# Optimisation d'une aire dans un tétraèdre : un exemple d'utilisation en classe quelques pistes pour une évaluation

## 1. Fiche d'identification

- **Niveau :** première.
- **Logiciel** : géométrie dans l'espace.
- **Type d'utilisation** : TP en salle info avec rédaction d'un compte-rendu.
- **Objectifs :** observer, conjecturer, démontrer.
- **Apport des TICE** : aide à l'appropriation du problème, permet la conjecture.
- **Compétences travaillées :** section d'un tétraèdre par un plan, coordonnées dans l'espace, aire d'un triangle, optimisation : distance minimale d'un point à une droite - distance minimale d'un point à un plan.

## 2. Enoncé élève

### La situation

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J\,;K)$.
On considère les points $A(5\,;0\,;0)$, $B(0\,;10\,;0)$ et $C(2\,;1\,;5)$.
Soit $M$ un point du segment $[AB]$.

*Il s'agit de déterminer la position du point M telle que l'aire du triangle OMC soit minimale et de déterminer cette aire.*

### Conjecture

Établir des conjectures à l'aide d'un logiciel adapté.

### Démonstration

Démontrer les conjectures (faire le calcul exact de l'aire minimale).

## 3. Protocole utilisé

- ***TP en salle info*** (durée 1 heure) il est demandé aux élèves de prendre des notes de leur travail en vue de la rédaction de leur compte-rendu.
- ***Rédaction d'un compte-rendu*** à rendre la semaine suivante. Ce compte-rendu étant composé d'une partie papier contenant, entre autre, les démonstrations et les fichiers informatiques réalisés.
- ***Synthèse en classe entière*** durant laquelle un point est fait sur les différentes stratégies mises en œuvre par les élèves.

# 4. Compléments pour le professeur

## • A propos du compte-rendu

Pour la rédaction du compte-rendu, les consignes données aux élèves sont semblables à celle utilisées pour les « narrations de recherche » :

> **Consignes**
>
> *Vous raconterez sur votre copie :*
>
> - *Les différentes étapes de votre recherche (vous pouvez minuter le temps, joindre vos brouillons…)*
> - *Les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait progresser ou changer de méthode.*
> - *La façon dont vous expliqueriez votre solution à un(ou une) camarade que vous devez convaincre.*
>
> *Vous rendrez avec votre copie tous les fichiers réalisés.*

***L'objectif de ces consignes étant de permettre à l'élève :***

- ***de détailler sa démarche***, que celle-ci ait ou non abouti.
- ***d'évoquer les pistes dans lesquelles il s'est engagé*** et qu'il a éventuellement abandonnées en expliquant, si possible, les raisons de cet abandon (mauvaise hypothèse, mauvaise méthode, manque d'outils mathématiques pour poursuivre, trop long …).
- ***d'exposer, la démarche finalement retenue***.

Le deuxième point est très important. Les démarches proposées permettent souvent, au moment de la synthèse en classe, une discussion très riche.
En général, les premières fois, les élèves on du mal à détailler cette partie. Ils savent exposer les pistes ayant mené à des « impasses », mais ont du mal à analyser les raisons de ces blocages.
C'est en questionnant les élèves, en particulier lors des synthèses en classes, que le professeur peut aider à développer cette réflexion critique.

L'objectif de ce type de compte-rendu n'est pas forcément que les élèves proposent « la » bonne solution ou même une solution mathématiquement rigoureuse ; mais plutôt de fournir suffisamment de matériel pour enrichir la réflexion lors d'une synthèse faite avec toute la classe.
C'est lors de cette synthèse avec toute la classe qu'une « vérité mathématique » pourra véritablement être construite.

***Intérêt à proposer ce type de consigne***

- Cela peut parfois permettre aux élèves de prendre conscience que c'est parce qu'ils maîtrisent mal certaines techniques qu'ils sont freinés à un moment donné dans leur résolution.
  C'est alors une bonne motivation pour revenir sur ces techniques.
- Cela peut aider les élèves à mettre en place des éléments de contrôle pour s'auto-valider.
- Cela peut aider à ne pas se trouver face à des travaux écrits d'élèves semblables les uns aux autres.
- Les élèves peuvent comprendre l'intérêt qu'ils ont à garder des traces de leurs recherches et à poser par écrit leurs idées (même non abouties).
  Ces acquisitions peuvent ensuite être mises à profit lors la rédaction de DM voir même de devoirs en classe.

