# Séance du 21 novembre

**Exercice 1** *Agrégation Interne 2012, Épreuve 2*

1. *Démontrer que pour tout entier naturel non nul $n$, il existe un unique couple d'entiers naturels $(p, k)$ vérifiant $n = 2^p + k$ avec $k < 2^p$*

2. *Écrire sans utiliser de fonction "puissance", un algorithme donnant à partir d'un entier $n$ non nul, l'unique couple d'entiers naturels $(p, k)$*

3. *On pose $k = k_n$, donner les valeurs de $k_n$ pour $n$ compris entre 1 et 20*

indication : *On pourra utiliser l'écriture de $n$ en base 2*

**Exercice 2**

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n$ et $M$ une matrice représentant un endomorphisme $u$ de $\mathcal{L}(E)$.*

1. *On définit $F = \ker u$. Écrire un algorithme définissant $F$ comme l'espace image d'un endomorphisme $p$*

   indication : *On peut chercher à construire un projecteur*

2. *On définit $F = Im(u)$. Écrire un algorithme définissant $F$ comme le noyau d'un endomorphisme $p$*

   indication : *On pourra commencer par chercher avec une matrice $M$ diagonalisable*

**Exercice 3**

*On cherche à étudier la structure algébrique de l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices de la forme* $M = \begin{pmatrix} x+y+z & -x-y & -x-z \\ -x-z & x+y+z & -x-y \\ -x-y & -x-z & x+y+z \end{pmatrix}$ *où* $(x, y, z) \in R^3$

1. *Justifier,rapidement, que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel de dimension finie, en donner une base.*

2. *Écrire une procédure* `decompose(P,B)` *qui prend en argument une matrice $P$ et une famille $B$ de matrices $E_1 \dots E_d$* ***donnée entre crochets*** *(*`B:=[E1,...,Ed]`*). La famille de matrices est supposée libre et ce point n'est pas à vérifier dans la procédure. Celle-ce renvoie le vecteur des coordonnées de $P$ dans $B$ ou "erreur" si c'est impossible.*

   indcation : *il faut résoudre un système à $n^2$ équations et à $d$ inconnues où $n$ est la taille des matrices.*

3. *On demande de montrer que $\mathcal{A}$ possède une structure d'algèbre et d'étudier ses propriétés (associativité, commutativité, élément neutre).*

4. *Mêmes questions pour l'ensemble $Q$ des matrices de la forme* $Q = \begin{pmatrix} \alpha + i\delta & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & \alpha - i\delta \end{pmatrix}$

**Exercice 4** *Faire attention à l'indexation des matrices !*

1. *A partir d'une matrice supposée complètement régulière (on ne vérifiera pas cette hypothèse dans le programme), écrire un programme* `facLU` *ayant comme argument cette matrice et donnant comme résultat les matrices $L, U$ de sa factorisation $LU$. Pour déterminer la dimension de la matrice, on pourra utiliser* `coldim` *et pour les opérations élémentaires sur les lignes* `subsop`.

2. *comparer les résultats de* `facLU(A)` *et de* `lu(A)` *avec la matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

   *où* `lu` *est la factorisation $LU$ intégrée de Xcas.*