Suites numériques

Exercice 1 – Deux suites « classiques »

Soit θ un nombre réel et (u_n), (v_n) les suites définies par les relations :

$$u_n = \cos n\theta \qquad \text{et} \qquad v_n = \sin n\theta.$$

1. Étudier la convergence de suites (u_n) et (v_n) lorsque $\theta \in \pi\mathbf{Z}$.
2. On suppose maintenant que $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$.
   (a) En considérant les quantités $u_{n+2} - u_n$ et $v_{n+2} - v_n$, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes.
   (b) En déduire la divergence des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 2 – Suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Soit p un entier supérieur à 2 et ℓ un réel. Montrer que si pour tout $r \in [\![0, p-1]\!]$, la suite extraite $(u_{pn+r})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.
2. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors la suite (u_n) converge.

Exercice 3 – Suites adjacentes : irrationalité du nombre e

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par les relations :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\, n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{1}{k!} = \mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k$.
   En déduire que $\ell = \mathrm{e}$
3. Montrer que e est irrationnel (on pourra supposer que $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q des entiers naturels non nuls et exploiter l'encadrement $u_q < \mathrm{e} < v_q$).

Exercice 4 – Suites adjacentes : approximations décimales, par excès et par défaut, d'un réel

Soit x un nombre réel et (u_n) et (v_n) les suites définies par les relations :

$$u_n = \frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{10^n} \qquad \text{où E désigne la fonctions partie entière.}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 5 – Suites adjacentes : moyenne arithmético-géométrique

Soit a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et, pour } n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 6 – Le théorème de Césaro

À une suite réelle (u_n), on associe la suite (v_n) de ses moyennes de Césaro ; c'est la suite définie par :

$$v_0 = u_0 \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Monter que si la suite (u_n) convergence vers un réel ℓ, alors il en est de même pour la suite (v_n).
2. Étudier la réciproque (on pourra considérer la suite de terme général $u_n = (-1)^n$).
3. Que dire de la suite (v_n) si la suite (u_n) tend vers $+\infty$?

Exercice 7 – Quelques exemples d'utilisation du théorème de Césaro

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell \in \mathbf{R} \cup \pm\infty$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$
2. Soit (v_n) une suite réelle à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \ell \in \mathbf{R} \cup +\infty$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{v_n} = \ell.$$
3. Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$.
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
   (a) Montrer que (u_n) converge vers 0.
   (b) Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_{n-1}^2}$ converge vers $\dfrac{1}{3}$.
   (c) En déduire un équivalent de u_n, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 8 – Valeurs d'adhérence d'une suite bornée [1]

Soit (u_n) une suite réelle. Une valeur d'adhérence de (u_n) est un réel ℓ ayant la propriété suivante : pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble des entiers vérifiant $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ est infini. Il découle de cette définition que le réel ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n) si, et seulement si, (u_n) possède une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers ℓ.

Théorème de Bolzano–Weierstrass. De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente. Autrement dit, toute suite bornée de nombres réels possède (au moins) une valeur d'adhérence.

Soit (u_n) une suite bornée de nombres réels et V l'ensemble (non vide) de ses valeurs d'adhérence.

1. À l'aide du théorème de Bolzano–Weierstrass, montrer que (u_n) est convergente si, et seulement si, elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.
2. Pour tout entier naturel n on note $\mathrm{A}_n = \{u_k,\ k \geqslant n\}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{V} = \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} \overline{\mathrm{A}}_n$ où $\overline{\mathrm{A}}_n$ désigne l'adhérence de l'ensemble A_n.
   (b) En déduire que V est compact.
3. Montrer que si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors V est un segment.
4. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. On définit la suite (u_n) par les relations :
$$u_0 \in [a, b] \qquad \text{et pour } n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$
   Montrer que si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors la suite (u_n) est convergente.

1. Pinaillage avec les ε ! !

Exercice 9 – Approximations rationnelles d'un réel

Soit x un réel irrationnel et (u_n) une suite de rationnels convergeant vers x ; pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où p_n un entier et q_n un entier naturel non nul.
Montrer que q_n et $|p_n|$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 – Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Intégrales de Wallis. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la n-ième intégrale de Wallis est

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la suite (w_n) est positive, décroissante et vérifie, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la relation
$$w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n.$$
2. Vérifier que, pour $p \in \mathbf{N}$ $w_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$ et $w_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$; en déduire que l'on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n w_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant 1$.
4. Déduire de ce qui précède que $w_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} w_n$ puis que $w_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Formule de Stirling. On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{n!\, \mathrm{e}^n}{n^n \sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^2}$ pour un certain réel α que l'on précisera.
2. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \big(\ln u_n - \ln u_{n-1}\big)$ puis celle de la suite $(\ln u_n)$.
3. Justifier l'existence d'une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{C}\sqrt{n}\, \dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}$ puis établir la formule de Stirling :
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}.$$
4. Donner un équivalent, quand $n \to \infty$, de la probabilité, p_n, d'obtenir n fois pile lors de $2n$ jets successifs d'une pièce de monnaie supposée honnête !!!

Exercice 11 – Étude d'une suite définie implicitement

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \left] -\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi \right[$.

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution x_n dans I_n.
2. Vérifier que $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{1}{x_n}$.
3. Trouver des réels a, b, c et d tels que l'on ait, lorsque $n \to +\infty$,
$$x_n = a\, n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 12 – Avec des sommes de Riemann

Trouver les limites des suites définies par :

1. (a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$;

   (b) $v_n = f\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ où f est une fonction dérivable en 0, vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$;

   (c) $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

2. Soit r un réel strictement positif et $\mathrm{D}_r = \left\{(p, q) \in \mathbf{N}^2 \mid p^2 + q^2 \leqslant r^2\right\}$; on note N_r le cardinal de D_r. Montrer que l'on a :

$$\mathrm{N}_r \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} r^2.$$

   On pourra, dans un premier temps, prendre r entier et encadrer N_r à l'aide d'expressions faisant intervenir des sommes de parties entières.