## • A propos de la synthèse

Une fois les comptes-rendus corrigés et évalués, l'enseignant va animer une discussion en classe entière afin de rendre compte du résultat des différentes recherches. Il ne s'agit pas forcément d'élaborer une rédaction modèle, mais d'exploiter les écrits et d'en extraire des informations utiles aux élèves.
Toutefois, les élèves pourront s'imprégner de ces synthèses pour découvrir les qualités nécessaires à une bonne recherche mathématique.

## • Quelques remarques

- Lors de la séance de TP en salle info, le professeur peut prendre quelques notes sur ce qu'il observe du travail des élèves afin de s'en servir lors de la synthèse en classe entière.
- Pour les classes où trop d'élèves préfèrent ne rien écrire plutôt que d'écrire des choses fausses ; il peut être intéressant, afin d'enrichir le travail de recherche, de mettre les élèves en groupes.
  Le professeur peut, à l'issue de la séance de TP, demander à chaque groupe de faire un rapide point « à chaud » du fruit de leurs réflexions. Chaque élève étant libre, pour son compte-rendu, de s'inspirer des réflexions d'un autre groupe, à condition de le dire clairement et d'en préciser les raisons.
- Il est tout à fait possible, une fois la synthèse faite, de demander aux élèves de reprendre et compléter leurs comptes-rendus afin de rédiger une solution mathématiquement rigoureuse.

# <u>5. Quelques pistes évaluer le compte-rendu des élèves</u>

Pour que les élèves acceptent de s'investir dans ce type de rédaction, il faut bien sûr valoriser ces démarches au moment de l'évaluation. Plus ces démarches seront prises en compte, plus les élèves oseront proposer ce qu'ils considèrent a priori comme des « échecs ».

Pour l'évaluation :

↳ On peut utiliser les trois rubriques suivantes (qui regroupent chacune plusieurs critères).

- ***Maitrise des TICE - Capacité d'initiative et d'expérimentation***
  - Appropriation du problème.
  - Choix d'un outil logiciel adapté au problème.
  - Réalisation d'un fichier permettant de représenter correctement la situation.
  - Aptitude de l'élève à s'engager dans une résolution du problème.
  - Utilisation pertinente de l'outil logiciel afin d'émettre des conjectures cohérentes.
- ***Qualité de la démarche de recherche***
  - Présence d'interrogations par rapport à l'énoncé.
  - Présence d'essais, de vérifications, d'un esprit critique.
  - Observation de changements de stratégies, prise de conscience d'erreurs ou de contradictions.
  - Présence d'arguments ou d'éléments de preuve.
  - Confusions éventuelles entre données du problème et observations constatées.
- ***Qualité et rigueur de la rédaction***
  - Style d'écriture : phrases correctement rédigées, présentation claire et soignée.
  - Précision et chronologie du récit : toutes les pistes explorées sont décrites et commentés. Le déroulement et la durée de la recherche sont précisés, en respectant l'ordre chronologique.
  - Sincérité du récit : l'élève s'implique, fait part de ses hésitations, décrit ses erreurs, mentionne s'il a reçu des aides extérieures.
  - Respect des consignes.
  - Rigueur du raisonnement, utilisation d'un langage mathématique adapté.

