

# Les problèmes ouverts du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon

2011-2020

Gilles Aldon



Claude Tisseron



à Claude Tisseron et Michel Mizony

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Le premier problème ouvert : les chaînes de chiffres</b>	<b>13</b>
1.1 L'énoncé	15
1.2 Quelques éléments de mathématiques	16
1.3 Le travail des élèves	20
1.4 Utiliser ce problème en classe	20
1.4.1 À l'école primaire	20
1.4.2 Au collège et au lycée	22
<b>2 Des polygones qui tournent</b>	<b>25</b>
2.1 L'énoncé	27
2.2 Quelques éléments de mathématiques	28
2.2.1 Quelques remarques préliminaires	29
2.2.2 Cas particuliers	30
2.2.3 Plus généralement	33
2.2.4 Triangles scalènes	33
2.3 Le travail des élèves	36
2.4 Utiliser ce problème en classe	37
2.4.1 À l'école primaire	37
2.4.2 Au collège et au lycée	37
<b>3 2013</b>	<b>39</b>
3.1 L'énoncé	40
3.2 Un peu de mathématiques	41
3.3 Le travail des élèves	44
3.4 Utiliser ce problème en classe	49
3.4.1 À l'école primaire	49
3.4.2 Au collège et au lycée	49
<b>4 Les boîtes explosives</b>	<b>51</b>
4.1 Énoncé	52
4.2 Un peu de mathématiques	52
4.2.1 Avec deux boîtes	52
4.2.2 Généralisation	52
4.3 Le travail des élèves	57
4.4 Utiliser ce problème en classe	58
4.4.1 À l'école primaire et au collège	58
4.4.2 Au lycée	59

<b>5</b>	<b>Combien de multiplications ?</b>	<b>61</b>
5.1	Enoncé . . . . .	63
5.2	Un peu de mathématiques . . . . .	63
5.2.1	Pour deux facteurs . . . . .	63
5.2.2	Pour trois facteurs . . . . .	65
5.2.3	Et après . . . . .	65
5.3	Le travail des élèves . . . . .	66
5.4	Utiliser ce problème en classe . . . . .	69
5.4.1	À l'école primaire . . . . .	69
5.4.2	Au collège et au lycée . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Un problème qui déchire !</b>	<b>71</b>
6.1	Enoncé . . . . .	71
6.2	Un peu de mathématiques . . . . .	72
6.2.1	Première partie . . . . .	72
6.2.2	Deuxième partie . . . . .	73
6.3	Le travail des élèves . . . . .	75
6.3.1	Ce que les élèves peuvent aborder . . . . .	76
6.4	Utiliser ce problème en classe . . . . .	78
6.4.1	De l'école primaire au lycée . . . . .	78
6.4.2	Retourd'expérience, Ecole du Rocher . . . . .	79
6.4.3	Retourd'expérience, lycée La Martinière Montplaisir . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Les grilles diaboliques</b>	<b>81</b>
7.1	Enoncé . . . . .	83
7.2	Un peu de mathématiques . . . . .	83
7.3	Le travail des élèves . . . . .	89
7.4	Utiliser ce problème en classe . . . . .	91
<b>8</b>	<b>Les chemins sur un quadrillage</b>	<b>93</b>
8.1	Enoncé . . . . .	94
8.2	Un peu de mathématiques . . . . .	95
8.2.1	Partie 1 . . . . .	95
8.2.2	Partie 2 . . . . .	96
8.2.3	Une remarque . . . . .	96
8.2.4	Finalement . . . . .	97
8.2.5	Partie 3 . . . . .	97
8.3	Le travail des élèves . . . . .	98
8.4	Utiliser le problème en classe . . . . .	99
8.4.1	À l'école primaire . . . . .	99
8.4.2	Au collège . . . . .	100
8.4.3	Au lycée . . . . .	102
<b>9</b>	<b>Sangaku</b>	<b>105</b>
9.1	L'énoncé du problème . . . . .	107
9.2	Quelques premières questions . . . . .	108
9.3	Et quelques premières réponses . . . . .	108
9.3.1	Quelques remarques . . . . .	108
9.3.2	Calcul des rayons . . . . .	109

9.3.3	Tangentes . . . . .	110
9.3.4	Lieux . . . . .	111
9.3.5	Aires . . . . .	112
9.4	Prolongement . . . . .	113
9.5	Le travail des élèves . . . . .	113
9.6	Utiliser le problème en classe . . . . .	116
9.6.1	À l'école primaire ou au collège . . . . .	117
9.6.2	Au collège ou au lycée . . . . .	117
<b>10</b>	<b>Un billard fermé</b>	<b>119</b>
10.1	Énoncé . . . . .	121
10.2	Un peu de mathématiques . . . . .	122
10.3	Dans le triangle . . . . .	122
10.4	Dans le carré . . . . .	122
10.5	Dans le pentagone régulier . . . . .	123
10.5.1	Une remarque générale sur les angles . . . . .	123
10.5.2	Un peu de géométrie analytique . . . . .	126
10.6	Généralisation . . . . .	130
10.6.1	Le cas des polygones ayant un nombre pair de côtés . . . . .	130
10.6.2	Le cas des polygones ayant un nombre impair de côtés . . . . .	132
10.6.3	Trajets « croisés » . . . . .	132
10.6.4	Le cas du triangle quelconque . . . . .	137
10.6.5	Cas du quadrilatère quelconque . . . . .	137
10.7	Le travail des élèves . . . . .	137
10.8	Utiliser le problème en classe . . . . .	139
	<b>Conclusion</b>	<b>141</b>



# Introduction

J'ai connu l'IREM de Lyon alors que j'étais encore étudiant en mathématiques, et je n'ai cessé, dans ma carrière de professeur puis de chercheur en didactique des mathématiques de fréquenter cet endroit magique où la collaboration entre mathématiciens, professeurs, didacticiens, formateurs, produit depuis plus de quarante années des modes de penser l'enseignement des mathématiques novateurs, réfléchis, utilisables et analysés. C'est le lieu où les mathématiques se personnalisent et pour moi, encore étudiant, j'écoutais avec attention les professeurs de collège, de lycée, d'université se quereller sur un résultat où la façon de le présenter. C'est également le lieu où les rencontres humaines ont donné de la chair à des idées sur l'enseignement encore vagues, naïves ou trop simples. C'est le lieu où j'ai découvert que faire des mathématiques n'était pas seulement comprendre et appliquer des théorèmes mais aussi imaginer et créer une petite part de mathématiques. Parmi toutes les découvertes magnifiques que l'IREM de Lyon m'a permis de faire, les « problèmes ouverts » sont certainement l'un des moments les plus déterminants de mon évolution professionnelle.

Les problèmes ouverts, définis par Gilbert Arzac [Arsac *et al.*, 1991] puis [Arsac et Mante, 2007], Michel Mante, Gilles Germain ont apporté dans le paysage de l'enseignement des mathématiques en France un regard nouveau. Les élèves passaient ainsi d'un rôle passif d'apprentissage de résultats apportés par le professeur à un rôle actif de créateurs de mathématiques. C'est la philosophie même de la perception des maths qui était changée, bouleversée par l'introduction dans la classe de mathématiques du droit à créer, à imaginer, à se tromper, à conjecturer et à prouver. Bref, les élèves devenaient, à travers cette activité, des mathématiciens en herbe, capables d'imagination au cœur de la rigueur des raisonnements mathématiques. Même si les auteurs ont toujours présenté les « problèmes ouverts » comme une pratique pédagogique, le fondement de cette pratique a modifié durablement la perception de ce que sont les mathématiques pour les élèves mais aussi pour les professeurs qui ont accepté de se lancer dans cet exercice périlleux : donner aux élèves un énoncé, dont on sait qu'il est créateur de mathématiques mais dont on ne sait pas *a priori* où l'imagination des élèves va mener. Comme professeur de mathématiques, j'ai longtemps pratiqué cet exercice et éprouvé une grande satisfaction de voir mes élèves entrer dans une véritable démarche de recherche et trouver le temps du cours trop court ! Ce qui compense largement la difficulté de gestion de la classe et les moments incertains où je ne savais pas si la piste imaginée par un groupe pouvait être féconde ou au contraire vouée à l'échec. Ce sont aussi les rencontres avec Claude Tisseron, alors directeur de l'IREM, et Michel Mizony qui lui a succédé qui m'ont conforté dans l'idée que les problèmes sont au cœur de la compréhension des concepts mathématiques. Avec Claude Tisseron nous avons expérimenté des « problèmes longs » dans la classe de maths [Aldon, 1995, Tisseron *et al.*, 1996, Tisseron et Aldon, 1998] qui étaient construits pour servir de fil rouge à l'enseignement durant une année scolaire. L'université d'été organisée par l'IREM de Lyon en 1996 [Aldon *et al.*, 1996] a été l'occasion de débattre de la place des problèmes dans l'enseignement mais aussi dans la recherche mathématique, en particulier avec Michel Mizony qui a proposé à cette occasion une réflexion sur « le calcul formel dans ma pratique d'enseignant et de chercheur », reposant sur les problèmes cruciaux qui

dirigeaient son travail.

