

La question de l'orientation des élèves à l'issue du bac et peut-être même des étudiants à l'issue du premier semestre de L1 est cruciale. Le fait d'avoir effectué une TS spécialité mathématiques apparaît ici comme beaucoup plus confortable pour des étudiants en L1 vis-à-vis des connaissances engrangées en arithmétique et plus largement, vis-à-vis du travail spécifique à l'enseignement universitaire. Les élèves de Terminale S spécialité mathématiques semblent armés pour les exigences du supérieur mais ne sont pas prêts. Les autres ont des lacunes à combler. Sans cela, ils risquent de se trouver confrontés très vite à une situation d'échec.

# BIBLIOGRAPHIE

**[1]** BATTIE, V. 2003, *Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique* Thèse de Doctorat ; Université Paris 7 – Denis Diderot

**[2]** DEMAZURE, M. 1997, *Cours d'algèbre* ; éditions Cassini, p.43-47

**[3]** GUIDERE, M. 2001, *Méthodologie de la recherche* ; Ellipses

# ANNEXES

Annexe 1 : extrait du BO n°4, 30 Août 2001, Hors Série

Annexe 2 : Résolution linéaire du problème posé

Annexe 3 : Transcription des deux entretiens menés

Annexe 4 : Grilles d'analyse des copies

Annexe 5 : Sélection de copies

# ANNEXE 1

Le B.O.
N°4
30 AOÛT
2001
HORS-SÉRIE

## III - ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les paragraphes qui suivent concernent trois domaines choisis pour leur richesse mathématique au niveau d'une formation initiale.

L'arithmétique est un champ des mathématiques très vivant dont les applications récentes sont nombreuses; c'est un domaine au matériau élémentaire et accessible conduisant à des raisonnements intéressants et formateurs. C'est un lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement.

Avec l'étude des similitudes planes, on vise à la fois une synthèse des études antérieures sur les transformations et une première approche implicite de la structure de groupe.

Quant au paragraphe sur les surfaces, il ouvre le champ des fonctions de plusieurs variables dans un cadre géométrique porteur de sens et peut illustrer les liens entre les représentations en trois et deux dimensions de certains objets.

À titre indicatif, la répartition horaire entre les différents chapitres peut être : arithmétique : 50%; géométrie 50 %.

| Contenus | Modalités de mis en oeuvre | Commentaires |
|---|---|---|
| Arithmétique | | |
| Divisibilité dans ZZ. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD<br>Congruences dans ZZ.<br>Entiers premiers entre eux.<br><br>Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit<br>de facteurs premiers.<br>PPCM.<br><br>Théorème de Bézout.<br>Théorème de Gauss. | On fera la synthèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde. On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en oeuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs<br>premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.<br><br>On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.<br><br>Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes.<br>Applications élémentaires au codage<br>et à la cryptographie.<br>Application : petit théorème de Fermat. | On montrera l'efficacité du langage des congruences. On utilisera les notations : *a* α*b* (*n*) ou *a* α *b* (modulo *n*), et on établira les compatibilités avec l'addition et la multiplication.<br>Toute introduction de ZZ/*n*ZZest exclue.<br><br>L'unicité de la décomposition en facteurs premiers pourra être admise.<br><br>L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers<br>moyens de calculs : à la main, à l'aide<br>d'un tableur ou d'une calculatrice. |
| Similitudes planes | | |

| | | |
|---|---|---|
| Définition géométrique. Cas des isométries. Caractérisation complexe : toute similitude a une écriture complexe de la forme $z$ –>$az+b$ ou $z$ –>$az+b$ ($a$ non nul). | Les similitudes seront introduites comme transformations du plan conservant les rapports de distances. On fera remarquer que la réciproque d'une similitude est une similitude, que la composée de deux similitudes est une similitude et que,<br>dans le cas général, la composition n'est pas commutative<br>On démontrera qu'une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité ou une symétrie axiale. | La définition générale sera illustrée d'une part avec les transformations étudiées antérieurement, d'autre part avec les<br>transformations d'écriture complexe $z$ –> $az+b$ ou $z$ –> $az+b$; ces dernières seront amenées progressivement à travers des exemples. La caractérisation complexe est un moyen efficace d'établir la plupart des propriétés. |
| Étude des similitudes directes | Forme réduite d'une similitude directe. On démontrera la propriété suivante : étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que A ≠ B et A' ≠ B', il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'. | La recherche des éléments caractérisant une similitude indirecte est hors programme |
| | Applications géométriques des similitudes à l'étude de configurations, la recherche de lieux et la résolution de problèmes de construction. | On fera le lien avec les triangles semblables ou isométriques introduits en classe de seconde. |
| Sections planes de surface | | |
| | Sections de cônes et cylindres illimités<br>d'axes (O$z$) par des plans parallèles aux plans de coordonnées. | L'objectif est de montrer qu'une fonction de deux variables peut être représentée par une surface et que des études de coupes par des plans permettent leur étude à l'aide des outils déjà vus pour les fonctions d'une variable.<br>Pour les sections de cônes, on pourra faire le lien avec les hyperboles d'équations $xy=k$. |
| | Surfaces d'équation $z=x2+y2$ ou $z=xy$<br>par des plans parallèles aux plans de coordonnées | On visualisera sur écran les surfaces<br>coupées étudiées. On entraînera à la reconnaissance des surfaces à partir de coupes parallèles à un plan, et on associera les visions géométrique et analytique. |

## *ANNEXE 2*

RESOLUTION LINEAIRE DU PROBLEME POSE

*Question 1: « montrer que 7 et 16 sont premiers entre eux,*

| **1- Algorithme d'Euclide à 7 et 16** | **2- Décomposition en produit de facteurs premiers** | **3- autre** |
|---|---|---|
| $16 = 7\times2+2$<br>$7 = 2\times3+1$<br>$2 = 2\times1+0$<br>Le dernier reste non nul est le PGCD de 7 et 16. On a donc PGCD (7 ; 16) = 1. 7 et 16 sont premiers entre eux. | $16 = 2^4$<br>$7 = 7$<br>1 est le seul diviseur commun de 7 et 16 qui sont donc premiers entre eux. | 7 est premier<br>7 ne divise pas 16<br>Donc 7 et 16 sont premiers entre eux. |

*et écrire une relation de Bézout associée. »*

| **1- Remontée de l'algorithme d'Euclide** | **2- Solution à la main** |
|---|---|
| $1 = 7-2\times3$<br>$1 = 7-(16-7\times2)\times3$<br><br>$1 = 7\times7-16\times3$ est une relation de Bézout associée à 7 et 16. | |

*Question 2 : « Quel est l'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 ? »*

| **1- Relation PPCM /PGCD** | **2- Théorème de Gauss** |
|---|---|
| On a la relation<br>$\mathrm{PPCM}(a,b)\times\mathrm{PGCD}(a,b)=a\times b$<br>D'où PPCM (7,16) = 112 car PGCD (7,16) = 1<br>On sait de plus que les multiples de 7 et de 16 sont les multiples du PPCM.<br>Donc l'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 est $\{112k\ /\ k\in Z\}$. | La question posée revient à résoudre le système linéaire suivant : $\begin{cases} n\equiv 0\ [7] \\ n\equiv 0\ [16] \end{cases}$,<br>ou encore : $16k = 7k'$. D'après le théorème de Gauss, comme 7 est premier avec 16, 7 divise $k$. Donc $k = 7q$. Et n = $112q$, $q\in Z$ .<br>Donc l'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 est $\{112k\ /\ k\in Z\}$. |

*Question 3 : En vous aidant de la relation de Bézout, trouver un entier no multiple de 16 qui vérifie par ailleurs no=1[7].»*

On pose $n_0 = 16x$

Il s'agit alors de résoudre l'équation d'inconnue $x$ : $16x - 1 \equiv 0\ [7]$

| **1- sans le Z/7Z** | **2- avec Z/7Z** |
|---|---|
| On utilise la relation de Bézout trouvée à la question 1 : $1 = 7\times 7 - 16\times 3$<br>D'où on déduit en ajustant les coefficients que :<br>$-1 = -7\times 7 + 16\times 3$<br>Reportons cette identité dans l'équation qui devient donc :<br>$16x + 16\times 3 - 7\times 7 \equiv 0\ [7]$<br>$\Leftrightarrow 16\times(x+3) \equiv 0\ [7]$<br>$\Leftrightarrow$ 7 divise $16\times(x+3)$<br>$\Leftrightarrow$ 7 divise $x+3$ (en utilisant le lemme de Gauss)<br>$\Leftrightarrow x+3 \equiv 0\ [7]$<br>$\Leftrightarrow x \equiv -3\ [7]$<br>$\Rightarrow n_0 = -48$ est une solution particulière du système (E'): $\begin{cases} n \equiv 1\ [7] \\ n \equiv 0\ [16] \end{cases}$<br>ou encore $x \equiv 4\ [7] \Rightarrow n_0 = 64$ solution particulière de (E'). | On remarque que 7 est premier et donc que Z/7Z est un corps commutatif. On fait tous les calculs dans ce corps.<br>L'équation proposée se réécrit :<br>$\overline{16}\times\overline{x} - \overline{1} = \overline{0}$<br>$\Leftrightarrow \overline{16}\times\overline{x} = \overline{1}$<br>$\Leftrightarrow \overline{x} = \overline{1}\times(\overline{16})^{-1}$<br>Calculons donc $(\overline{16})^{-1}$ : pour cela nous connaissons la bonne méthode : écrire une identité de Bézout entre 24 et 137 à savoir $1 = 7\times 7 - 3\times 16$<br>Puis redescendre aux classes d'équivalence dans Z/7Z : $\overline{1} = -\overline{3}\times\overline{16}$<br>On en conclut que l'équation proposée équivaut à :<br>$\overline{x} = -\overline{3}\times\overline{1} = -\overline{3} = \overline{4}$ ce qui nous donne les mêmes solutions particulières que celles obtenues avec la méthode 1. |

*En déduire une solution du système (E).*

Il suffit simplement de multiplier une congruence par un k dans Z et faire le lien entre (E) et (E'). Ce point fait intervenir un résultat précis du cours :

$\boxed{\text{Soit } n \geq 1 \text{ fixé et soient } a, b, c \text{ trois entiers relatifs. Alors si } a \equiv b\ [n] \text{ alors } ac \equiv bc\ [n]}$

Ainsi $3n_0 = -144$ ou 192 est une solution particulière de (E).