↳ On peut accorder à chacune des rubriques une importance plus ou moins grande.
*Dans le cas de la situation proposée, chacune des trois rubriques avait la même importance.*

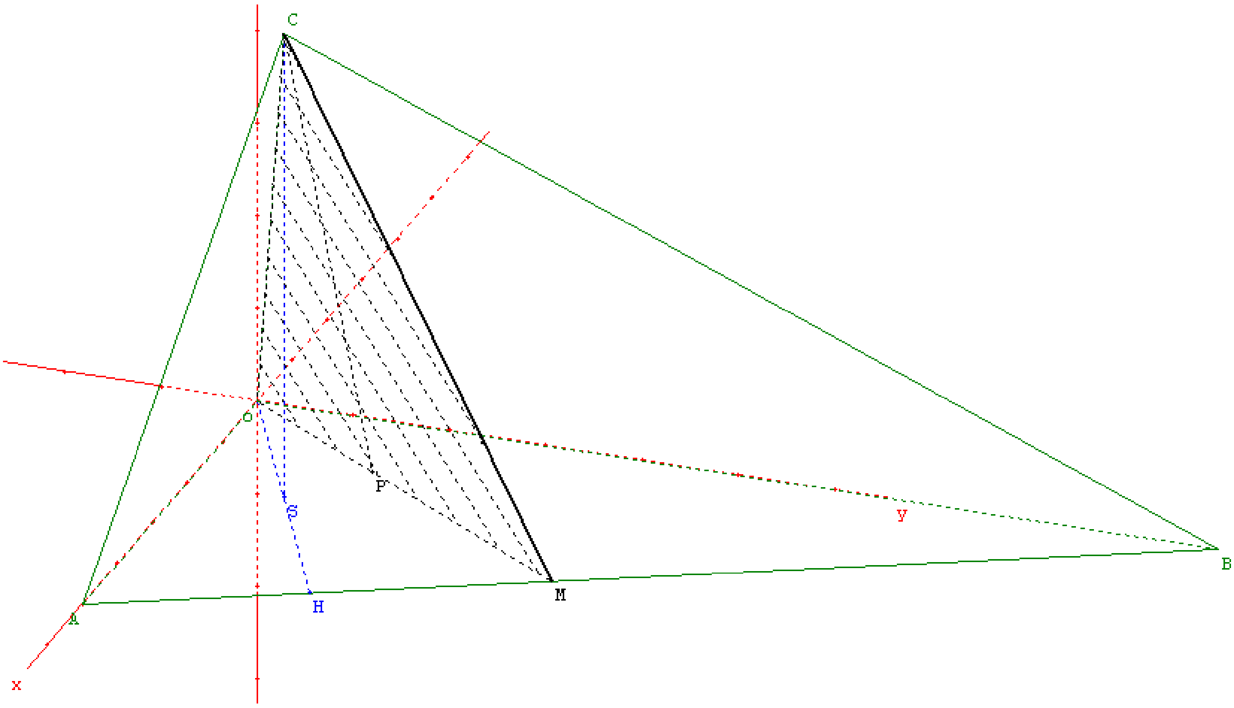
↳ On peut constituer une échelle d'évaluation pour apprécier le niveau d'appropriation de chacune de ces rubriques.
Il appartient à chacun de choisir le type d'échelle en fonction de ses besoins ; néanmoins des règles sont à respecter :
- Définir le plus objectivement possible chacune des dimensions de l'échelle.
- Eviter les échelles avec un nombre de dimension impaire.

*Dans le cas de la situation proposée, les niveaux choisis étaient :*
*- Pas de maîtrise.*
*- Maîtrise très partielle.*
*- Presque maîtrisé.*
*- Tout à fait maîtrisé.*