Comme chercheur en didactique des mathématiques, j'ai continué à étudier les apports de la recherche de problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Le groupe EXPRIME, fondé en 2006 entre l'IREM de Lyon et l'INRP à l'initiative de Viviane Durand-Guerrier et moi-même, puis le groupe DREAM qui a pris la relève en collaboration avec l'IFÉ et l'INSPÉ (originellement l'IUFM, puis l'ESPE) ont étudié ces apports, mis en place des expérimentations dans des classes et produit des mémoires de masters et des thèses [Gardes, 2013, Front, 2015] pour explorer plus avant les relations intimes entre les problèmes et l'apprentissage des mathématiques. Le site DREAMaths<sup>1</sup> est une vitrine importante de ces travaux.

Ce n'est donc pas un hasard si nous avons (Michel Mizony, alors directeur de l'IREM de Lyon et moi-même, directeur adjoint) proposé l'organisation d'un rallye mathématique à nos partenaires de l'APMEP et du Rectorat de l'Académie de Lyon. Ce n'est toujours pas par hasard si quelques années plus tard, j'ai proposé une épreuve de problème ouvert dans ce rallye. C'est cette histoire que je raconte dans cet ouvrage à travers les dix problèmes proposés ces dix dernières années aux élèves de l'Académie de Lyon.

Les problèmes sont au cœur de l'enseignement des mathématiques depuis bien longtemps comme en témoignent, par exemple, les paragraphes que Ferdinand Buisson y consacre dans son dictionnaire à la rubrique Mathématiques [Buisson, 1929]. Plus tard et dans la tradition de John Dewey [Dewey, 1938], il est difficile de parler de problèmes et de résolution de problèmes sans faire référence à Polya [Polya, 1945]. Il propose dans son ouvrage « How to solve it » des heuristiques devant faciliter la recherche et la résolution de problèmes, heuristiques qu'il a construites sur l'observation de son activité propre de mathématicien :

Studying the methods of solving problems, we perceive another face of mathematics.

Yes, mathematics has two faces ; it is the rigorous science of Euclid, but it is also something else. Mathematics presented in the Euclidean way appears as a systematic, deductive science ; but mathematics in the making appears to be an experimental, inductive science. » (Id. p.VII)

Cette autre face des mathématiques nécessite quelques réflexions et la dimension expérimentale citée par Polya se doit d'être précisée ce qui sera l'objet du paragraphe suivant. Ce travail fondamental a été à la base de développements importants pour mettre en relation, à travers les problèmes, le « faire des mathématiques » au « faire faire des mathématiques ». Les évolutions et les développements se sont faits en intégrant les critiques qui peuvent être apportées aux thèses défendues par Polya, la plupart des auteurs qui ont évoqués la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques se positionnant par rapport à son travail. Je relèverai, parmi d'autres deux objections qui me semblent faire avancer la compréhension du rôle des problèmes dans l'enseignement. La première porte sur la contextualisation de la recherche d'un problème et les liens avec les notions et les concepts mathématiques en jeu. Elle pointe la difficulté à relier la résolution d'un problème particulier avec des règles générales dé-contextualisées :

« Teaching general problem solving does not lead to mathematical skills or knowledge » [Sweller *et al.*, 2011]

La seconde objection, relevés déjà par [Schoenfeld, 1994], est l'inclusion des problèmes dans le curriculum :

« In the standard curriculum such contexts might be used as "cover stories" to motivate a unit, and then one would get down to the "real math," as traditionally organized. But here, the solutions to the problems, in context, are the large part of the mathematics studied. That is, the mathematics often appears in a particular context, and aspects of it are worked out in that context ; the more extended, formal presentation and decontextualization of the mathematics is not undertaken. » (Page 73)

---

1. <http://dreamaths.univ-lyon1.fr>



Bien que des situations de recherche de problèmes continuent à vivre en classe, et bien que de nombreux travaux montrent les apports des problèmes pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, ces situations ne se sont pas généralisées. Les deux objections précédentes constituent des freins importants pour cette intégration et l'accent mis principalement dans l'approche des problèmes de recherche sur le développement de compétences métamathématiques est en opposition avec les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les professeurs.

Par ailleurs, les problèmes réels dans la tradition des « realistic mathematics » [Freudenthal, 1973] contextualisent les notions mathématiques pour leur donner du sens. La question du transfert en lien avec la construction ou la réinvention du concept dans un contexte particulier pointe la tension d'un point de vue didactique entre cette réinvention et le nécessaire guidage par le professeur comme le mettait en évidence Paul Drijvers dans sa conférence lors de la CIEAEM 66 à Lyon<sup>2</sup>. Comment et pourquoi, telle notion perçue comme pertinente dans un contexte particulier pourra atteindre un statut de notion mathématique universelle ? Pour prendre l'exemple de l'algèbre, dans quelles conditions didactiques, la résolution d'un problème réaliste menant à la résolution d'une ou de plusieurs équations pourra mener à la construction du concept d'équation et à son caractère universel ? Ces questions conduisent à considérer le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques comme un lieu d'expérience sur les objets mathématiques à enseigner. Et, avant de développer des réponses possibles, je voudrais approfondir un peu la place de l'expérience dans la création des mathématiques et les relations existantes entre les perceptions sensibles des objets et leur théorisation.

La notion d'expérience peut être regardée à la fois dans le domaine de la philosophie des sciences et dans celui de la philosophie de la connaissance. La subjectivité de l'expérience a été largement mise en évidence dans l'histoire des sciences et l'immédiateté des perceptions sensibles ne peut impliquer un caractère scientifique aux résultats de l'expérience. De nombreux exemples peuvent être développés dans les sciences expérimentales mais aussi en mathématiques comme je peux l'illustrer par les deux situations suivantes :

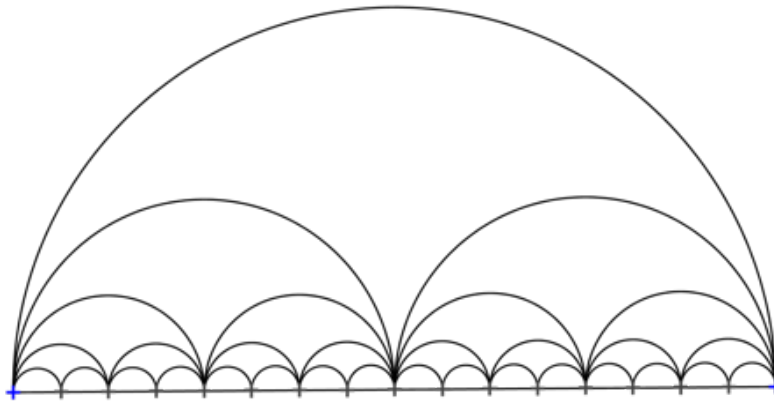
1. Construire un carré inscrit dans un cercle de rayon 1. Sur chacun de ses côtés construire le triangle isocèle dont le sommet appartient au cercle : on obtient alors un octogone régulier inscrit dans le cercle. Recommencer. A la nième étape, le polygone obtenu est un polygone régulier à  $2n + 2$  côtés qui se rapproche du cercle et dont le périmètre est une approximation du périmètre du cercle, on en déduit ainsi une approximation de  $\pi$  ?
2. Construire un demi-cercle de rayon 1. Construire sur le diamètre deux demi-cercles de rayon  $1/2$ . Recommencer le processus. A chaque étape, la longueur de la ligne est invariante, en effet, on remplace un demi cercle de rayon  $R$  par deux demi-cercles de rayon  $R/2$ . En itérant le processus on obtient une ligne qui se rapproche du diamètre ; on en déduit alors que la longueur de la ligne est égale à la longueur du diamètre, c'est à dire  $\pi = 2$  ? (Figure 1)