*Question 4 : « Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E). »*

| **1- linéarité** | **2- esprit « bac »** |
|---|---|
| Dans la question 2, on a la solution générale du système et dans la question 3 une solution particulière. La somme de la solution générale et de la solution particulière donne la solution du problème. Ainsi, $\{-144+112k\,/\,k\in Z\}$ correspond à l'ensemble des solutions de (E). | On écrit la solution particulière sous forme d'un système de congruences, en multipliant le système vérifié par la solution particulière par -1 puis en ajoutant les deux systèmes on ramène les deux systèmes à $\begin{cases} n \equiv n_0 & (7) \\ n \equiv n_0 & (16) \end{cases}$ puis on traduit en terme de multiplicité ($n-n_0$ est congru à 7 et à 16, il appartient donc à l'ensemble défini à la question 2)), et on conclut en citant précisément l'ensemble des solutions. |

# ANNEXE 3

# TRANSCRIPTION DES DEUX ENTRETIENS MENES

## A- TRANSCRIPTION DE L'ENTRETIEN AVEC P.CALDERO

*Au début de l'entretien, je précise que j'effectue cette démarche dans le cadre d'un TER sous la direction de Mme Battie. Philippe Caldero n'a pas vu que j'avais joint au mail un fichier contenant le sujet de bac et le sujet de fac. Il en prend donc connaissance au début de l'entretien.*

**Philippe Caldero : Ok, ouais, ouais d'accord, ah ben très bien, c'est bien, c'est la charnière bac, fac**

Florence Buisson : Ouais, c'est ça

**PC : OK bac, fac**

FB : Donc en fait le but du travail que je fais, c'est d'étudier 55 copies enfin l'exercice dans 55 copies, en fait Mme Battie avait récupéré.

**PC : D'accord, l'exercice 2 ? Sur 55 copies ?**

FB : Voilà c'est ça, l'exercice 2. Et donc en fait le but c'est d'analyser le raisonnement en jeu, les points où l'élève devait avoir des méthodes, etc.

**PC : D'accord**

FB : Pour, euh, pour essayer de comprendre, comme en fait on travaille sur la transition lycée-université, ce serait plus pour comprendre les raisons de l'échec en première année de fac, enfin quelques raisons, quelques facteurs. Voila, et donc vous, euh, je viens vous voir en tant que concepteur du sujet

**PC : Ouais, ouais, en plus celui-ci, c'est vrai que c'était moi qui l'avais proposé ce sujet là. Ouais, ouais, effectivement. Donc vas-y j'attends tes …**

FB : Et celui-là ça me sert juste à voir les différences par rapport aux questions posées, est-ce qu'il y a plus de travail à faire en fac, de réflexion, etc, parce que c'est vraiment le même type d'exercice mais après les questions sont différentes

**PC : Les questions sont différentes, ouais**

**Démontrer qu'il existe un couple (u,v) d'entiers relatifs, tatata**

**Vérifier que pour un tel couple, paf, ouais vérifier**

**Soit n0 un solution, vérifier que le système équivaut à… ouais…**

**D'accord, démontrer que le système équivaut à… ouais, d'accord**

**Bon, euh, trouver un couple (u,v) solution, calculer, ouais d'accord, d'accord**

**Ok, ok, ok, ouais d'accord**

FB : Donc au départ je voulais d'abord faire une mise au point sur le cours parce que en fait, j'ai récupéré ce que vous avez mis sur votre site

**PC : Oui**

FB : Donc c'est le cours de Pierre Lavaurs, apparemment

**PC : Tout à fait**

FB : Eh, euh, j'ai récupéré aussi un cours photocopié d'élève mais celui-là suivait l'amphi de Pierre Lavaurs parce que vous, vous aviez un amphi et Pierre Lavaurs deux

**PC : C'est possible, y a eu un moment où c'était ça**

FB : Je crois que c'était ça l'année dernière donc dans le cours qu'il y a sur votre site, en fait, là dans cette partie, je vais vous poser des questions qui sont pas forcément en lien avec, euh

**PC : D'accord**

FB : C'est juste pour faire un bilan assez exhaustif en fait

**PC : Ok**

FB : Et dans le cours photocopié sur votre site, il y a une section sur les sous-groupes de Z, et on la retrouve pas dans le cours photocopié de l'élève, donc, déjà est-ce que vous vous souvenez l'avoir faite

**PC : Oui, oui je l'ai faite, ouais bien sûr, toujours ah oui**

FB : Celle là vous la faites à chaque fois, toujours. Ok parce que comme

**PC : Oui, parce que d'abord c'est vraiment la charnière entre l'arithmétique et la théorie des groupes, parce que c'est quelque chose où, en tant que charnière entre quelque chose qu'ils connaissent bien comme l'arithmétique ou qui, au moins auquel ils sont familiers depuis leur jeune âge puisque c'est de l'addition et de la multiplication et puis des nombres entiers. Donc finalement des choses auxquelles ils sont habitués assez tôt. C'est toujours rassurant de montrer que des nouvelles notions un peu abstraites, bon ben on part un peu vers le plus abstrait, vers l'inconnu mais bon, c'est une façon de leur tenir la main, de leur dire « regardez, on continue, on fait toujours la même chose, c'est toujours les mêmes noms ». De toute façon ça c'est quelque chose… J'insiste toujours à chaque fois que j'ai une notion, que j'introduis une notion nouvelle, ça c'est même plus fort que moi, hein, il faut que je dise « ouais mais regardez, c'est une autre façon de dire quelque chose que vous disiez avant et que vous aviez parfaitement compris ». (4'15 -> 4'46) Les mathématiques, c'est toujours les mêmes choses, l'arithmétique, les équations, les équations différentielles, voilà, il faut toujours ramener les étudiants à ça (5'04 -> 5'29). C'est vraiment une marotte pour moi.**

**Ca paraît impossible, c'est même pas possible, donc je ne sais pas**

FB : Ouais parce que s'il a pas écrit ça, y a peut-être d'autres trucs aussi qu'il a pas écrit, c'était juste pour savoir

**PC : Non, non mais ça c'est quelque chose que je fais systématiquement et puis en plus c'est extrêmement utile dans les exercices et puis on le revoit même, tu as du le voir en M1, avec les sous-groupes de R où c'est toujours les mêmes techniques finalement sauf qu'il y a des notions topologiques en plus, pour éliminer quand on a un groupe non cyclique, c'est vraiment quelque chose d'extrêmement important, pour plein de raisons.**

FB : Donc après, l'autre truc que je voulais vous demander, c'est qu'en fait dans un mail, Mme Battie avait gardé les mails qu'échangeait Pierre Lavaurs avec les profs de TD, il disait qu'il voulait présenter Z/nZ de façon différente et qu'il allait vous en parler. Donc il voulait le présenter comme l'ensemble des classes de 0 à n-1 au lieu d'utiliser la relation d'équivalence avec la congruence modulo n. Donc est-ce que vous l'avez présenté aussi comme ça ou vous avez gardé ?

**PC : Non, non, non, là j'en ai fait un peu qu'à ma tête, hein. Pierre Lavaurs, depuis pas mal de temps, même si dans son cours il a mis la relation d'équivalence, il ne fait, il voulait retirer les problèmes de**

**relations d’équivalence sous prétexte finalement qu’on est mieux dans une inclusion que dans un quotient, quoi, hein, et que bon c’est.. ; Donc il y a ce théorème qui est en tout début de L1 et moi j’aime bien insister dessus parce que je le trouve très bien, que finalement c’est toujours pareil. Une relation d’équivalence c’est rien d’autre qu’une partition, quoi, c’est une partition et ça c’est encore très chouette. On est devant des étudiants qui viennent d’arriver, ils ont l’impression qu’on leur parle javanais, quoi, et puis on leur dit, ouais, y a des relations d’équivalences, des ensembles quotients, etc et puis, bon, y’a ce théorème, encore, qui leur tient la main, qui leur dit « mais non, regardez, c’est juste des partitions quoi, on partitionne ». Et d’ailleurs j’avais un exercice, attends c’était quand, ben c’était cette année, où je leur ai fait faire un exercice où je leur ai dit voila « comptez combien y a de relations d’équivalences dans un ensemble à bon, 3 ou 4 éléments, je sais plus, et puis finalement il fallait passer par ce théorème où une équivalence c’était une partition, et on partitionnait. Et puis ceux qui ont eu l’idée, pas qu’ils ont trouvé, c’était le genre de questions que je mets où faut un peu réfléchir, c’est les questions à bonus, où bon ils savent déjà d’avance que c’est des questions de réflexion et donc fallait compter, donc ben voila, on sait pas bien ce que c’est. Alors Lavaurs, lui il voulait pas faire, il voulait sauter les relations d’équivalence, et après bien sûr, il était obligé de retomber sur ses pattes et puis faire d’une autre manière Z/nZ. Mais moi j’ai toujours fait les relations d’équivalences, peut-être une année je l’ai sauté, par solidarité avec lui, puis après je me suis dit « non c’est la dernière année que je fais ça parce que il y a pas de raisons » et après quand Frank Wagner a pris la relève de Pierre Lavaurs, alors lui, pour lui c’était complètement incongru de ne pas faire de relations d’équivalences, quoi, parce que ça, la relation, c’est une notion qui… A partir du moment où on dit « bon ben on va faire un cursus algèbre, un cursus analyse et un cursus algèbre », il est clair que l’équivalence c’est un objet, le passage au quotient est quand même une notion, même si on se rend bien compte que il y a plein d’étudiants qui zappent, qui zappent ça, mais au bout d’un moment ils finissent par ingurgiter cette notion de passage au quotient parce que c’est là. C’est incontournable le passage au quotient, c’est une notion, une fois qu’on l’a dominée, extrêmement féconde. Et même je discutais avec Chamarie une fois, qui disait que lui, à force, il trouvait la structure quotient plus simple que la sous structure, et c’est ça qu’il essayait de faire passer en maîtrise à ses étudiants. Bon j’irai pas jusque là, disons, c’est dual, c’est vraiment, quand on formalise tout ça, on se rend compte que structure, sous structure et quotient c’est les mêmes difficultés formelles. Après, après bien sûr on est plus à l’aise quand on dit « tiens on est dans un sous-ensemble quoi ». Mais ce théorème des partitions, je le trouve bien, bien pratique et il tombe bien au bon moment. Il est simple à montrer et puis il prouve que c’est pas si dur, alors du coup maintenant je continue avec les partitions et je fais le théorème de Lagrange puisque finalement c’est là que ça va tomber les relations d’équivalence et les ensembles quotients. C’est pour le théorème de Lagrange qui est encore un théorème qui donne des résultats extrêmement concrets comme le petit théorème de Fermat. Et là on retrouve, ça y est quoi, ceux qu’on avait perdu au moment de la théorie des groupes, après au moment de l’arithmétique, et puis finalement ils se rendent compte qu’écrire égal ou écrire le signe équivalent, ça ressemble quoi, à partir du moment où il y a des opérations arithmétiques dessus, qu’on a vérifié un certain nombre de choses. Donc voila, ma réponse c’est, j’ai pas du tout touché à ça**