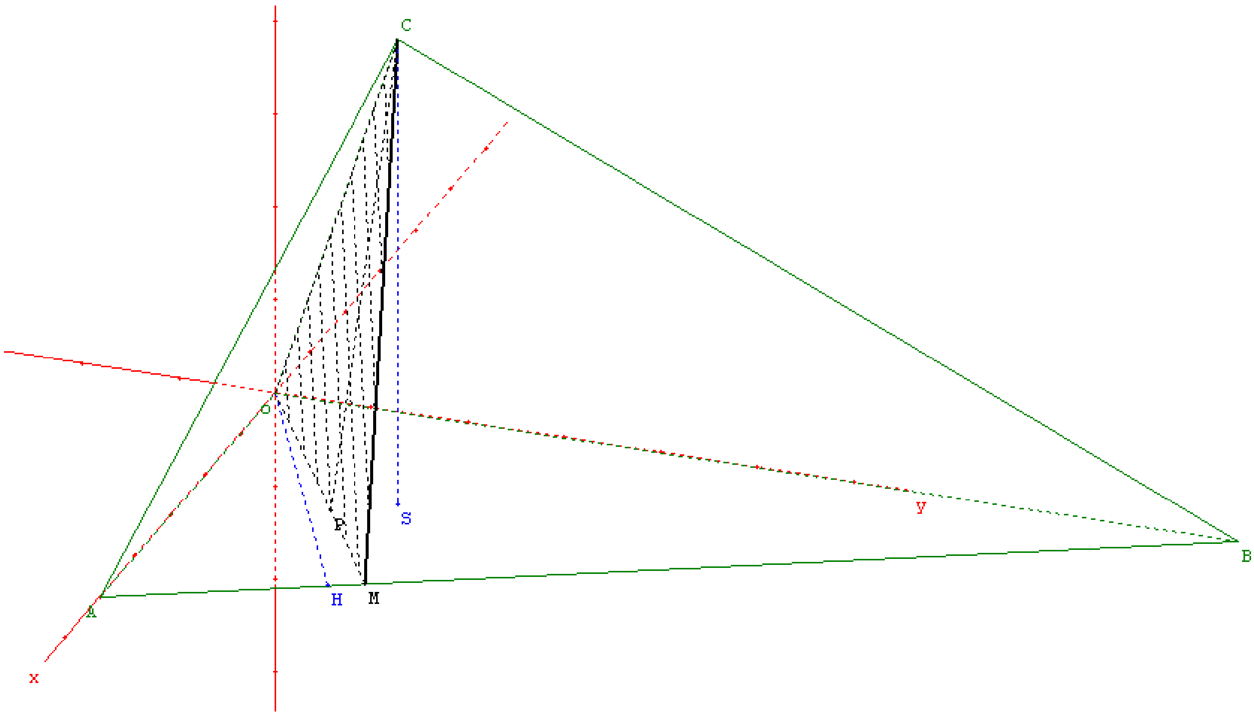
## 6. Eléments de réponse

On note : P le pied de la hauteur issue de C dans le triangle OCM.
H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
S le pied de la hauteur issue de C dans le triangle OCH.

Ce qui rend le problème réalisable sans trop de difficultés pour les élèves, c'est qu'avec les valeurs choisies, la valeur minimum pour la base (OM avec M en H) et la valeur minimum pour la hauteur (CP avec P en S) correspondent à la même position du point M.




Sinon, l'aire est minimale ni pour la position de M rendant la base OM minimale (M en H), ni pour position de M rendant la hauteur CP minimale (P en S).
Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $C(2\,;2\,;5)$.




De nombreux élèves ne se sont pas rendu compte de ce phénomène.

# 7. Extraits de copies d’élèves

*Cette activité est la deuxième de ce type proposée dans cette classe. C’est pourquoi, dans leurs comptes-rendus, les élèves commencent à donner des précisions concernant leurs recherches. Mais ils n’ont pas encore assez de pratique pour détailler suffisamment leur démarche ou pour analyser les difficultés qu’ils rencontrent.*

## • Exemple 1

Un exemple d’élève pour lequel base et hauteur sont visiblement minimum en même temps.

> Nous cherchons à ce que l'aire de OMC
> soit ?, CM et OM doivent donc l'être aussi.
> M étant un point appartenant à [AB], il faut
> que (CM) et (OM) soient perpendiculaires
> à (AB) pour que CM et OM soient
> minimaux

Pour cet élève :
En ce qui concerne la rubrique « *Maitrise des TICE - Capacité d’initiative et d’expérimentation* », il n’y a pas une bonne « appropriation du problème », et on peut se poser la question à propos d’une « utilisation pertinente de l’outil logiciel ».
En ce qui concerne la rubrique « *Qualité de la démarche de recherche* », les points « interrogations par rapport à l’énoncé », « Présence d’essais, d’un esprit critique », « Confusions éventuelles entre données du problème et observations constatées » sont eux aussi non maitrisés.