Ce paradoxe (apparent) montre bien cette subjectivité et la nécessité de dépasser la seule expérience pour la relier à la théorie : l'expérience dans les deux cas semble la même mais le fait que l'« écart » entre la ligne brisée et le segment (au sens de distance maximum ou au sens d'aire) ne suffit pas à faire converger les longueurs. Le calcul de la longueur d'une courbe fait intervenir des dérivées ; dans la deuxième construction, les pentes infinies de la ligne aux points de contact avec le segment lèvent le paradoxe.

L'empirisme classique conduit au scepticisme [Hume, 1946] parce que la justification objective d'un fait par l'expérience ne peut être déduite d'une expérience subjective. Sans vouloir entrer dans une description exhaustive du rôle de l'expérience dans les sciences, les liens entre la

---

2. [https://youtu.be/EbavxxoF\\_Z8](https://youtu.be/EbavxxoF_Z8)

FIGURE 1 –  $\Pi = 2$  ?

théorie et l'expérience ont toujours amené à considérer les relations entre le domaine sensible et sa formalisation théorique dans un langage particulier. Toute expérience est directement reliée à la théorie (aux hypothèses) sous-jacentes ; [Kuhn, 1962] soutient que chaque théorie porte en elle les interprétations des termes qu'elle emploie si bien qu'une même expérience et ses résultats pourront conduire à des interprétations différentes suivant les hypothèses théoriques sous-jacentes.

« My remarks on incommensurability and its consequences for scientists debating the choice between successive theories, In Sections X and XIII have argued that the parties to such debates inevitably see differently certain of the experimental or observational situations to which both have recourse. Since the vocabularies in which they discuss such situations consist, however, predominantly of the same terms, they must be attaching some of those terms to nature differently, and their communication is inevitably only partial. As a result, the superiority of one theory to another is something that cannot be proved in the debate. » (Ibid. page 198)

L'observation, la manipulation en mettant en relation l'action (la relation au sensible) et la réflexion (la relation au théorique) constituent un fondement de l'expérience qu'il s'agit de transposer d'une part vers les mathématiques et d'autre part vers l'enseignement. Une première question qui peut se poser est la nature des objets qu'une expérience mathématique peut mettre en jeu. Le sensible en mathématiques peut être vu à travers les objets concrets manipulés (figure, objets matériels, artefacts tangibles,...) ou à travers les objets mathématiques naturalisés, c'est à dire suffisamment familiers pour pouvoir être considérés comme « concrets » : « Le concret c'est l'abstrait rendu familier par l'usage » [Langevin, 1950].

Ainsi les objets mathématiques objets des expériences peuvent être dialectiquement perçus d'un point de vue sensible par la manipulation directe de certaines de leurs représentations et d'un point de vue théorique par leurs mises en relation dans des structures abstraites à travers des systèmes de signes. Manipuler des objets mathématiques revient donc à s'approprier des systèmes de signes pour rendre les objets familiers, maîtrisables dans leurs relations aux théories sous-jacentes. Les trois écritures d'un même nombre (Figure 2) illustrent bien cette relation dialectique qu'on les considère dans des systèmes de numération (ici la numération romaine et la numération décimale de position actuelle) ou dans une écriture mettant en jeu des opérations, c'est à dire des relations entre objets de même nature. L'objet lui-même se construit à travers cette familiarisation avec ses représentations et la capacité à saisir les propriétés spécifiques mises en exergue dans chacune de ses représentations. « Il faut concevoir ces nombres comme

2015  
 $2^{11} - 3 \times 11$   
 MMXV

FIGURE 2 – Trois écritures d'un même nombre.



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

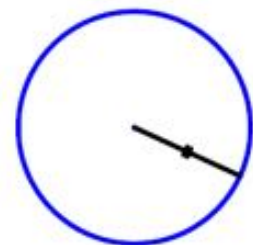


FIGURE 3 – Un cercle, objet sensible, objet mathématique, représentation.

des unités intentionnelles, l'intentionnalité étant un renvoi de quelque chose à quelque chose d'autre qui le transcende. » [Descaves, 2011], page 11. De la même façon, observer les trajectoires des étoiles autour de l'étoile polaire constitue une expérience sensible permettant de mettre en évidence une perception de l'idée du cercle, insuffisante pour agir, mais constituant une étape vers une définition théorique et sa traduction dans différents systèmes de signes (Fig. 3). La rupture épistémologique entre la perception sensible de l'objet et la manipulation effective passe à travers la référence à la théorie dans une construction des objets constitutifs de la théorie. Ces quelques considérations amènent donc à considérer l'expérience en mathématiques comme une synthèse des manipulations sur les représentations des objets mathématiques et des références théoriques à travers des systèmes de signes.

Bien sûr, réfléchir à la façon dont nous faisons des mathématiques fait aussi réfléchir à la façon de transmettre les mathématiques et donc de faire faire des mathématiques. La question est alors essentiellement didactique et interroge les finalités de l'enseignement des mathématiques. Faut-il considérer les mathématiques comme une école de la discipline, de la rigueur et de l'obéissance à un ensemble de règles ou bien les voir comme un espace de créativité? Les réponses à ces questions déterminent fondamentalement le type d'enseignement et le rôle des problèmes dans cet enseignement et rejoignent les considérations didactiques du paragraphe précédent.

Revenons maintenant à l'épreuve de « problème ouvert » du rallye mathématique de l'Académie de Lyon. Cette épreuve est construite en parallèle des épreuves plus classiques de rallye qui se

déroulent en temps limité pendant les heures de cours. L'épreuve « problème ouvert » elle, est proposée aux élèves sur un temps long (entre trois semaines et un mois suivant le calendrier scolaire) pour permettre à chacun de s'approprier la situation mathématique proposée et avoir le temps de chercher et de proposer des éléments de solution. Toutes les épreuves ont été construites avec l'idée d'une situation sans fin, d'un « problème générateur de problèmes » pour reprendre l'expression d'Alain Bouvier alors qu'il était le directeur de l'IREM de Lyon. Ainsi, il ne s'agit pas à proprement parler de résoudre un problème, mais plutôt de faire un petit bout de chemin dans le monde des mathématiques. Les chapitres suivants présentent les dix problèmes qui ont été posés et proposent à la fois un petit parcours dans les mathématiques sous-jacentes et un compte rendu de l'activité des élèves. Ces situations mathématiques, données dans le contexte du rallye, peuvent être reprises et proposées dans les classes, à des niveaux différents ; c'est ce que j'essaye de montrer pour les différents problèmes.

Ces problèmes ont des origines et des histoires différentes ; au fil des années, les problèmes ont évolué en fonction des solutions produites par les élèves, et des analyses *a posteriori* que nous avons pu faire en remettant en question le degré d'ouverture, le domaine des mathématiques abordé, la graduation de la difficulté etc.