FB : D’accord

**PC : J’ai essayé et finalement ça a pas été convaincant et je pense pas que ce soit traumatisant outre mesure pour les étudiants de passer à la classe d’équivalence à partir du moment où on leur dit « ben regardez on partitionne l’ensemble »**

FB : Ok, donc alors maintenant on va revenir à…, enfin on va plutôt passer à ça, donc « le choix du sujet pour cet exercice d’arithmétique ». En fait, il y avait deux exercices d’arithmétique. Et pourquoi est-ce que vous avez décidé de poser ce type d’exercice, quel intérêt pour des L1, parce qu’en fait, moi j’étais pas en fac les deux premières années, j’étais en prépa, et par exemple, l’arithmétique, on en a quasiment pas fait, nous c’était vraiment, euh. Donc pourquoi est-ce qu’ici ça a une telle importance ?

**PC : Alors, les classes prépa sont généralement pour former des ingénieurs. Et donc qui dit ingénieur disait qu’il fallait une préparation à la fois analyse et algèbre. Analyse c’est clair et algèbre c’est parce que pour beaucoup d’ingénieurs finalement, il y a cette espèce de diagonalisation que l’ingénieur utilise, surtout dans ceux qui vont aux Mines, aux Ponts, à Centrale, tout ça, on voit bien, pour eux c’est vraiment très utile, quoi, la diagonalisation. Et grâce finalement à la diagonalisation, on s’est retrouvé à avoir des, l’algèbre a survécu, a survécu mais avec évidemment, à chaque fois qu’il y avait à tailler dans le lard, on voulait un peu tailler l’algèbre, d’accord. Bon alors maintenant quelle est l’utilité… alors la fac c’est quand même d’abord un autre cursus. C’est pas les classes prépa, dans le sens que, on se dit pas : « 90% des gens iront dans des écoles d’ingénieur, et il faut qu’ils fassent de l’analyse, des choses comme ça ». Donc là c’est plus un cursus, ben, universitaire où la connaissance est déjà, pour moi, importante en elle-même, la connaissance de la matière. Ceux qui veulent faire des mathématiques et a priori, on aimerait qu’ils aillent relativement loin, ben euh on sait qu’il va y avoir des gens pour qui ça, ça aura été juste une aventure de deux ans, mais pour ceux qui iront plus loin, il y a l’algèbre, il y a l’analyse, et pourquoi l’algèbre : ben par rapport à l’analyse c’est simple. L’algèbre, on travaille sur n’importe quel corps. L’analyse, on va plutôt travailler sur R et sur C, donc bon parce que le monde s’apparente bien aux problèmes qu’on a sur les réels. Mais ce qu’il y a c’est que, on voit bien que quand on a un problème d’arithmétique, un problème sur Z, ben on a envie de le résoudre en passant au quotient Z/pZ et ensuite là-dessus ben on tombe sur des corps mais ces corps sont pas algébriquement clos donc il faut prendre des extensions, des clôtures algébriques ou simplement des extensions idoines. Et du coup, ben, il est intéressant de travailler sur un corps quelconque. Là il y a des trucs, des problèmes un peu de nature topologique, nananan, la continuité tout ça qui vont maintenant nous échapper et par contre les fonctions qu’on va avoir, les fonctions intéressantes puisqu’on a pas cette continuité ou des suites de Cauchy, des sous-trucs qui convergent, des séries, des choses comme ça, tout ce qu’on va avoir comme fonctions ben ça va être les fonctions polynomiales finalement. Donc on se retrouve à faire, ben ce qu’on appelle de l’algèbre. Donc l’arithmétique c’est, les méthodes de l’algèbre ont été développées, en tout cas beaucoup d’entre elles pour pouvoir faire de l’arithmétique. Donc à partir du moment où on fait un cursus algébrique, il faut savoir le défendre aussi et ces problèmes d’arithmétique, ainsi que les problèmes justement de diagonalisation, qui sont les deux problèmes types, qui justifient qu’on ait des bases algébriques, quoi, qu’on ait besoin de bases algébriques. Dans les classes d’ingénieur, dans les classes de futurs ingénieurs et les classes prépa, bien sûr, ces problèmes là sont, on a plus envie de leur dire : « on fait de l’algèbre parce qu’il y a de la diagonalisation et parce que après, quand vous voulez voir des contraintes, des forces dans un système ben vous allez devoir diagonaliser, quand vous allez voir si un**

**pont tiendra, il faudra regarder les contraintes qu'il y a entre les différents points spéciaux du pont et puis il faudra calculer une matrice, faudra la diagonaliser, bon, voilà c'est ça que les gens ont en tête, ça entre autres, pourquoi pas. Mais en fac, pour moi c'est pas ça l'idée et voila donc en gros, il faut habituer les gens assez tôt aux problèmes d'arithmétique parce que les nombres c'est extrêmement primitif, c'est un plaisir qui nous relie à l'enfance. Il y a des gens qui aiment les nombres. Moi je sais que j'adore compter, j'ai l'impression de bien comprendre un objet, même un groupe, tu vois quand je fais les groupes en M1, j'ai envie de les regarder sur les corps finis, parce que dans les corps finis, on compte et compter c'est une façon de comprendre. Et quand on compte, quand on a l'habitude de compter, c'est là qu'on se rend compte concrètement que les groupes, c'est très utile quoi. Si on veut compter, ben c'était dans le devoir, des grassmanniennes, ben on se rend compte que c'est utile d'avoir un groupe qui agit dessus et après on a plus qu'à compter le groupe, et puis compter les orbites etc. Ca c'est, voila quoi, l'arithmétique, le fait de compter, c'est des plaisirs de base qui nous ramènent au vrai plaisir des maths, pour moi, et qui permettent d'accepter ensuite qu'on nous parachute des notions abstraites parce que après on veut avoir le résultat tout de suite, on veut que ça serve à compter encore plus de choses, faut que ça serve, quoi, voila. Donc, l'arithmétique, les équations dans Z, tout ça, c'est ça. Z c'est quand même presque, N en tout cas, c'est notre enfance, c'est ce qui nous relie, la multiplication, l'addition, tout ça c'est l'algèbre quand même, et donc je pense que c'est important de faire de l'arithmétique, tu vois, le reste de la division par 13 de 28^2006, le lemme chinois qui est un lemme qui est du 12$^{ème}$ siècle, ou quand même voila quoi, je sais pas je dis 12ème siècle comme ça, mais un truc très, très ancien quoi, donc vraiment des trucs qui correspondent à des besoins beaucoup plus primitifs que ceux de notre société de maintenant quoi, donc ça me parait être des beaux problèmes et montrer que quelque chose d'abstrait permet comme euh bon Lagrange, ou finalement, le petit théorème de Fermat permettent de torcher ces questions, je trouve ça bien, voila. Donc voila pourquoi, ces questions. Je suis plus convaincu par ces trucs là que par des problèmes du style montrer que f est injective, montrer que bon, voila. Il faut quand même, il en faut parce qu'il faut exercer les nouvelles théories, faut les exercer, faut en faire des mécanismes, faut faire des exercices dessus, faut vérifier s'ils ont bien compris les nouvelles notions mais il faut toujours les relier aux problèmes principaux, on a des restes de division, voila, c'est un problème inverse par rapport à un problème qu'ils avaient avant, ils avaient n et b et il fallait qu'il trouve le reste maintenant ils ont des restes et il faut qu'il trouve n quoi. Finalement c'est un chemin qu'ils connaissent bien**

FB : Ok et d'un point de vue pratique, est-ce que vous savez ce qu'il y a en arithmétique dans le secondaire ou pas ?

**PC : Oui, oui, oui, oui, ah ben oui, j'ai été prof pendant, euh, j'ai été prof pendant 12 ans dans le secondaire**

FB : Ah oui d'accord

**PC : Le secondaire, je connais bien, ceci dit, ça a baissé depuis, ça baissait déjà pendant que j'y étais. J'étais prof aux Antilles, après j'ai été prof à Paris, et j'ai passé ma thèse tout en enseignant dans une première et une terminale donc je connais bien. Et j'ai maintenant mes gosses qui sont en première, un fils en première et puis une fille en quatrième**

FB : d'accord

**PC : donc j'ai suivi tout ce cursus. Je me rends bien, bien compte de leurs difficultés, de tout ça. Ca, alors là, c'est un truc que, oui, je connais bien.**

FB : en fait, après dans l'étude, je vais différencier ceux qui étaient en terminale S spé maths et donc qui avaient déjà vu tous les théorèmes

**PC : Oui, oui bien sûr**

FB : de ceux qui l'avaient jamais fait

**PC : chaque année moi je leur demande, vous avez fait une spécialisation ou vous avez pas fait. Et c'est vrai qu'y en a qu'on fait une spécialisation, y en a qu'ont pas fait. On est obligé de faire avec quoi. On est obligé de faire avec un tronc commun et puis faire comme si en se disant, bon ben si ils ont fait la spécialisation, tant mieux, ça leur rajoutera quelque chose et puis sinon**.