Par la suite, on peut lire :

> Après 2 heures de recherches en utilisant
> la trigonométrie, les aires et les vecteurs,
> je n'aboutie à rien d'autre.

On a une idée des pistes explorées par l’élève, mais aucune information sur les raisons qui l’on amener à renoncer.

## • Exemple 2

Un autre exemple d’élève pour lequel base et hauteur sont minimum en même temps.

> Conjecture :
> Pour que l'aire du triangle OMC soit
> la plus petite possible on obtient OM et
> CM, (les hauteurs des triangle ABO et ACB

Suit la « démonstration » de la conjecture :

> Demonstration.
> On place P, point d'intersection des droites
> $d_1$ et $d_2$ avec (AB). $d_1$ et $d_2$ sont les hauteurs
> respectivent des triangles ABO et ABC.
> Pour s'assurer que les distances OP et CP
> soient les plus courtes possibles, on peut tracer
> deux cercles de centre O et C en contacte
> avec la droite (AB). On s'apperçoit qu'ils
> se touchent en un même et unique point.

Ce point P. OP et CP sont donc les plus petites distances possibles.

Ou apparait la notion de cercle « en contact ». Ici, cet élève n’a pas su utiliser « un langage mathématique adapté ». Un rappel sur la notion de tangente à un cercle semble nécessaire.

Plus loin aussi, cet élève n’a pas su utiliser « un langage mathématique adapté » :

Pour avoir l'aire minimal du triangle OMC il suffit que les point P et M se confondent.

Des précisions sur les conditions nécessaires et suffisantes sont à prévoir.

Par contre cet élève a su calculer la valeur exacte de l’aire minimale :

L'Aire de OMC est égale a :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{OP \times QC}{2}$$

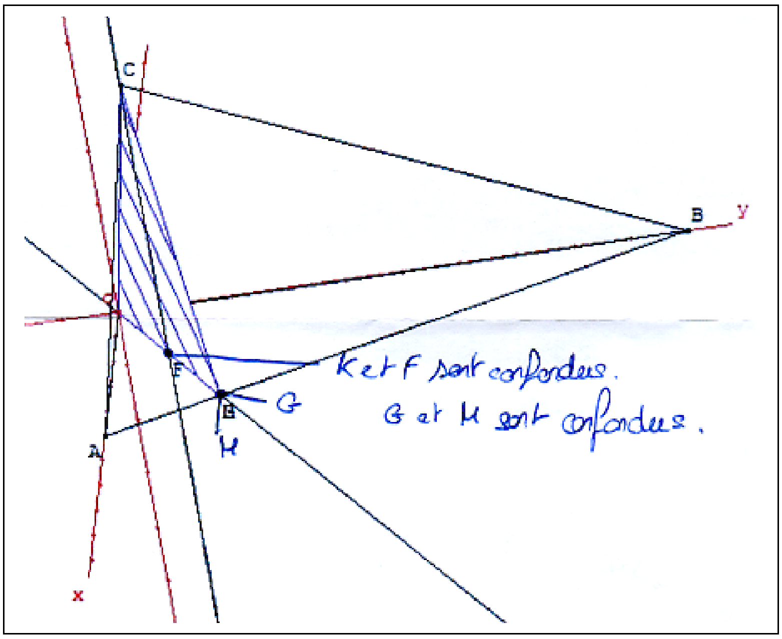
$$= \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{25}}{2}$$

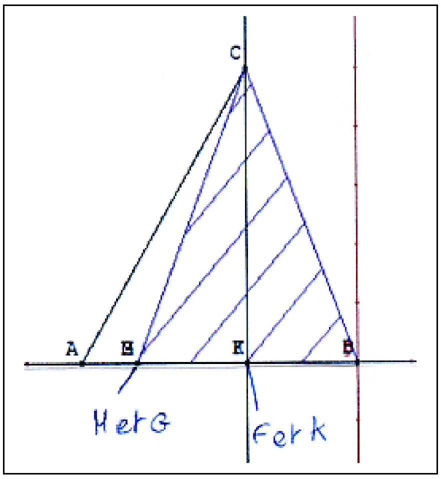
$$= 11{,}18.$$

Ce résultat correspond a celui trouver sur Geospace.