Des sites comme Cut the Knot<sup>3</sup>, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences<sup>®</sup> (OEIS<sup>®</sup>)<sup>4</sup>, Bibmath<sup>5</sup>, le site des IREM<sup>6</sup> sont des sources inépuisables de situations qui conduisent à des énoncés de problèmes ouverts. Mais c'est aussi à travers des discussions avec des collègues de l'IREM et de l'IFé<sup>7</sup> que les énoncés ont évolué et que je peux aujourd'hui proposer cette revue des dix premiers problèmes ouverts du rallye mathématique de l'Académie de Lyon.

---

3. <https://www.cut-the-knot.org/>

4. <https://oeis.org/>

5. <http://www.bibmath.net/>

6. <http://www.univ-irem.fr/>

7. Yves Guichard, Henrique et José Vilas-Boas, Didier Krieger

# Chapitre 1

## Le premier problème ouvert : les chaînes de chiffres

La tradition du problème ouvert à l'IREM de Lyon est prégnante que ce soit à travers les nombreuses publications qui s'y rapportent et les différentes expériences menées dans les classes. L'histoire de la publication est longue et débute en 1991 lorsque Gilbert Arzac, Gilles Germain et Michel Mante publient la brochure « Problèmes ouverts et situations problèmes » déjà cité [Arzac *et al.*, 1991]. C'est à cette époque qu'une publication périodique de l'IREM de Lyon voit le jour : La feuille à problèmes. Elle est maintenue longtemps sous un format papier, jusqu'à ce qu'une version numérique prolonge cette publication. Même si le site n'est plus vraiment maintenu, des exemples de problèmes et de leur utilisation dans les classes ou en formation sont toujours présents sur les pages de la « feuille à problèmes »<sup>1</sup>. Cette publication a représenté un lien entre enseignants de mathématiques pour chercher et faire chercher des problèmes aux élèves, échanger des idées, communiquer des expériences. Sous l'impulsion de Maryvonne Leberre, Georges Mounier, René Mulet-Marquis et moi-même, le site a produit pendant plusieurs années des articles présentant des problèmes de mathématiques mais aussi des comptes rendus d'expérimentations en classe. Il reprenait la philosophie développée par le *courant* du problème ouvert que Gilbert Arzac a décrit à l'occasion de la sortie quelques années plus tard du livre « Les pratiques du problème ouvert » [Arzac et Mante, 2007] :

---

1. <http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/>

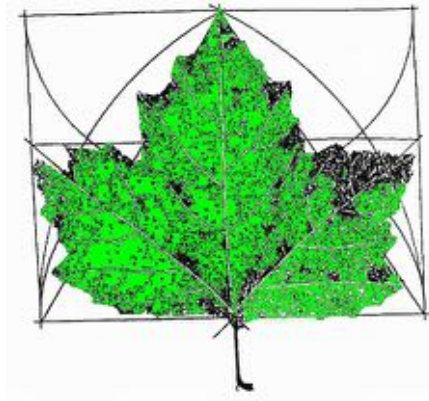


FIGURE 1.1 – Le logo de la feuille à problèmes

1) Au départ, le problème ouvert (origine de l'appellation oubliée, elle n'est pas originale en maths) est une innovation pédagogique, et n'a pas la prétention de relever de la recherche au sens universitaire ; plus tard, une collaboration avec Nicolas Balacheff, didacticien à Grenoble, dans le cadre de la préparation de sa thèse sur la preuve et la démonstration introduira un point de vue nouveau et la possibilité d'user de méthodologies de recherche qui nous en apprendront beaucoup, après l'euphorie des premiers essais en classe.

2) Dès l'origine, la formation est au cœur du projet : en effet, je vous rappelle qu'à cette époque les IREM s'occupent beaucoup de formation et de recyclage : ils ont appris aux enseignants les « mathématiques modernes » autour de la notion d'ensemble et cherchent à associer des pédagogies à ces contenus. Il n'y a pas de discours théorique sur la formation commun à tous ces instituts, mais à Lyon, sous l'impulsion de la psycho-sociologue membre de l'IREM, Dominique Pichod, et du directeur précédent, Alain Bouvier, il existe une doctrine sans doute référée aux usages de la formation dans d'autres lieux que l'Education Nationale, et irréductible au seul recyclage qui subsiste par ailleurs : le but de la formation est de donner à celui qui la suit la possibilité de changer sa pratique, en particulier en voyant que des pratiques différentes de la sienne existent.

Juste pour attiser votre curiosité, je donne ici un des problèmes de mathématiques parmi ceux qui ont été proposés dans chaque numéro de la version numérique de La feuille à problèmes :

On considère les  $n^2 + 1$  premiers nombres entiers, écrits dans un ordre quelconque.

On a donc une suite  $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ .

Prouver que, dans cette suite, il y a au moins  $n + 1$  nombres qui sont placés en ordre (croissant ou décroissant).

L'ambition de cette rubrique était d'abord de faire réfléchir à des petits problèmes sympathiques en ayant en arrière pensée qu'un professeur de mathématiques qui s'amuse à chercher ces problèmes et qui y prend du plaisir, sera plus enclin à proposer à ses élèves de telles activités. C'est une hypothèse forte qui a toujours alimenté notre réflexion sur les problèmes ouverts, notamment lors des formations. Chercher un problème pour soi, avec d'autres personnes, en utilisant l'ensemble de ses connaissances et en profitant des connaissances de ses pairs, est une phase obligatoire d'une formation à l'utilisation de problèmes dans la classe. Tout d'abord, devant un énoncé surprenant, on se retrouve dans une position proche de celle dans laquelle on souhaite placer nos élèves : peu d'indices sur les mathématiques que l'on peut (doit) employer pour résoudre le problème mais des expériences simples à mener. Ensuite, le fait de chercher un problème dont on sait qu'on doit probablement arriver à le résoudre, permet de laisser libre cours à son imagination et à sa créativité. Dans cet exemple, le fameux principe des tiroirs

devrait être utilisé, mais il reste encore à savoir comment ! qui sont les « tiroirs », qui sont les « chaussettes » ?

Lors de la réunion de bilan du rallye qui s'était déroulé en 2010, une discussion a soulevé la question de la rédaction des solutions à un problème par les élèves. En effet, les épreuves du rallye mathématique demandent aux élèves de résoudre de nombreux problèmes mais la seule trace qui leur ait demandé est la réponse à la question posée. Nous perdons ainsi tout le cheminement qui a conduit à cette réponse, les hésitations, les questionnements, les essais et les erreurs qui ont jalonné le parcours conduisant à ce résultat. L'idée est alors venue de proposer une épreuve de problème ouvert permettant de laisser aux élèves libre cours à leur imagination et à leur créativité. Il ne restait plus qu'à organiser cette épreuve ! Pour cette première année l'épreuve du problème ouvert était facultative parce que nous ne savions pas quel accueil lui serait fait. Il fallut aussi penser un sujet, suffisamment ouvert pour laisser s'exprimer les élèves mais aussi suffisamment abordable pour qu'il ne rebute pas et ne soit pas cherché. Ce défi, continuellement renouvelé depuis dix ans, a donné lieu à de longues soirées de réflexion et de recherches de façon à proposer un sujet attrayant, fécond en termes mathématiques, et adapté aux élèves de troisième et seconde des lycées généraux et professionnels. C'est ainsi que le premier sujet a été proposé en janvier 2011. Il ne fait appel qu'à des connaissances de base, maîtrisées par les élèves de collège et de lycée, mais il est aussi fondé sur le concept d'expression régulière que l'on peut définir comme une chaîne de caractères construite sur une syntaxe précise à partir de mots construits sur un alphabet donné. Une application courante de ce concept est la recherche de texte dans un document mais aussi dans les logiciels anti-spams qui recherche dans les messages qui circulent sur le web des expressions particulières.

Pour ce premier énoncé, les questions proposées étaient volontairement suffisamment vagues pour permettre plusieurs types d'exploration qui devaient permettre d'atteindre des résultats variés, certains pouvant être très facilement découverts. Dans cette première tentative, les réponses devaient nous parvenir sur papier libre, attachées aux réponses des épreuves du rallye sur table.