FB : Donc alors après, pour la construction des questions du sujet…

**PC : Oui**

FB : Donc on va rentrer un peu plus dans le détail, donc déjà pourquoi est-ce que vous avez choisi de le présenter sous forme d'un système alors qu'on pouvait adopter la forme plus classique d'équations diophantiennes ? Est-ce que c'était pour faire une application du lemme chinois simple par exemple ou est-ce que là aussi

**PC : La aussi c'est sous forme d'un système *(il regarde le sujet de bac)***

FB : Par exemple dans le sujet de rattrapage de janvier, c'était une équation diophantienne classique, en fait, y avait pas le système

**PC : Oui, oui**

FB : Donc est-ce que c'était, je sais pas euh

**PC : Disons que là l'idée… Bon alors c'est deux points de vue qui finalement en théorie se valent mais en pratique sont bien différents effectivement. L'équation diophantienne, c'est une façon de dire, pour moi, dans votre passé vous avez écrit des équations de droites, ax+by=c, et là, on tombe devant un problème qui est typique en mathématiques, on sait faire sur R, donc on a une droite**

FB : cherchez les points entiers

**PC : et cherchez les points entiers et généralement aussi bien sûr y a cherchez les points rationnels. Donc par exemple dans les coniques, on a à chercher les points rationnels d'une conique, chercher les points entiers d'une conique, etc. Donc, ça vise à ce type de problème qui amène encore à des problèmes algébriques, à des problèmes d'entiers, voila. Donc on fait un lien avec ce bon vieux problème : on a une droite et on cherche des points entiers sur une droite. Alors là, présenté de cette manière là, c'est autre chose, c'est pour, c'est une égalité. Donc on a une équation et on va utiliser quelque chose qui est général et puis qu'ils ont déjà vu, c'est ce phénomène de linéarité qui est omniprésent dans les mathématiques. Et là dans ce cas là, le but de cet acheminement du problème c'est un parallélisme avec l'équation différentielle linéaire, la résolution d'équation linéaire, de système linéaire dans un corps quelconque, pourquoi pas dans R etc. C'est-à-dire qu'on a une solution particulière, une solution générale, et puis ensuite, ben on a un ensemble solution générale, et ensuite on montre que c'est la somme, toujours avec les mêmes techniques. Donc c'est vraiment montrer qu'il y a l'omniprésence en mathématiques de la linéarité. Et que dans la linéarité, on cherche des bases en quelque sorte, c'est ça un peu l'esprit. Même bon alors euh même si là encore, les bases ils en sont pas encore là, euh, là ici, quand on va chercher des solutions de n est congru à no et n congru à mo ou n1 modulo des nombres ben on va se ramener en fait à**

**la solution (1,0) pour (1,0) et (0,1) et ensuite on fera une Z-linéarité par rapport à ces solutions là. Et donc c'est cette notion qu'ils doivent avoir qu'une certaine partie des mathématiques se suffit de la linéarité et une fois qu'on a compris, euh, bon un certain nombre de petites choses de la linéarité, après on les retrouve dans des domaines totalement différents, aussi différents que l'analyse, les équations différentielles, et tout ça. Voila donc c'est, c'est ça l'idée.**

FB : Ok

**PC : C'est ça l'idée du truc. Même si là pour la solution n=0 bon ben dans un certain monde, on va devoir utiliser un déterminant, là on utilise Gauss quoi. Voila, après bien sûr les techniques changent , « quel est l'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 », c'est pour leur faire résoudre le cas 0 et puis donc qui va être l'équation, la solution générale, quoi. Donc c'est vraiment, c'est vraiment ça.**

FB : Et alors après pour construire les questions, est-ce que, enfin comment vous avez fait, parce qu'en fait le sujet de bac, lui, s'appuie plus sur la démonstration du théorème chinois, il sort, euh, il faut vérifier que le N est solution donc quand on démontre le théorème chinois c'est, euh, le calcul qu'on obtient, quoi

**PC : Oui, oui**

FB : vérifier que ça est solution donc ça on leur donne et puis ensuite

**PC : Oui**

FB : Donc ça c'est plus pour les aider à l'existence, après on a l'unicité puis là on revient à l'existence

**PC : Oui, oui**

FB : Et alors que dans le sujet que vous avez fait,

**PC : Hum, hum**

FB : On fait d'abord une question, la première question, ça parle plus de, bon on applique Bézout, donc on fait une partie de l'existence puis après vous faites déterminer l'ensemble des solutions qui vérifient, enfin ce que vous avez dit là, avec n congru à 0

**PC : Hum, hum**

FB : Donc ça serait plus aussi l'unicité puis ensuite on revient à l'existence

**PC : Hum, hum**

FB : et ça me parait moins basé, 'fin fondé sur la démonstration du théorème chinois en fait

**PC : Hum, hum**

FB : Enfin on y revient plus ou moins dans le fond mais par rapport à la forme

**PC : Effectivement mais ils n'ont pas vu la démonstration du théorème chinois, ils ne font pas le théorème chinois**

FB : Oui c'est ça on le fait en L3

**PC : Hein, euh, j'estime quand même que le théorème chinois, là à partir du moment où ils sont en fac, il faut attendre qu'ils aient vu les anneaux et puis qu'on ait le temps de parler correctement des anneaux, hein, puisque c'est ça qui est derrière. Il se dit très bien en termes d'anneaux ce théorème et euh, j'estime qu'ils sont pas censés le connaître ce théorème chinois. Alors je propose une méthode et quand on regarde la méthode, le , bon donc le 1) c'est vraiment une relation de Bézout, bien sûr, parce qu'ils ont vu la relation de Bézout, et ça, ça leur donne des points. Voila quoi, c'est ça qui est important, euh, il faut mettre une première question où ils seront à l'aise, et où ils savent que, tiens une relation de Bézout entre**

**7 et 16, ils vont la trouver et ils vont avoir des points, je sais qu'il y en a un certain nombre. Après le 2), ben bien sûr c'est, c'est le lemme de Gauss, et en parallèle, on a déjà la solution pour (0,0)**

FB : Hum, hum

**PC : Donc là, la solution, on va dire de l'équation générale associée, hein, sans second membre. Après, alors ce qu'y a c'est que, euh, trouver un entier n0 multiple de 16 qui vérifie par ailleurs n0 congru à 1, donc c'est l'idée de la base finalement (1,0). Si on avait plus de temps, évidemment, l'exercice 2 si j'avais pu, bon, les interroger pour plus de temps, j'aurai fait un truc un peu plus gros que 3, 0, j'aurais fait une question pour (1,0), pour la solution du membre de droite égal à (1,0), et ensuite le membre de gauche égal (0,1)**

FB : d'accord

**PC : et ensuite qu'ils fassent une combinaison linéaire des deux, pour les pousser, bon voila quoi, montrer : « regardez, vous êtes devant un problème linéaire, de type linéaire, c'est ça qui est derrière »**

FB : Ok

**PC : On fait de, ça rappelle l'algèbre linéaire. Voilà.**

FB : Et pourquoi par exemple, pas avoir mis la 2 après la 3, enfin peu importe, l'ordre ça avait une importance pour vous ou pas parce que

**PC : parce que**

FB : parce que finalement dans la

**PC : oui ?**

FB : la 2) est assez indépendante

**PC : bon alors c'est un choix. J'aurais pu le faire, hein, 2),3), là on va dire que y a aussi un ordre, qui est important de ce que je, de ce qui est prioritaire, qu'ils doivent savoir. Le 1) et le 2) sont pratiquement des questions de cours**

FB : d'accord

**PC : Et après c'est des questions de savoir-faire dans l'exercice. Donc le 1), je veux qu'ils sachent le faire parce que je leur ai dit « faut savoir le faire ». Le 2), c'est le lemme de Gauss, c'est une pure application du lemme de Gauss ou de dire à la fois multiples de 7 et de 16 ou de dire c'est multiple du PPCM quoi, si, c'est multiple de a et de b si et seulement si c'est multiple du PPCM. Donc sans même parler de Gauss, on peut parler juste de PPCM, c'est même mieux de le voir comme ça. Et ensuite, ensuite, ben est-ce qu'ils, après ben c'est pour départager au moins ceux qui ont lu le cours, qui ont essayé d'apprendre, et puis après ceux qui ont ce petit plus de savoir-faire, parce qu'on est en L1. Même des exercices simples comme ça, on est déçu, hein, donc au moins on écrème ceux qui ont travaillé quoi.**

FB : Alors et maintenant, pour être un peu plus précis, pourquoi est-ce que vous avez mis un coefficient égal à 0 ?