De plus, il a vérifié son résultat à l’aide du logiciel. On peut constater qu’il a su faire une « utilisation pertinente de l’outil logiciel »,

## • Exemple 3




Cet élève à bien détecté que les points (qu’il nomme F et K ainsi que G et H) sont confondus en même temps.

Pour cet élève, la rubrique « *Maitrise des TICE - Capacité d’initiative et d’expérimentation* » est bien maitrisée :
Il y a une bonne « appropriation du problème », une « utilisation pertinente de l’outil logiciel » et l’on est un présence d’un fichier « permettant de représenter correctement la situation ».

## • Exemple 4

Un autre exemple d'élève qui bien su s'approprier le problème :

On doit déterminer la position du point M sur la droite [AB] telle que l'aire du triangle OMC soit minimale. Si on se réfère à la formule de l'aire d'un triangle ($\frac{base \times hauteur}{2}$), pour que l'aire d'un triangle OMC soit minimale, il faut que le produit de la base par la hauteur soit minimal.

Mais qui n'a pas su, ou n'a pas voulu, donner de précisions quand à sa recherche d'une justification. Celle-ci ayant visiblement été infructueuse.

Mais pour prouver que l'aire du triangle OMC est minimale lorsque M est en H, il faut prouver que la hauteur de OMC est minimale lorsque M est en H. N'ayant pas pu le prouver, je ne peux pas prouver que l'aire du triangle OMC est minimale lorsque M est en H.

## • Exemple 5

Un exemple d'élève qui a manqué de rigueur dans son raisonnement : à aucun moment il n'est précisé que le triangle est rectangle. Il y a visiblement « confusion entre données du problème et observations constatées ».

On peut donc utiliser la trigonométrie à l'intérieur de ce triangle.

Je commence par calculer l'angle $\hat{A}$ en utilisant le cosinus :

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{adjacent à } \hat{A}}{\text{hypoténuse}}$$

$$= \frac{oA}{AB}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5^2+10^2}}$$

D'après le théorème de Pythagore.

$$\simeq \frac{5}{11,1803}$$

$$\cos \hat{A} \simeq 0,447$$

On utilise maintenant la fonction $\cos^{-1}$ de la calculatrice pour connaître la mesure de l'angle. On a $\hat{A} \simeq 63,43°$.

Et qui n'a pas respecté les consignes (on demande une valeur exacte).

- **Exemple 6**

Une initiative originale :

Patron du tetraèdre

La figure est en cm et a été tracée après avoir calculé toutes les longueurs.

$AO = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 + (z_O - z_A)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