## 1.1 L'énoncé

L'énoncé du problème était formulé de la manière suivante :

- Les seules opérations considérées sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.
- On peut utiliser des parenthèses.
- Les règles qui s'appliquent sont les règles habituelles du calcul numérique.

Soit  $a$  un nombre entier positif.

- On appelle chaîne de  $a$  une suite d'opérations qui n'utilisent que le nombre  $a$ .
- On appelle valeur de la chaîne le résultat du calcul.
- On appelle longueur de la chaîne le nombre d'opérations.

### Exemples

Avec  $a = 6$

$6 \times 6 \div 6 - (6 \div 6 + 6)$  est une chaîne de 6 de longueur 5 dont la valeur est -1.

Avec  $a = 7$

$7 \times 7 \times 7 \times (7 - 7 \div 7) - 7 \times 7 + (7 + 7) \div 7$  est une chaîne de 7 de longueur 10 dont la valeur est 2011.

Avec  $a = 2011$

$2011 \div (2011 + 2011)$  est une chaîne de 2011 de longueur 2 dont la valeur est  $\frac{1}{2}$ .

## Toutes sortes de questions peuvent être abordées

En voici quelques exemples :

1. Pour une chaîne de  $a$  de longueur donnée, quelle est la plus grande valeur ? La plus petite ?
2. Pour un nombre  $a$  donné, quelles sont les valeurs atteintes ?
3. Combien y a-t-il de valeurs distinctes pour une longueur de chaîne donnée ?
4. ...

Vous pouvez explorer ces questions ou vous en poser d'autres...

Cette première épreuve proposée était accompagnée d'une feuille de consignes indiquant en particulier que la réponse, écrite sur une feuille de format A3, pouvait comporter de nouvelles questions à aborder, les façons dont la recherche avait été conduite, des conjectures ou des résultats démontrés.

Ainsi, dans ce premier essai, l'idée d'une recherche collaborative n'était pas encore pensée et les classes devaient travailler « à l'aveugle », sans savoir ce que d'autres classes avaient réalisé. Ce premier essai ne fut pas un coup de maître, peu de classes ont participé, mais les propositions faites et l'imagination des élèves a permis de penser qu'il était intéressant de continuer.

## 1.2 Quelques éléments de mathématiques

Ce problème est issu d'un célèbre défi largement diffusé sur le web : « *the four fours* », les quatre 4<sup>2</sup>

Une première analyse permet d'écrire de façon exhaustive les résultats possibles en utilisant quatre fois le nombre 4 et en s'accordant le droit d'ajouter des parenthèses selon le schéma suivant.

$$\begin{array}{l}
 4 * 4 * 4 * 4 \\
 4 * 4 * (4 * 4) \\
 4 * (4 * 4) * 4 \\
 (4 * 4) * 4 * 4 \\
 (4 * 4) * (4 * 4) \\
 (4 * 4 * 4) * 4 \\
 4 * (4 * 4 * 4)
 \end{array}$$

où \* représente les signes d'opération +, -, ×, ÷.

Le tableau 1.1 montre ainsi tous les résultats possibles de ce défi et si on ne considère que les résultats entiers positifs, on voit que les nombres atteints sont :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 28, 32, 36, 48, 60, 68, 80, 128\}$$

Cependant, les auteurs du défi ont élargi les possibilités, en permettant tout d'abord d'utiliser les nombres formés avec des chiffres 4. Ainsi, le nombre 10 que l'on ne pouvait pas atteindre avec la règle initial peut maintenant être écrit :

2. On peut trouver l'énoncé et une première analyse de problème page 14 du livre [Rouse-Ball, 1914]. On peut aussi consulter le site : <https://dwheeler.com/fourfours/> intitulé "The definitive Four Fours Answer Key".