**PC : parce que pour cette linéarité, hein, et que si je veux garder l'objectif de la linéarité, et que du coup je suis obligé de poser la question (1,0), (0,1) qui sont deux questions redondantes, on a que deux heures. Donc qu'est-ce que ça va m'apporter que quelqu'un qui sache, d'accord, moi ce que je veux voir c'est est-ce qu'il a l'idée de passer de 2),3) à 4). D'accord ? Donc ça c'est le niveau supérieur de l'exercice pour voir un peu, bon, un peu les meilleurs, les happy few, hein, parce que là y en a plus beaucoup qui restent là ici, même si c'est facile, c'est très facile mais bon, c'est comme ça. Alors qu'est-ce qui se passe ? Je veux en**

**même temps, leur poser un problème intéressant, qui les, bon ils en font pas beaucoup, ils font même pas de devoirs maisons ni rien, donc faut voir que ça c'est important, ils vont y réfléchir à ce problème, ils liront la correction, des gens de l'année d'après s'intéresseront, ils se demanderont ce qu'il y a, ils chercheront à le faire etc. Donc voila, donc c'est, c'est un truc, quand même, c'est, c'est important de mettre des exercices un peu intéressants mais en même temps faut les juger dessus. Et à quoi ça me sert de juger quelqu'un, alors que je lui ai demandé de me faire le coup pour (1,0) et ensuite je vais lui faire pour (0,1). Euh, bon je sais que si il sait faire (1,0) et que si il sait pas faire (0,1) c'est qu'il a fait, bon c'est qu'il s'est endormi, ou qu'il s'est, je sais pas, il y eu un moment, une panne de stylo, j'en sais rien, mais ça va rien m'apporter. Donc j'ai as envie, là je perds mes points quoi. J'ai que 20 points sur un problème, j'ai que 20 points, sur un problème. J'ai pas envie de les perdre à faire un truc dont je sais que si il sait pas faire l'un, il sait pas faire l'autre, s'il sait pas faire l'autre il sait pas faire l'un. Du coup ça me semblait euh suffisant de mettre (3,0), ça me parait, ça me permettait d'être optimal entre un exercice intéressant mêlant l'arithmétique et la linéarité et toutes les notions parce que ce que je veux c'est que chaque question soit rentabilisée, hein, faut savoir, le cours est-ce qu'il va savoir l'appliquer au bon moment. Voilà donc c'est pour ça que j'ai mis un zéro là.**

FB : D'accord parce qu'en fait moi j'avais pas fait cette hypothèse parce que je pensais que comme après vous disiez, no multiple de 16, que très vite, il allait mettre 16x ou 16k congru à 3 modulo 7

**PC : Oui**

FB : Et ensuite retomber sur le, les exos qu'ils avaient faits en TD

**PC : Hum**

FB : Et aussi dans le cours

**PC : Hum, hum**

FB : et qui étaient faits en repassant dans les Z/pZ en fait. On quittait un peu tout ce qui était congruences

**PC : Ah oui d'accord**

FB : Et ça simplifiait

**PC : Oui, oui effectivement, j'ai pas du tout pensé à ça**

FB : Donc au départ j'avais pensé à ça

**PC : C'est pas du tout comme ça que j'ai pensé, pas du tout**

FB : D'accord

**PC : Ca aurait pu être, ça aurait pu être pensé comme ça mais**

FB : D'accord

**PC : pas du tout**

FB : Ok

**PC : pas du tout, c'était pas ça mon idée, c'est, bon, je crois que l'idée directrice c'est, bon, qui se centre dans la théorie générale de la linéarité**

FB : D'accord, je crois qu'en gros on a fait le tour

**PC : D'accord**

FB : Parce qu'après j'avais des questions sur la question 4) qui n'était pas précisée mais en gros c'est ce que vous avez dit, après ça teste la capacité à synthétiser aussi ce qu'ils avaient fait avant et puis à aller un peu plus loin.

**PC : Bien sûr**

FB : parce qu'elle est moins, enfin c'est vrai que dans les copies, il y en beaucoup qui font 1) et 2) et puis après il y a plus personne quoi.

**PC : Ben oui, oui, oui c'est sûr que c'est pas**

FB : parce que par rapport au sujet de bac, dans le sujet de bac, il y a aucune question, enfin

**PC : il y a pas de question de synthèse**

FB : où il y ait vraiment besoin de synthétiser

**PC : oui, oui**

FB : C'est la différence essentielle que j'ai trouvée, quoi, celle-là y a quand même un peu besoin de synthétiser ce qu'on a fait avant, d'utiliser ce qu'on a fait avant, de réfléchir comment ça peut servir alors que dans le sujet de bac

**PC : Ben là**

FB : C'est plus guidé quoi.

**PC : C'est-à-dire que c'est ça, ouais,**

FB : on démontre l'équivalence

**PC : on donne déjà un peu les réponses, vérifier que, d'ailleurs les mots sont là**

FB : Oui c'est ça

**PC : Y a vérifier, c'est, c'est, on a ça mais bon. Et en plus il faut bien voir que dans l'enseignement de spécialité en TS, ça, ça c'est un gros morceau c'est, quand on leur demande « qu'est-ce que vous avez vu en plus des autres », ils disent généralement ben c'est Bézout, et c'est ce genre d'équations, le reste chinois. C'est ça qu'ils voient, donc euh le bac, voila.**

**Mais bon c'est vraiment, bon ben écoute j'avais oublié ce, je te remercie de m'avoir, j'avais oublié complètement ça bon en me relisant c'est vrai que, voilà quoi. Après le reste de la division de 13 par 28^2006, évidemment on était en 2006 alors fallait bien, faut bien trouver un truc rigolo avec 2006. Toutes les années sont pas toujours**

FB : favorables

**PC : liées à une propriété arithmétique. (37'24 -> 37'55)**

FB : Merci

## B- TRANSCRIPTION DE L'ENTRETIEN AVEC P.LAVAURS

**PL : Et voilà, on va voir les questions**

FB : Donc déjà est-ce que vous avez vu que j'avais mis un fichier joint ?

**PL : J'ai vu, j'en ai une copie là, voilà. J'ai mon fichier joint, voila, j'étais en train, j'étais en train de regarder, l'examen, le truc de bac que j'avais pas regardé encore, j'étais juste en train de jeter un œil**

FB : D'accord parce que je l'avais aussi envoyé à M Caldero mais lui il avait pas fait attention

**PL : Il avait pas fait gaffe. Ouais ?**

FB : Donc je vous avais amené les sujets au cas ou. Voilà. Donc je vais vous repréciser un peu ce que je fais

**PL : Ouais ?**

FB : Donc c'est un TER.

**PL : D’accord**

FB : Je sais pas si vous savez, Travail Encadré de Recherche

**PL : Oui bien sûr ça je sais**

FB : Donc en didactique des maths, encadré par Mme Battie

Au cœur de mon travail, c’est l’analyse d’un exercice d’arithmétique donc c’est l’exercice deux du sujet que vous aviez fait.

**PL : D’accord.**

FB : Donc le sujet de bac, en fait, il me sert un peu de référence

**PL : Ok**

FB : Qu’est-ce qui est différent dans ce que doivent savoir les élèves,

**PL : D’accord**

FB : Dans les raisonnements. Donc le but de ce travail, c’est d’analyser un peu, en fait on se penche surtout sur la transition lycée-université

**PL : Ouais**

FB : Qu’est-ce qui peut expliquer, un peu l’échec en première année. Donc vous, je viens vous voir en tant que concepteur du sujet

**PL : Ouais**

FB : Et enseignant aussi

**PL : Bien sûr**

FB : Pour savoir ce qui est transmis en arithmétique. Donc d’abord, on va faire une mise au point sur les connaissances transmises

**PL : Oui**

FB : Donc en fait j’ai récupéré le cours sur le site de M Caldero mais c’est le votre

**PL : C’est le cours que je faisais traditionnellement**

FB : Voila c’est ça. Et dans ce cours, il y a une section sur les sous-groupes de Z

**PL : Ouais**

FB : Et j’ai récupéré, enfin Mme Battie avait photocopié le cours d’un élève qui suivait votre amphi et lui il a pas cette section

**PL : Tout à fait cette section, elle est restée imprimée mais elle n’est plus faite, elle n’a jamais, je l’ai peut-être faite une année où j’avais le temps, elle n’est pas faite, elle n’est pas au programme**

FB : D’accord

**PL : Tout à fait**

FB : D’accord. Et par rapport à la présentation des Z/nZ,

**PL : Ouais ?**

FB : Dans votre cours c’est avec la relation d’équivalence

**PL : Ouais**

FB : Et Mme Battie m’a dit que ça avait été fait, en fait, euh, présenté sous la forme d’un ensemble de 0 à n-1

**PL : Alors que je me souvienne, je faisais plus de cours, je faisais plus que des TD l’an dernier, je pense… Est-ce que je faisais un cours ? ou je faisais un cours…**

FB : Il me semble que vous aviez deux amphis

**PL : Oula, je faisais même deux amphis, bon ben effectivement c'est déjà vieux. Après le deuxième semestre a effacé la suite. Je sais que j'avais une préférence pour le faire sans parler de la relation d'équivalence, personnellement, je sais que quand j'avais tapé le cours, j'avais fait pour me conformer à, aux collègues qui préféraient ça, en disant, il faut quand même les initier aux structures quotients, donc il est probable que j'ai fait comme… Philipe Caldero est accommodant, donc très probablement, j'ai fait comme je préfère à ce niveau là, c'est-à-dire comme étant l'ensemble 0, n-1**.

FB : D'accord, pour vous le but c'est pas d'introduire, enfin c'est d'éviter d'introduire la relation enfin, le quotient quoi

**PL : Oui je pense que les structures quotient ça passe très, très mal. Relations d'équivalence, ils ont beaucoup de mal à comprendre, déjà je suis critique sur le fait qu'on fasse dès la première année la notion de relations d'équivalence, alors ensembles quotients, c'est plutôt pire**

FB : D'accord. Ok. Donc, et aussi, y avait juste une autre question, sur la définition des nombres premiers entre eux

**PL : Oui ?**

FB : Donc dans votre cours, vous parlez de, euh, diviseur commun égal à un et dans le cours de l'élève c'est PGCD = 1 qui est dit explicitement. Alors c'est juste un détail

**PL : Ouais ?**

FB : Mais je me disais que PGCD, ça, après ils pouvaient plus penser à faire l'algorithme d'Euclide que si on parle de diviseur commun

**PL : Tiens, je dois dire que c'est le genre de truc où je me pose même pas la question. Ce que je peux dire au tableau, c'est ce qui me passe par la tête, j'aurai pas remarqué quoi**

FB : D'accord

**PL : Voila j'ai dit au tableau en termes de PGCD, et peut-être que trois ans avant j'avais écrit en termes de diviseurs communs sans penser qu'il pouvait y avoir une nuance pour la compréhension**