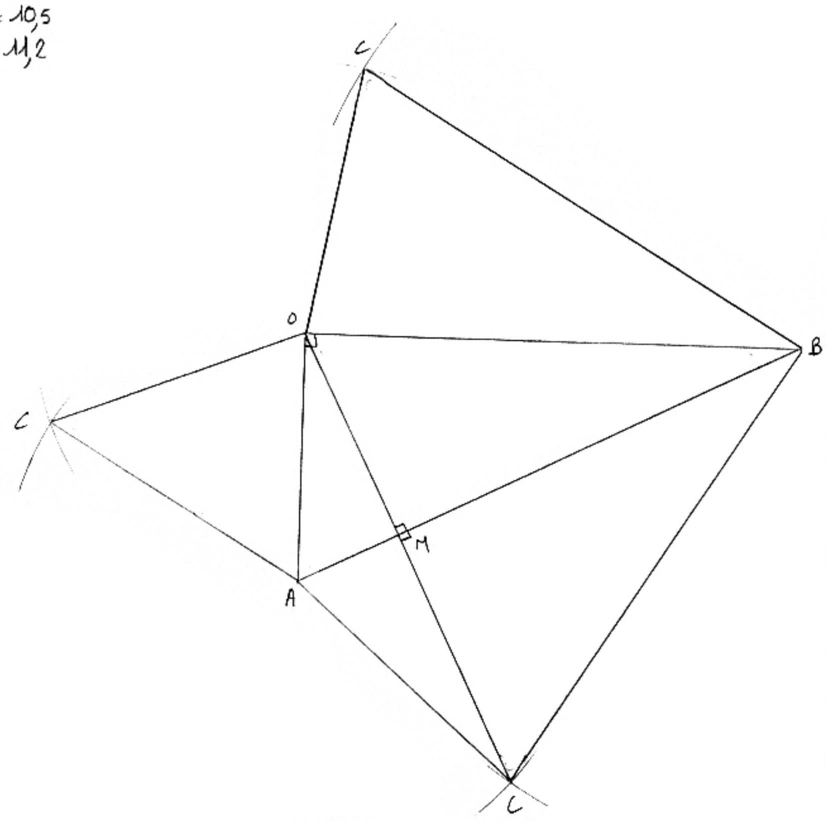
$BO = 10$ cm

$CO = \sqrt{30} \approx 5,5$

$AC = \sqrt{35} \approx 5,9$

$BC = \sqrt{110} \approx 10,5$

$AB = \sqrt{125} \approx 11,2$




Sûrement à valoriser et à évoquer lors de la synthèse.

- **Exemple 7**

Un exemple d'élève qui bien su s'approprier le problème et qui a su faire une « utilisation pertinente de l'outil logiciel » dans la mesure où il su faire une conjecture très complète :

Conjectures :

Grâce au logiciel Geoplan-Geospace, et après avoir construit la figure, je peux, en déplaçant le point M sur [AB], déterminer graphiquement l'aire minimale du triangle OCM. D'ores et déjà, je détermine l'aire minimum comme étant 11,18. Je vois ensuite que [OM] et [CM] sont les hauteurs respectives de OAB et ABC, lorsque M est placé de façon à ce que l'aire soit minimales. Enfin, je vois que le triangle OCM est isocèle.

Dans sa démonstration (ci-dessous), l'élève montre qu'il a su détecter que la position minimale correspondait à une situation particulière, et s'en est préoccupé.
Il a donc fait preuve « d'interrogations par rapport à l'énoncé » « d'un esprit critique ».

Par contre, cet élève n'a visiblement pas cherché à en connaître la raison. On peut constater ici un manque « d'arguments ou d'éléments de preuve ».

Démonstration:

Je connais la position des points A, B et C dans le repère orthonormé $(O;I;J;K)$. D'après leur coordonnées, A et B sont placés sur les axes x et y du repère.

J'ai établi comme première conjecture que M est le projeté orthogonal de C et de O dans les triangles ABC et OAB.

Par définition, la hauteur est le plus court chemin, dans un triangle, entre le sommet et la base. [CM], étant un coté de OCM, il est nécessaire, pour que l'aire soit minimale, que le segment soit le plus court possible, donc la hauteur. C'est de même pour le segment OM. Pour des raisons que j'ignore malheureusement, M est le point d'intersection des hauteurs [CM] et [OM] des triangles ABC et OAB, sur le segment [AB].(

Plus loin dans sa copie, cet élève à su faire preuve de rigueur dans sa démarche de recherche et dans sa rédaction.

Je peux donc calculer la longueur du segment [OC] :

$OC = \sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(5-0)^2}$

$OC = \sqrt{4+1+25}$

$OC = \sqrt{30}$

…

$CM = \sqrt{30}$.

J'ai précédemment trouvé le même résultat pour la longueur de [OC]. Dans le triangle OCM, $[OC] = [CM] = \sqrt{30}$.

Donc, par définition, le triangle OCM est isocèle en C

…

J'applique maintenant la formule de l'aire de OCM:

$\frac{b \times h}{2} = \frac{\sqrt{20} \times 5}{2} \approx 11,180341$.

Simplifier

Je retrouve la même valeur qu'avec le logiciel Geoplan Geospace. J'ai donc démontrer les conjectures.

On en conclus que M est situé sur [AB] à $\sqrt{125} - 4\sqrt{5}$ soit $\sqrt{5}$ de A.

et à $4\sqrt{5}$ de B.

Il a pensé à vérifier son résultat à l'aide du logiciel et a su fournir une réponse exacte et détaillée.