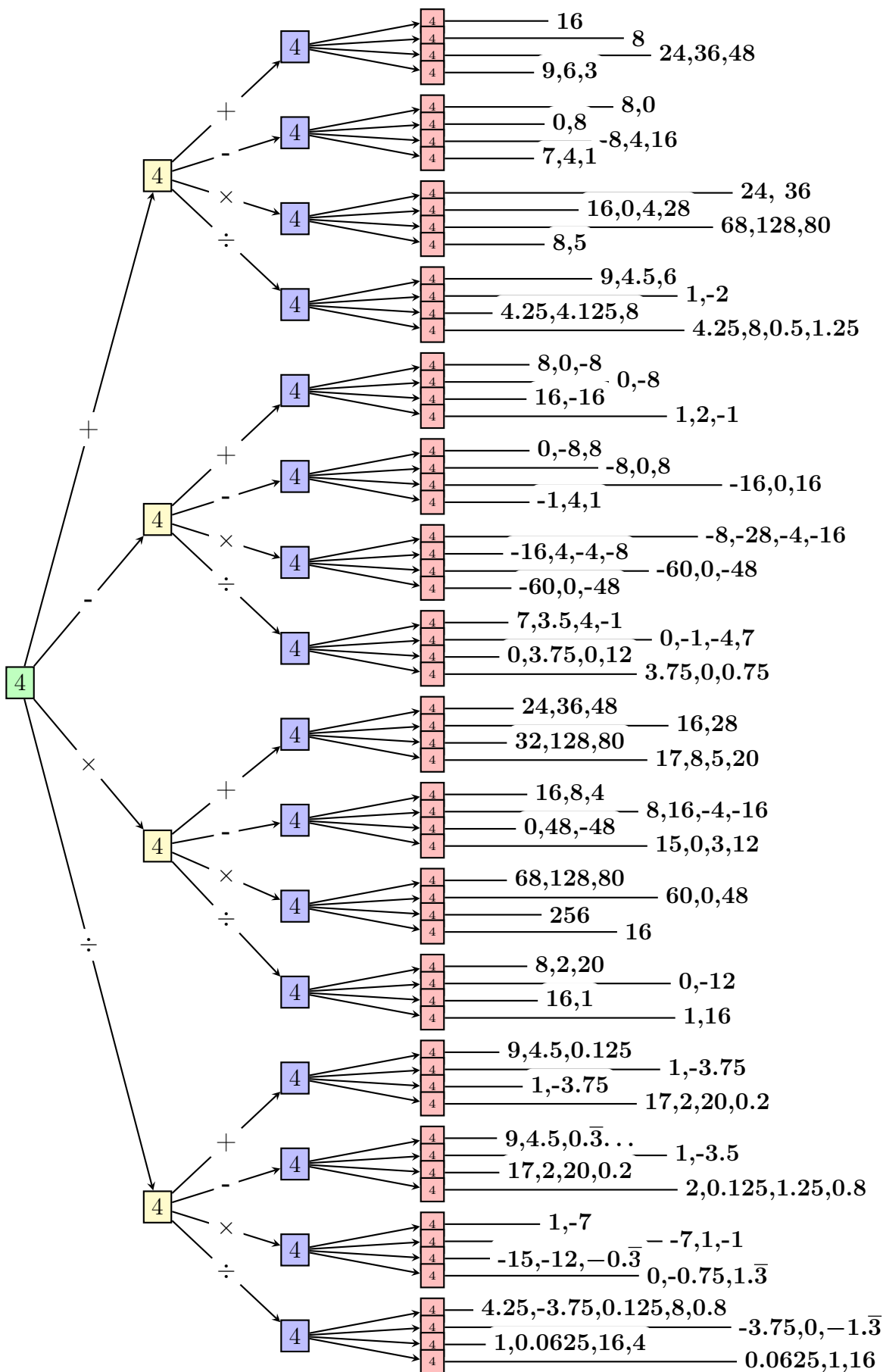


TABLE 1.1 – Les quatre 4

$0 = 4 + 4 - 4 - 4$	$11 = 4 \div .4 + 4 \div 4$	$22 = 4! \div 4 + 4 \times 4$
$1 = 44/44$	$12 = (44 + 4) \div 4$	$23 = 4! - \sqrt{4} + 4 \div 4$
$2 = 4 \div 4 + 4 \div 4$	$13 = 4! - 44 \div 4$	$24 = 4 + 4 \times 4 + 4$
$3 = (4 + 4 + 4) \div 4$	$14 = 4 \times (4 - .4) - .4$	$25 = 4! - 4 \div 4 + \sqrt{4}$
$4 = 4 \times (4 - 4) + 4$	$15 = 44 \div 4 + 4$	$26 = 4! + 4 - 4 + \sqrt{4}$
$5 = (4 \times 4 + 4) \div 4$	$16 = 4 + 4 + 4 + 4$	$27 = 4! = 4 - 4 \div 4$
$6 = 4 \times .4 + 4.4$	$17 = 4 \div 4 - 4 \times 4$	$28 = 4! + 4 + 4 - 4$
$7 = 44 \div 4 - 4$	$18 = 4 \times 4 + 4 - \sqrt{4}$	$29 = 4! + 4 + 4 \div 4$
$8 = 4 + 4.4 - .4$	$19 = 4! - (4 + 4 \div 4)$	$30 = 4! + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}$
$9 = 4 \div 4 + 4 + 4$	$20 = 4! - 4 + 4 - 4$	$31 = 4! + (4! + 4) \div 4$
$10 = 44 \div 4.4$	$21 = 4! - 4 + 4 \div 4$	$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$

TABLE 1.2 – les quatre 4 de 0 à 32

$$10 = 44 \div .44$$

La règle peut alors s'étendre et utiliser toutes les opérations et fonctions mathématiques. Ainsi, le factoriel peut lever l'impossibilité initiale d'atteindre le nombre 13 :  $13 = 4! - 44/4$  et, petit à petit, les nombres peuvent être construits. Voici, par exemple, les nombres entre 1 et 30 dans le tableau 1.2.

On voit dans ces solutions que 0,4, noté dans le monde anglo-saxon 0.4 ou .4 est utilisé, par exemple pour obtenir 8.

Cette idée de problème sera reprise dans le problème 3 (voir page 39), mais d'ores et déjà les élèves pouvaient s'amuser avec les nombres et donner assez vite quelques résultats intéressants. A la première question, « quel est le plus grand nombre atteignable pour une chaîne de longueur donnée », l'utilisation de la multiplication peut paraître évidente, mais ce n'est pas le cas pour  $a = 1$  où l'addition permettra de trouver un résultat plus grand quelque soit la longueur de la chaîne supérieure à 1.

D'une façon générale, on peut à partir d'un  $n$  donné, regarder les résultats possibles pour des chaînes de longueur 2, 3, ... Une première approche peut être réalisée en utilisant un arbre comme sur le tableau 1.4. On voit alors que les nombres atteints dans une chaîne de longueur 3 sont :

$$\{0, 2, n - 1, n, n + 1, 2n, 3n, n^2 - n, n^2 + n, 2n^2, n^3\}$$

Résultats classés dans l'ordre à condition que  $n > 4!$

Ce problème est une excellente occasion pour les élèves de manipuler les nombres et les opérations, de revoir l'importance des parenthèses et les priorités des opérations. Il est également une source de défis successifs et en ajoutant des règles (le droit d'utiliser la racine carrée, le factoriel, ..., le droit de juxtaposer des chiffres pour faire un nombre, le droit d'utiliser des nombres décimaux...) de faire progresser les réponses aux premières questions. Par exemple, le fait de voir qu'avec quatre 4, il n'est pas possible de construire 10 en utilisant les quatre opérations seulement amène à se poser la question générale. Supposons ainsi que  $n$  soit donné, quel est le plus petit nombre que l'on ne peut construire avec les règles initiales? On voit par exemple, grâce au tableau 1.4, que 1 n'est jamais atteignable par une chaîne de longueur 3 sauf si  $n = 1!$  Et pour une chaîne de longueur 4?

$$0 = n + n - n - n \quad 1 = n - n + n \div n \quad 2 = n \div n + n \div n \quad 3 = (n + n + n) \div n$$

4 n'est pas systématiquement atteint. On peut alors se poser la question de savoir quelles valeurs de  $n$  permettent d'atteindre 4 et en une chaîne de longueur 4.

Nombres	calcul
1	$4 = 1 + 1 + 1 + 1$
2	$4 = 2 + 2 + 2 - 2$
3	4 n'est pas atteignable
4	$4 = 4 - 4 \times (4 - 4)$
5	$4 = (5 \times 5 - 5) \div 5$
6	$4 = 6 - (6 + 6) \div 6$
7	4 n'est pas atteignable
...	...

TABLE 1.3 – 4 en une chaîne de longueur 4

Bien sûr, ces résultats peuvent être obtenu à partir de l'arbre 1.4. Cependant l'exploration des arbres est rapidement impossible du fait de la croissance exponentielle du nombre de résultats possibles. On peut cependant limiter l'étude à des nombres  $a$  à 1 chiffre et chercher des symétries permettant de trouver de nombreux résultats. Dans la suite on accepte l'écriture des nombres comme répétition des chiffres, on utilise le parenthésage et les quatre opérations.

Si on considère la série  $s(n) = \sum_{i=0}^n 10^i$ , il vient naturellement que

$$a \times s(n) = \underbrace{\overline{aa \dots a}}_{n \text{ fois } a}$$

Ainsi :

$$\forall a \neq 0, 5 = \frac{a \cdot s(1) - a}{a + a}$$

$$6 = \frac{a \cdot s(1) + a}{a + a}$$

$$11 = \frac{a \cdot s(1)}{a}$$

etc. On peut se poser la question de savoir s'il existe d'autres nombres atteignables quelque soit le chiffre non égal à 0 que l'on utilise. Bien sûr en continuant la série :

$$0 = a - a, 1 = a \div a, a \neq 0 \quad 2 = \frac{a + a}{a}, a \neq 0$$

Et en continuant, tout nombre entier positif  $n$  sera atteignable sous la forme  $\frac{\overbrace{a + \dots + a}^n}{a}$  soit avec une chaîne de longueur  $n + 1$ .

$$\frac{as(n)}{a} = \underbrace{\overline{a \dots a}}_{n+1}$$

Donc :

$$\frac{as(n) - a}{a + a} = \underbrace{\overline{5 \dots 5}}_n$$

$$\frac{as(n) + a}{a + a} = \underbrace{\overline{5 \dots 56}}_n$$

$$\frac{as(n) - as(m)}{a} = \overbrace{1 \dots 1}^{n-m} \overbrace{0 \dots 0}^{m+1}$$

Si on divise  $s(3k)$  par  $s(3h)$  le résultat est de la forme  $\overline{1001 \dots 1001}$ . Ainsi, tous les nombres de cette forme sont atteignables quelque soit le chiffre  $a$  (non égal à 0).

Ces explorations sont un joli exercice s'appuyant sur l'écriture des nombres dans la base décimale de position.

Je laisse le lecteur se poser d'autres questions, ou consulter le travail de Inder Jeet Taneja [[Taneja, 2015](#)].

## 1.3 Le travail des élèves

Une trentaine de classes a participé à cette nouvelle épreuve, soit environ 800 élèves ; mais il est bien sûr impossible de savoir si tous les élèves des classes qui ont envoyé une réponse ont participé à la recherche ! Comme je l'ai expliqué dans l'introduction, ce premier essai de problème ouvert n'a pas été organisé de façon collaborative, si bien que les résultats proposés ont souvent tous été de même nature. Nous n'avons malheureusement pas conservé les réponses proposées par les classes, cet ouvrage n'était pas du tout d'actualité et l'avenir même de l'épreuve était encore en suspens ! Cependant, de mémoire et pour avoir regardé chaque réponse envoyée avec soin, les élèves ont majoritairement exploré les questions posées dans l'énoncé et les plus grandes et plus petites valeurs d'une chaîne de  $a$  de longueur ont été très souvent données, tout comme les valeurs atteintes pour un  $a$  donné. Des exemples sont souvent apparus, ayant parfois une valeur de raisonnement général ce qui montrait bien que le problème avait suscité une réflexion intéressante dans bien des cas.