FB : C'est plus sur la forme

**PL : Non mais c'est important de remarquer ce genre de choses**

FB : Donc alors maintenant, on va passer au choix du sujet

**PL : du sujet**

FB : l'exercice d'arithmétique

**PL : Ouais ?**

FB : Donc déjà pourquoi est-ce qu'il est important pour des L1 d'être testés en arithmétique parce que c'était quand même deux exercices de l'examen et je crois qu'il y en avait que 4 parce que là je vous ai transmis mais il manque une feuille

**PL : Alors c'est ça, alors j'ai retrouvé moi, j'ai des, j'ai des archives, je sais pas si Philippe Caldero les a trouvées. J'ai cherché dans mes mails tout ce qui parlait de ce sujet.**

FB : D'accord

**PL : Alors il y a pas grand-chose mais on avait, je sais pas si vous les avez eus. Donc ça c'est des mails qu'on s'est échangés, est souligné en rouge ce qui concerne le truc, vous allez voir c'est très rapide**

FB : Merci

**PL : Ce qui s'est passé cette année là c'est qu'il y a eu un phénomène un peu atypique, enfin qui se produit de plus en plus, c'est qu'on avait des soucis pour finir le programme dans certains groupes de TD**

FB : D'accord

**PL : Donc déjà, il y a une fin de programme sur laquelle on ne pouvait pas les évaluer**

FB : D'accord

**PL : Toute la fin des espaces vectoriels. Ensuite faut pas oublier qu'il y a en pratique, un partiel en milieu de semestre, du moins il y avait dans ce système là, donc le début de semestre est davantage, est déjà évalué par le partiel. Donc l'examen a un biais, il porte un eu plus sur la fin du programme que sur le début, sans négliger complètement le début. Et comme la toute fin on pouvait pas on se trouve artificiellement à mettre un peu trop de points, enfin un peu trop, beaucoup de points à l'arithmétique, cette année là.**

FB : D'accord donc c'était, euh, plus ou moins dicté par les circonstances

**PL : C'est dicté par les circonstances, les choses sont énormément dictées par les circonstances ici parce qu'avec ce calendrier sur douze semaines, qui est, et ces unités d'enseignement extrêmement morcelées, en pratique ce qui est fait en fin de semestre on peut pas trop le mettre dans les examens donc il reste un matériel limité.**

FB : D'accord et l'arithmétique pour vous, en quoi euh, c'est intéressant ? Par rapport aux raisonnements ? Parce qu'on part de notions assez simples finalement et puis ça amène à faire des raisonnements un peu développés.

**PL : Oh, pas plus qu'autre chose, hein, euh moi je, à titre personnel, je ne suis pas convaincu qu'il faudrait la faire si tôt. Euh là je pense qu'on leur répète le même point de vue qu'en terminale, on est peut-être plus exigeant dans là façon dont on demande qu'ils rédigent l'exercice et encore je suis pas sûr, je sais pas, je sais pas comment se corrige les copies de bac, comment on enlève des points aux copies mal rédigées. Nous, c'est vrai qu'on les enlève pas autant qu'on menace de le faire.**

**On fait de l'arithmétique par une sorte de reproduction des programmes à l'identique. On négocie tous les quatre ans la réécriture des programmes, y a des gens qui disent c'est important faut le faire tôt, moi je suis pas forcément convaincu. Voilà, c'est, c'est l'inconvénient du programme fait de façon très démocratique. Quand le programme est fait par un seul homme, ça peut être une catastrophe ou ça peut être très bien, quand il est fait de façon démocratique, on évite, on évite la catastrophe mais en échange on n'a plus beaucoup de cohérence, on a plus beaucoup de logique. Donc l'arithmétique dans le premier semestre parce qu'il y avait des gens qui tenaient à ce qu'elle soit au premier semestre.**

FB : D'accord et est-ce que vous savez, au niveau lycée ce qu'il y a en arithmétique en fait ?

**PL : Pas, pas bien précisément. Je crois qu'on fait à peu près la même chose. On fait à peu près la même chose avec Z/nZ en plus, c'est ça l'idée que je m'en fais. Mais**

FB : C'est ça mais en fait il y a que ceux qui font la spécialité en terminale S qui en font

**PL : D'accord**

FB : Donc y a quand même

**PL : D'accord y a des gens pour qui c'est nouveau**

FB : Voila sur les copies que j'ai, y en la moitié en gros qui n'en avait jamais fait

**PL : D'accord**

FB : Et donc maintenant dans l'arithmétique, quel intérêt d'avoir pris, donc c'est par rapport au deuxième exercice

**PL : Ouais**

FB : Ou c'est une application du lemme chinois mais bon ça se ramène à des équations diophantiennes.

**PL : Oui ?**

FB : Donc quel intérêt pour vous ? Est-ce que c'est un théorème qui vous parle ? Est-ce que ?

**PL : Non honnêtement ça fait partie des exercices, si on voulait être cynique, c'est des exercices qui sont faits pour donner des points à l'examen. C'est-à-dire que quand on prépare l'examen, on sait que l'exercice traditionnel d'arithmétique autour de Bézout, c'est l'exercice qui permet aux gens qui travaillent modérément, normalement, au moins aux gens qui révisent les exercices faits en TD, les gens qui ne sèchent pas les TD et qui révisent un minimum à la maison, devraient pouvoir faire un exercice comme ça sans catastrophe. Donc c'est un exercice dont le principal intérêt est d'être stéréotypé.**

FB : D'accord

**PL : Voila**

FB : Mais après, par exemple, si on regarde le sujet de rattrapage, c'était des équations diophantiennes classiques, c'était pas sous la forme d'un système donc il y a aussi le pourquoi de la forme.

**PL : D'accord. Ben le pourquoi, c'est qu'on a deux ou trois types d'exercices stéréotypés dont on est sûr qu'ils sont faits dans tous les TD. Le sujet de rattrapage, là je l'ai pas revu depuis un an, je sais plus**

FB : Oui, oui bien sûr

**PL : de quoi il parlait mais euh je crois qu'on arrive, particulièrement… Enfin quand on prépare un sujet formel de trois ou quatre exercices, on fait en sorte qu'il y en ait deux qui soient mais vraiment extrêmement, mais extrêmement stéréotypés. Eventuellement on sait que sur les histoires de début du programme : relations ou ensembles, on fait des choses un peu plus troublantes. Après on a toujours deux exercices stéréotypés. L'idée c'est de faire l'exercice où quelqu'un qui travaille a les points**

FB : D'accord

**PL : C'est ça la logique, c'est d'évaluer le travail, de vérifier qu'ils ont travaillé plutôt que de vérifier qu'ils savent des mathématiques**

FB : D'accord et donc en fait pour vous, vous testez des points vraiment, euh si on travaille un minimum on est censé savoir répondre à toutes les questions ?

**PL : Pour moi oui, à cet exercice là au moins, pour moi cet exercice là oui**

FB : D'accord. Donc alors maintenant par rapport à la construction globale des questions du sujet, pourquoi le système vous avez un peu répondu

**PL : Ouais**

FB : Comment avez-vous construit l'exercice, choisi les questions ainsi que leur enchaînement ?

**PL : Alors là j'ai retrouvé les mails que je vous ai passés, euh donc c'est Philippe, on s'était partagé le travail, l'arithmétique, c'est Philippe Caldero qui les a écrits, il m'envoie**

FB : Ah d'accord

**PL : Voila mon brouillon et donc c'est lui qui l'a écrit donc c'est lui qui peut vous répondre plus que moi et après c'est amusant, vous pouvez regarder, ça c'est la version brouillon vous pouvez comparer avec la version définitive.**

FB : D'accord, merci

**PL : Moi j'ai fait la relecture formelle, par exemple là vous voyez là y a Bezout, il n'y a pas l'accent sur Bézout et dans le sujet définitif, il y a bien l'accent sur Bézout. Donc il y a quelques modifications formelles que j'ai rajoutées, je crois que le plan effectif n'a pas été changé, c'est les mêmes questions 1),2),3),4). Donc c'est Philippe, c'est Philippe qui avait écrit le sujet et moi j'ai seulement fait les modifications de rédaction absolument minimales.**

FB : D'accord. Ok ben donc en fait j'avais plein de questions sur comment le construire mais euh

**PL : Mais c'est pas moi alors…**

FB : D'accord donc je les ai déjà posées

**PL : Vous les avez déjà posées à Philippe**

FB : Mais c'était pour savoir

**PL : Honnêtement, comment, moi j'en ai écrit des sujets d'examen qui ressemblent à ça mais comment on construit. On prend, on prend les feuilles de TD et on fait un exercice qui est absolument assimilable aux exercices posés dans la feuille de TD, en recollant des questions qui ont été posées dans des exercices différents. Mais là c'est vraiment veiller à ce que l'exercice soit absolument semblable à quelque chose qui existe déjà sur la feuille qui a été faite, traitée en TD dans tous les groupes.**

FB : Ouais parce que dans le sujet de bac, en fait ça reposait vraiment sur la démonstration du théorème chinois, il y avait tous les mécanismes alors qu'ici la construction était un peu différente mais bon si c'est pas vous

**PL : Ouais**

FB : Et ben voila parce qu'en gros c'était la grosse partie

**PL : Ben oui c'est ça, c'est pas moi qui ai écrit le sujet, c'est pour ça que j'avais l'impression que ça irait vite ben voila ça va vite effectivement.**

FB : Non parce qu'en fait Mme Battie m'avait dit que c'était vous deux qui avaient

**PL : On l'avait fait tous les deux mais on s'était partagé les questions donc voilà, j'ai retrouvé ça. Alors j'aurai été bien embêté pour m'en souvenir si ça avait été moi d'ailleurs parce que les questions que j'ai posées, au bout d'un an… C'est vrai que… Faut voir aussi que c'est pas solennel d'écrire un sujet d'examen, on écrit des sujets de partiel, on écrit des sujets d'examen. Y a beaucoup de décorum autour des examens avec les amphis, avec les listes d'appel mais du point de vue interne un examen ça ressemble plus à une interrogation en terminale qu'à quelque chose de solennel quoi. Y a les partiels, les examens ça en fait huit, enfin maintenant y en a davantage mais en maths sur une année, ils auront au total une douzaine de copies qui comptent maintenant, plus peut-être même 16 enfin ils vont avoir 15 notes qui comptent donc chacune c'est un sujet parmi d'autres.**