La participation des classes a ainsi permis aux élèves de chercher et de manipuler les nombres et rendre aux calculs même élémentaires leur intelligence qui est à la base de l'apprentissage du calcul algébrique puis infinitésimal. De cette première expérience, nous avons tiré des conséquences pour proposer l'année suivante le deuxième problème ouvert en particulier pour faire en sorte d'adapter au mieux le problème aux différents niveaux des élèves : collège, lycée, lycée professionnel.

On peut remarquer que ce problème peut très bien être proposé à des élèves de l'école primaire, peut-être en proposant des questions plus ciblées, comme par exemple le défi des « quatre 4 », en rajoutant progressivement des règles (utiliser les nombres formés de plusieurs 4, utiliser la racine carrée, la puissance...).

## 1.4 Utiliser ce problème en classe

### 1.4.1 À l'école primaire

Un énoncé moins ouvert peut être nécessaire, par exemple : si j'utilise 2 fois le nombre 2 avec la possibilité d'intercaler une opération entre les deux. Quels sont tous les résultats que je peux obtenir ?

Et si maintenant, j'utilise 3 fois le nombre 3 ?

Plus généralement, quels résultats puis-je obtenir en utilisant :

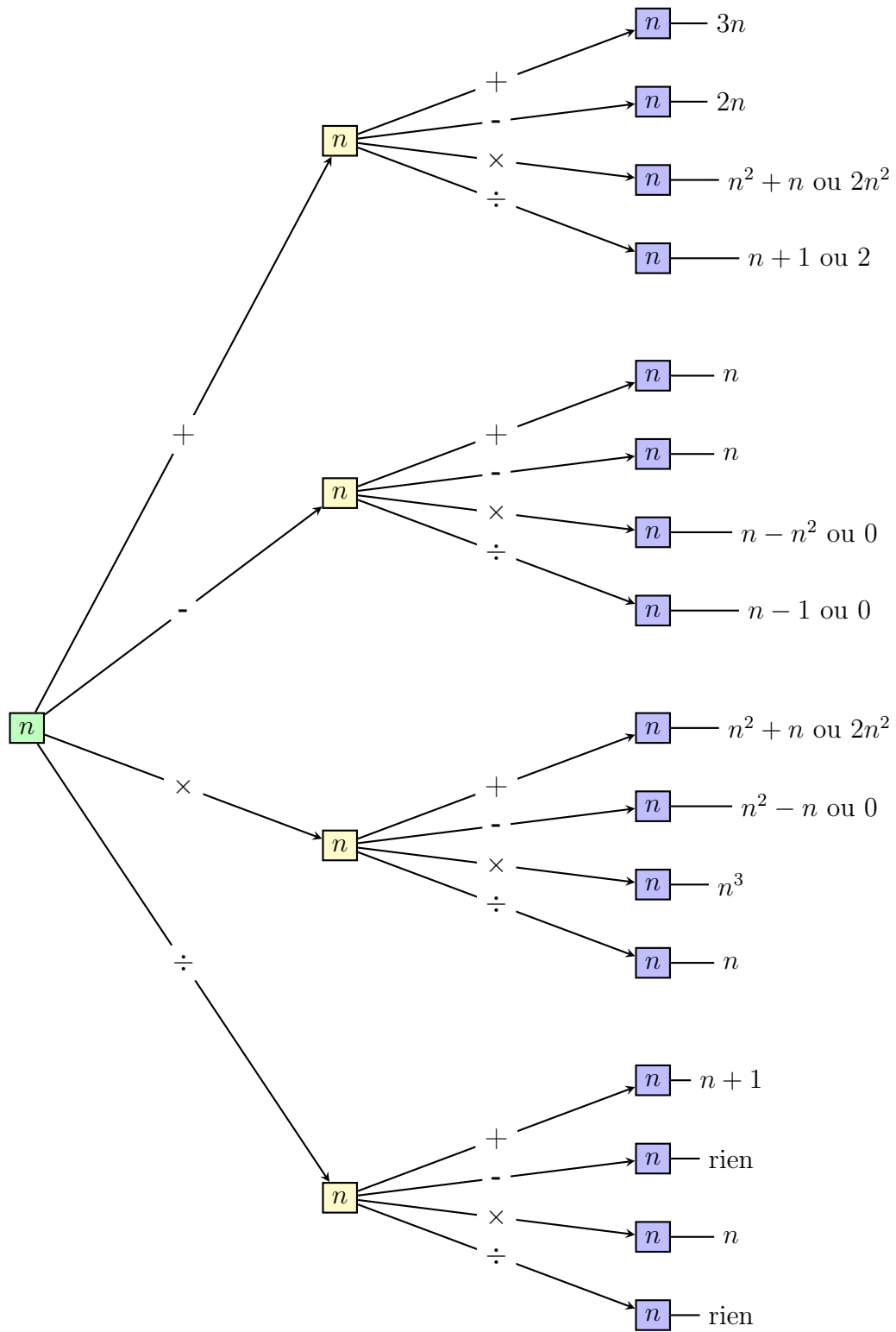


TABLE 1.4 – Dans le cas général

- 4 fois le nombre 4
- 5 fois le nombre 5
- 6 fois le nombre 6
- 7 fois le nombre 7
- 8 fois le nombre 8
- 9 fois le nombre 9

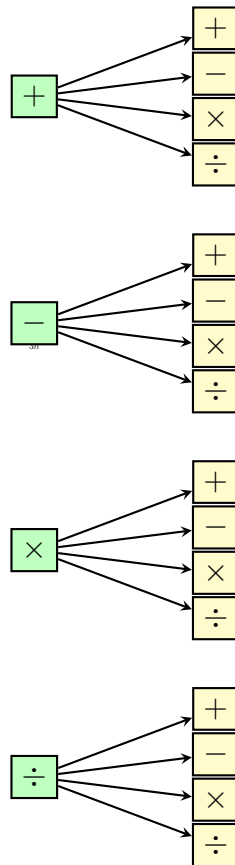


FIGURE 1.2 – Un arbre de choix

Ce problème peut être facilement abordé et l'étude exhaustive de la première question est facilement atteinte :

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 2 + 2 &= 4 \\ 2 - 2 &= 0 \\ 2 \div 2 &= 1 \end{aligned}$$

Mais dès la seconde question, la priorité des opérations entre dans la danse ; que vaut  $3 + 3 \div 3$  ? Mais aussi, un comptage rigoureux et organisé des opérations utilisées devient nécessaire pour être sûr d'avoir tous les résultats. La notion d'arbre de choix peut alors être introduite (Voir figure 1.2)

Cette notion, illustrée sur cet exemple simple, peut être l'occasion de montrer ce qu'est une croissance exponentielle, en faisant calculer, par exemple combien de branches il faudrait dessiner pour obtenir les neufs 9 !

Le nombre d'opérations que les élèves font en cherchant des solutions différentes dans chacun des cas est un excellent entraînement au calcul avec un habillage ludique et un défi permanent.

### 1.4.2 Au collège et au lycée

L'arbre de choix est certainement aussi au collège une notion importante à mettre en évidence dans ce problème. L'énoncé dans les plus petites classes peut se rapprocher de l'énoncé proposé en primaire et, dans les plus grandes classes, de celui proposé dans l'épreuve du rallye.

L'utilisation des parenthèses est un enjeu important qui permettra de mettre en œuvre les priorités des opérations.

Mais dès le collège, et bien sûr au lycée, d'une part la longueur arbitraire d'une chaîne, tout comme l'introduction d'autres opérations, seront l'occasion d'explorer des fonctions qui pourront être introduites à cette occasion ou bien utilisées en contexte. On peut imaginer faire chercher une fois en groupe ce problème, mais le garder aussi comme un fil rouge dans son enseignement : calculs numériques, calculs algébriques, utilisation de fonctions sont autant de connaissances mathématiques mises en œuvre dans la recherche de ce problème. et la conclusion de l'étude mathématique précédente peut être l'occasion d'une généralisation intéressante utilisant l'écriture décimale de position des nombres naturels.