FB : D'accord bon ben je crois qu'on va arrêter parce que

**PL : Voila**

FB : Finalement

**PL : Vous allez, vous allez avoir assez de matériel ? Philippe a pu vous dire un peu plus de choses ?**

FB : Ah oui, oui, il a été bavard

**PL : Ah il est bavard, ben très bien.**

## *ANNEXE 4*

## GRILLES D'ANALYSE DES COPIES

Existence :

<table>
<tr><td rowspan="2">N° d'étudiant de la copie</td><td colspan="4">PGCD (7 ; 16) = 1</td></tr>
<tr><td>Décomposition en produit de facteurs premiers</td><td>7 est premier et ne divise pas 16</td><td>Algorithme d'Euclide</td><td>Argument faux</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">N° d'étudiant de la copie</td><td colspan="7">Relation de Bézout associée à 7 et 16</td></tr>
<tr><td colspan="2">Relation trouvée, question 1</td><td colspan="2">Relation trouvée, question 3</td><td colspan="2">Relation fausse</td><td rowspan="2">Pas de relation</td></tr>
<tr><td>Avec Euclide</td><td>A la main</td><td>Avec Euclide</td><td>A la main</td><td>Relation trouvée</td><td>Euclide tenté ?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">N° d'étudiant de la copie</td><td colspan="9">Solution particulière</td></tr>
<tr><td colspan="6">Solution particulière de $n_0$ multiple de 16 et congru à 1 modulo 7</td><td colspan="3">Solution particulière de E</td></tr>
<tr><td colspan="3">Travail dans Z/7Z</td><td colspan="3">Traduction de la première congruence après y avoir injecté $n_0 = 16k$</td><td rowspan="2">Solution particulière égale à $3n_0$ avec justification</td><td rowspan="2">Solution juste sans justification</td><td rowspan="2">Solution à la main</td></tr>
<tr><td>Bézout</td><td>Retour à n0</td><td>échec</td><td>coeff adaptés</td><td>coeff à la main</td><td>retour à Gauss</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Unicité :

<table>
<tr><td rowspan="4">N° d'étudiant de la copie</td><td colspan="9">Ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16</td></tr>
<tr><td colspan="6">Ensemble correct</td><td colspan="3">Ensemble faux</td></tr>
<tr><td colspan="4">PPCM</td><td colspan="2">gauss</td><td rowspan="2">Donnée de quelques valeurs</td><td rowspan="2">Problème avec la définition de l'ensemble</td><td rowspan="2">autre</td></tr>
<tr><td>Sans justif</td><td>PGCD = 1</td><td>Relation PGCD PPCM</td><td>Relation et PGCD = 1</td><td>système</td><td>16k=7k'</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Question Bilan :

| N° d'étudiant de la copie | Ensemble des solutions de (E) | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ensemble correct | | | | | | Ensemble faux | |
| | On ramène n à n0 puis question 2 | Gauss au lieu de la question 2 | | Traduction dès le départ et retour à la tâche routinière (pas de bilan) | | Evocation du phénomène de linéarité (je somme la solution particulière et la solution générale) | Erreur héritée mais une des idées précédentes (préciser) | autre |
| | | Gauss cité | Gauss pas cité | Gauss cité | Gauss pas cité | | | |
| | | | | | | | | |

## *ANNEXE 5*

## SELECTION DE COPIES

Dans cette annexe, on trouvera l'exercice 2 dans son intégralité dans 7 copies : les copies 8, 23, 24, 26, 29, 52 et 56. On a essayé de prendre des copies différentes en se basant principalement sur la résolution de la question 4. (8 et 23 sont des NonSmaths, 24, 26, 29, 52 et 56, sont des Smaths)

La copie 23 appartient à l'étudiant qui s'affranchit totalement de l'exercice.

La copie 52 est représentative de l'ensemble des étudiants qui avaient en main toutes les informations pour répondre à la question 2 et qui pourtant s'arrêtent après la question 3.

La copie 8 est représentative des copies de la catégorie 2 définie dans le traitement de la question 4

La copie 24 est représentative des copies de la catégorie 3.

La copie 26 est représentative des copies de la catégorie 4

Les copies 29 et 56 sont représentatives de la catégorie 5. On a choisi d'illustrer avec ces deux copies les deux méthodes de résolution de la question 4 explicitées dans la résolution linéaire *(cf. Annexe 2)*

Copie 23

[Chin]

**UNIVERSITE**

**CLAUDE BERNARD**

**LYON 1**

23

**Année universitaire :** 2006 / 2007

r, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Diplôme :

Epreuve : Algèbre

Date : 19/ 12 /2006

NOTE : 0,5/20

Numéro à reporter sur les intercalaires : 2089002 Nombre d'intercalaires : 2089002

0

Exercice 2

$\begin{cases} n \equiv 3 \ [7] \\ n \equiv 0 \ [16] \end{cases}$

on suppose $\begin{cases} n = 7 + 3x \\ n = 16y \end{cases}$

on a $3x - 16y = -7$

Il existe un résultat

$3 \times 3 - 16 \times 1 = -7$

donc on a $x = 3 \quad y = 1$

on suppose $3x_1 - 16y_1 = -7$ ①

$3x_2 - 16y_2 = -7$ ②

① − ② $3(x_1 - x_2) - 16(y_1 - y_2) = 0$

on a $3x - 16y = 0$

donc $x - x_1 = 16k$

$y_1 - y_2 = 3k$

$\Rightarrow x = 16k + 3 \quad , \quad y = 3k + 1$

donc $n = 7 + 3(16k+3) = 48k + 16$

on a $n_0 \equiv 7 [7]$

$n_0 \equiv 0 [16]$

le même méthode

$7x + 7 = 16 y$

$7x - 16y = -1$

$x_1 = -7$ , $y_1 = -3$

$$\begin{cases} 7x_1 - 16y_1 = -1 & ① \\ 7x_2 - 16y_2 = -1 & ② \end{cases}$$

① - ② $7(x_1 - x_2) - 16(y_1 - y_2) = 0$

donc $x_1 - x_2 = 16k$

$y_1 - y_2 = 7k$

Finalement $x = 16k - 7$ $y = 7k - 3$

$n_0 = 7x + 7 = 16y = 112k - 48$

quand $k = 1$ $n_0 = 64$

donc l'ensemble des solution $E = \{k / 48k + 16$ ou

$112k - 48\}$

Copie 52

UNIVERSITE

CLAUDE BERNARD

LYON 1

52

**Année universitaire :** 2006 / 2007

Diplôme : Licence Math / Info

Epreuve : Algèbre I

Date : 19/12/06

NOTE : 7,5

Numéro à reporter sur les intercalaires : 2025607

Nombre d'intercalaires : 3

Exercice 2

1. Montrons que 7 et 16 sont premiers entre eux

Pour cela appliquons l'algorithme d'Euclide

| | | | |
|---|---|---|---|
| dividende | 16 | 7 | 2 |
| diviseur | 7 | 2 | 1 |
| quotient | 2 | 3 | 2 |
| reste | 2 | 1 | 0 |

Donc PGCD(16,7) = 1

Donc 16 et 7 sont premiers entre eux

[redacted]

$$1 = 7 - 3\times 2$$
$$= 7 - 3(16 - 7\times 2)$$
$$= 7\times 7 - 3\times 16$$

1,5

Donc une relation de Bézout associée est

$\underline{7\times 7 - 3\times 16 = 1}$

0,5

2. L'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 est l'ensemble des multiples du PPCM de 7 et de 16 qui est 112 (en effet PGCD(16,7)×PPCM(16,7) = 16×7 = 112).

3. <u>Trouvons un entier $n_0$ multiple de 16 qui vérifie par ailleurs $n_0 \equiv 1\ [7]$</u>

D'après la relation de Bézout

$$7\times 7 = 3\times 16 + 1$$
$$-7\times 7 = -3\times 16 - 1$$
$$-7\times 7 = -48 - 1$$

Donc 7 divise $-48-1$

$\boxed{\text{donc } -48 \equiv 1 [7]}$

<u>Déduisons en une solution du système (E) :</u>

$-48 \equiv 1 [7] \Rightarrow -48 \times 3 \equiv 3 [7]$

$\Rightarrow -144 \equiv 3 [7]$

3 1

or $-144 \equiv 0 [16]$

<u>Donc $-144$ est une solution du système (E,</u>

4.

Copie 8

Exercice 2 :

1°) $a$ et $b$ sont premiers entre eux si $PGCD(a,b) = 1$.
Pour trouver le PGCD de $a$ et $b$, on utilise l'algorithme d'Euclide ou une décomposition en facteurs premiers.

$PGCD(7,16) = 1$ ; Algorithme d'Euclide :

$16 = 7 \times 2 + 2$

$7 = 2 \times 3 + \boxed{1}$ Donc $a$ et $b$ sont premiers entre eux.

$2 = 1 \times 2 + 0$

Identité de Bézout : $PGCD(a,b) = xa + yb$ ; $x, y \in \mathbb{Z}$.

$1 = 7 - (2 \times 3)$

$1 = 7 - ((16 - 7 \times 2) \times 3)$

$1 = \underset{x}{7} \times 7 \underset{y}{-3} \times 16$

3½

2°) 7 et 16 sont premiers entre eux donc leur PPCM est $7 \times 16$.
Les entiers relatifs multiples de 7 et 16 sont donc tout les nombres de la forme :

$x \times (7 \times 16)$ avec $x \in \mathbb{Z}$.

3°) Pour $n_0 = 64$ $(16 \times 4)$ on a $64 = 1 [7]$.

$64 \times 3 = 1 \times 3 [7]$.

4°) Les solutions du système sont donc de la forme :

$\underset{64 \times 3}{\underset{\shortparallel}{192}} + (x \times (7 \times 16))$ avec $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Calcul du reste de la division de $28^{2006}$ par 13 :

<u>Copie 24</u>

[redacted]

<u>Exercice 2</u>

1) $16 \,|\, \underline{7}$    $7 \,|\, \underline{2}$    donc pgcd $(16,7)=1$ donc 16 et 7 sont premiers entre eux.

$\;\;\;2 \,|\, 2$      $1 \,|\, 3$

La relation de Bézout associée se déduit de :

$1 = 7 - 3\times 2$

$1 = 7 - 3(16 - 2\times 7)$   car $2 = 16 - 2\times 7$

$1 = 7 - 3\times 16 + 6\times 7$

La relation de Bézout associée est donc :

$1 = 7\times 7 - 3\times 16$.

2) $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $\text{pgcd}(a,b)\times \text{ppcm}(a,b) = ab$

ici $\text{pgcd}(7,16) = 1$ donc $\text{ppcm}(7,16) = 7\times 16 = 112$

donc les multiples communs de 7 et 16 sont : $\{112k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

3) supposons $n_0 \equiv 1\,[7]$

alors $n_0 = 7q + 1$    $q \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n_0 = 7q + 7\times 7 - 3\times 16$

$\Leftrightarrow n_0 = 7(q+7) - 3\times 16$

supposons maintenant $n_0 \equiv 0\,[16]$

$\Leftrightarrow 7(q+7) - 3\times 16 \equiv 0\,[16]$

$\Leftrightarrow 7(q+7) \equiv 0\,[16]$

$\Leftrightarrow q+7 \equiv 0\,[16]$   car $\text{pgcd}(7,16) = 1$

$\Leftrightarrow q \equiv 9\,[16]$

On a donc $q = \cancel{16}k + 9$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

posons $k = 0$ alors $q = 9$

or $n_0 = 7q + 1 = 64$

on peut vérifier que $64 \equiv 1[7]$ et $64 \equiv 0[16]$ //

On $\begin{cases} 64 \equiv 1[7] \\ 64 \equiv 0[16] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+64 \equiv 3[7] \\ 3+64 \equiv 0[16] \end{cases}$ car 3 et 7 premiers entre eux

$\Rightarrow \begin{cases} 192 \equiv 3[7] \\ 192 \equiv 0[16] \end{cases}$

3

192 est donc une solution de (E) /

4) l'ensemble ~~de~~ des solutions de (E) est donc :

NON

$\{192 \times 112k \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$.

Ex 4

1) $0 \in E_1$, en effet $0-0-0=0$

~~suppo~~ soit $u \in E_1$, soit $v \in E_1$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $v\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $u+\lambda v \begin{pmatrix} x+\lambda x' \\ y+\lambda y' \\ z+\lambda z' \end{pmatrix}$

1

$x+\lambda x' - (y+\lambda y') - (z+\lambda z') = \underbrace{x-y-z}_{0} + \lambda(\underbrace{x'-y'-z'}_{0}) = 0$

donc $u+\lambda v \in E_1$ donc $E_1$ est un sous espace de $\mathbb{R}^3$

2) Soit $u \in E_1 \cap E_2$ $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+y=5z \end{cases}$

1,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+z \\ 2(y+z)+y=5z \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=y+z \\ 3y=3z \end{cases}$

0,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=z \end{cases}$

Copie 26

1,5 b) Combien de solutions possède $z^3 = \omega$ ?

Il y a 1 solution (0) si $\omega = 0$ et 3 solutions sinon.

Donc si $\omega = 0$ $f^{-1}(\{\omega\})$ possède 1 element

si $\omega \neq 0$ $f^{-1}(\{\omega\})$ possède 3 elements

1 3. Soit $A = \{1 ; j ; \bar{j}\}$ l'ensemble des racines troisièmes de l'unité. A possède 3 elements alors que $f(A)$ en possède 1 seul, en effet $1^3 = j^3 = \bar{j}^3 = 1$.

(3) **Exercice 2.**

1,5 1. PGCD (7, 16) = PGCD (7 ; 2) = PGCD (1 ; 2) = 1

7 et 16 sont premiers entre eux.

$1 = 7 - 3 \times 2$

$1 = 7 - 3 \times (16 - 2 \times 7)$

$1 = 7 \times 7 - 3 \times 16$ Relation de Bezout.

3. $1 = 7 \times 7 - 3 \times 16$ donc $-48 \equiv 1$ [7]

$n_0 = -48$.

1 donc $3x - 48 \equiv 3\ [7]$, de plus $-144 = -16 \times 9$
donc $-144$ est solution du système $E$.

0,5 2. $PGCD(7, 16) = 1$ donc l'ensemble des entiers relatifs multiples de 7 et 16 sont les multiples de 112 c'est à dire $112k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

0 4. $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 + 7x \\ n = 16y \end{cases}$ $x, y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3 + 7x - 16y = 0$

$\Rightarrow 7x - 16y = -3$ or $PGCD(7, 16) = 1$

$\Rightarrow 7(-3a) - 16(-3b) = -3$ avec $x = -3a$ et $y = -3b$

$\Rightarrow 7a - 16b = 1$

1ère solution est $a = 7$ et $b = 3$

$\begin{cases} 7a - 16b = 1 \\ 7 \times 7 - 3 \times 16 = 1 \end{cases} \Rightarrow 7(a - 7) - 16(b + 3) = 0$

$\Rightarrow 7(a - 7) = 16(b + 3)$ or $PGCD(7, 16) = 1$

$a - 7 = 16k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$a = 16k + 7$

$7(16k) = 16(b + 3)$

$7k = b + 3$ donc $b = 7k - 3$

donc $x = -3(16k + 7)$ $y = -3(7k - 3)$

$x = -48k - 21$ $y = -21k + 9$

Conclusion : L'ensemble des solutions de $E$ est les $n$ tels que $n = 3 + 7(-48k - 21)$

$n = 3 - 336k - 147$

$n = -336k - 144$

Copie 29

[redacted]

$\Leftarrow$) Supposons que $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

$\forall x, y \in G \quad f(x) = f(y)$

$\Rightarrow f(x) \cdot f(y)^{-1} = f(y) \cdot f(y)^{-1}$

$f(y)^{-1}$ existe car $f(y) \in G'$ qui est un groupe

$\Rightarrow f(x * y^{-1}) = e'$

car $f(y^{-1}) = f(y)^{-1}$ car $f$ est un morphisme

$\Rightarrow x * y^{-1} \in \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow x * y^{-1} = e$

$\Rightarrow x = y$

Donc $f$ est injectif.

3

Exercice n° 2 :

dans $\mathbb{Z}$ $\begin{cases} n \equiv 3\ [7] \\ n \equiv 0\ [16] \end{cases}$

1) $16 = 7 \times 2 + 2$

$7 = 3 \times 2 + \underline{1}$

$2 = 1 \times 2 + 0$

Donc $\operatorname{pgcd}(16, 7) = 1$ (algorithme d'Euclide)

donc 7 et 16 sont premiers entre eux.

La relation de Bezout associé est

$1 = 7 - 3 \times 2$

$1 = 7 - 3 \times (16 - 7 \times 2)$

1,5 $\underline{1 = 7 \times 7 - 3 \times 16}$

2) L'ensemble des entiers relatifs à la fois multiples de 7 et de 16 est

$\{(7 \times 16)k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{112k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

0,5 car 7 et 16 sont premiers entre eux

et $\underbrace{\mathrm{pgcd}(7,16)}_{1} \times \mathrm{ppcm}(7,16) = 7 \times 16$

3) On cherche un entier $n_0$ multiple de 16 qui vérifie par ailleurs $n_0 \equiv 1[7]$.

Dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ qui est un groupe car 7 est premier

on a $n_0 = \dot{1}$

$\Leftrightarrow n_0 = \dot{7} \times \dot{0} - \dot{3} \times \dot{16}$ d'après 1) Bizarre.

$\Leftrightarrow n_0 = -\dot{3} \times \dot{16}$

$\Leftrightarrow n_0 = \dot{4} \times \dot{16}$

1 En revenant dans $\mathbb{Z}$ on a $n_0 = 4 \times 16 = 64$

convient. ... mais OK

Vérification: 64 multiple de 16

$64 \equiv 1[7]$

4) (E) a pour solution particulière $3 \times 64 = 192$, (voir 3))

La solution général de $(E_0) \begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[16] \end{cases}$

est $\{112k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (voir 2))

Exercice 2 :

$(E)\begin{cases} n \equiv 3\ [7] \\ n \equiv 0\ [16] \end{cases}$

1° $7\times7 - 3\times16 = 1$ (relation de Bézout)
$\Rightarrow$ pgcd $(7, 16) / 1$
$\Rightarrow$ pgcd $(7, 16) = 1 \Rightarrow$ 7 et 16 premiers entre eux.

2° Les entiers relatifs à la fois multiples de 7 et 16 sont les multiples du ppcm de 7 et 16.
ppcm $(7,16) = \dfrac{7\times16}{\text{pgcd}(7,16)} = 7\times16 = 112$
on peut décrire ces multiples par l'ensemble :
$\{ 112k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4½

3° $-3\times16 = 7\times7+1$
$\Rightarrow -3\times16 \equiv 1\ [7]$
$\Rightarrow -9\times16 \equiv 3\ [7]$
donc $-9\times16 = -144$ est solution de $(E)$

4° $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv -144\ (7) \\ n \equiv -144\ [16] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+144 = 7k & (k\in\mathbb{Z}) \\ n+144 = 16k' & (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$
$\Leftrightarrow n \in \{112k, k$
$\Leftrightarrow n+144 \in \{112k,\ k\in\mathbb{Z}\}$
$\Leftrightarrow n \in \{112k-144,\ k\in\mathbb{Z}\} = \{112k'-32,\ k'\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 3 :

$28^{2006} \equiv (2\times14)^{2006} \equiv 2^{2006}\times14^{2006}\ [13]$
$\equiv 2^{2006}\ [13]$
$\equiv 64^{2001}\ [13]$ or $64 = 13\times5-1$
Non $\not\equiv (-1)^{2001}\ [13]$ $2001+5 \neq 2001\cdot5$
$\equiv -1\ [13]$