## Chapitre 2

# Des polygones qui tournent

Pour la deuxième année, l'épreuve était toujours facultative, le peu de réponses obtenues l'année précédente laissant encore un doute sur l'intérêt que cette épreuve pouvait susciter chez les élèves ; mais aussi la question du relais par les professeurs auprès des élèves se posait ; qu'est-ce qui permettrait aux enseignants d'inciter leurs élèves à chercher, voire même organiser un temps de travail collectif en classe ? Tout comme la question de savoir s'il est opportun de proposer une telle épreuve dans le Rallye mathématique, la question de la diffusion effective de ce problème dans les classes est cruciale. Est-ce que l'écart entre la proposition de *petits problèmes* dont on attend qu'un résultat et la pratique d'une recherche de problèmes n'est pas trop important dans une épreuve de Rallye ? Toutes ces questions se sont bien sûr posées au moment de proposer à nouveau une épreuve de problème ouvert dans le Rallye. Les arguments en faveur de cette proposition l'ont emporté et, grand bien nous fasse, la deuxième épreuve de problème ouvert s'est déroulée en 2012 et s'est perpétuée jusqu'à aujourd'hui.

Ces réflexions nous ont cependant amené à considérer un sujet plus proche des mathématiques enseignées dans ces classes en nous appuyant sur les connaissances de base de la géométrie : le cercle, les polygones, les transformations du plan, bref des notions qui pouvaient être mises en lien avec les programmes de mathématiques. Ainsi, le problème se plaçait dans le domaine de la géométrie et faisait grand cas des dessins que les élèves pouvaient faire. Cette année encore, les réponses devaient être proposées sur feuille. Nous espérons de nombreux dessins et des réflexions géométriques fondées sur les représentations variées du problème et d'une certaine manière nous n'avons pas été déçu ! La géométrie donne la possibilité de manipuler à travers des dessins et les logiciels de géométrie dynamique et, en soi, est un terrain de jeu extraordinaire pour *manipuler l'abstrait, manipuler les symboles et manipuler la logique*, ce qui est au cœur de l'activité mathématique :

« On comprend bien mieux une figure et on se la rappelle bien plus facilement quand on l'a vue pendant la période de construction » [Petersen, 1879]

Ce mathématicien danois a publié le livre « Methods and theories for the solution of problems of geometrical construction » dont une traduction en français est disponible à la Bibliothèque Nationale de France<sup>1</sup>. Dans cet ouvrage, Petersen se donne comme objectif « d'essayer d'apprendre [aux élèves] comment on doit attaquer un problème de construction », car, dit-il, « il n'existe pas de problèmes qui servent autant à aiguiser la faculté d'observation et de combinaison et à donner à l'esprit de la clarté et de la logique ». Donnons ici un exemple d'une construction proposée par Petersen dans son ouvrage (Fig. 2.1).

Pour résoudre ce problème, supposons que  $P$  soit un point cherché. Alors le rapport  $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ . Considérons les bissectrices intérieures et extérieures des droites  $(PA)$  et  $(PB)$ . Elles coupent la droite  $(AB)$  en  $C$  et  $C_1$  (Fig. 2.2)

---

1. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99640w.r=Julius%20Petersen?rk=21459;2>

**f. Le lieu géométrique de tous les points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné  $m:n$  est une circonférence de cercle.**

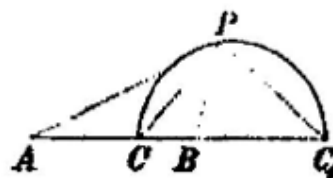


FIGURE 2.1 – L'énoncé tel que donné dans le livre de Petersen

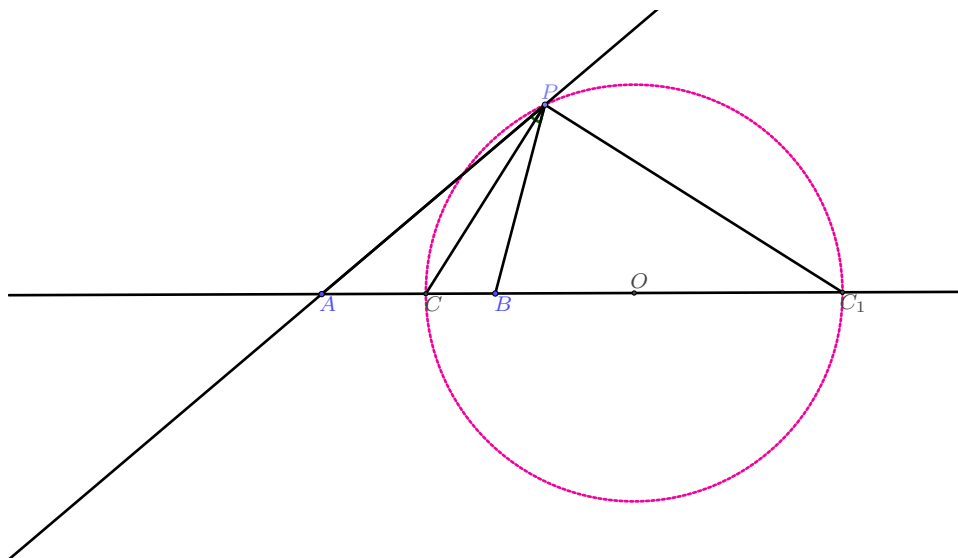


FIGURE 2.2 – Les points qui partagent  $[A, B]$  dans le rapport  $\frac{3}{2}$

Le rapport  $\frac{CA}{CB} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{m}{n}$  ; en effet, si on considère le triangle  $ACP$ , on a :

$$\frac{PA}{\sin \widehat{PCA}} = \frac{CA}{\sin \widehat{APC}}$$

et, dans le triangle  $PCB$  :

$$\frac{PB}{\sin \pi - \widehat{PCA}} = \frac{CB}{\sin \widehat{CPB}}$$

et comme  $\sin \widehat{CPB} = \sin \widehat{APC}$  on en déduit que  $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$ .

De la même façon on aura  $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{m}{n}$ .

Par conséquent  $C$  et  $C_1$  divise  $AB$  intérieurement et extérieurement suivant le rapport donné.

Par ailleurs  $\widehat{CPC_1} = \frac{\pi}{2}$  puisque  $(PC)$  et  $(PC_1)$  sont les bissectrices intérieures et extérieures des droites  $(PA)$  et  $(PB)$ .

La construction est alors la suivante :

Trouver les points de  $(AB)$  qui divisent harmoniquement le segment suivant le rapport  $\frac{m}{n}$

Tracer le cercle de diamètre  $[CC_1]$ .

Un exemple d'une telle construction pour le rapport  $\frac{3}{2}$  est donné figure 2.2.

Ainsi, fort de ces réflexions, le sujet a été pensé de façon à inciter les élèves à construire des figures géométriques et à réfléchir sur ces constructions. Il a été élaboré à partir d'une idée initiale reposant sur le théorème de Brianchon (dont nous reparlerons dans la suite, voir page

34) qui nous dit que un hexagone exinscrit à un cercle donné a ses diagonales concourantes si et seulement si les points d'intersection des droites portées par les côtés de l'hexagone appartiennent à une même conique. Ce qui est le cas pour l'hexagone construits comme l'intersection de deux triangles images réciproques par une rotation autour du centre du cercle inscrit. L'objectif n'étant bien sûr pas d'aller jusqu'à cette propriété projective de la géométrie mais plutôt d'explorer la situation et de mettre en évidence quelques invariants des figures en commençant par des figures régulières et en laissant ouvert la possibilité d'explorer plus avant en considérant des formes moins régulières. C'est avec un peu d'angoisse que nous avons proposé cette deuxième session de problème ouvert, nous demandant si le sujet attirerait un peu plus d'élèves, si l'énoncé possédait les qualités requises, si le problème était adapté aux élèves, si les collègues y verraient un intérêt, ...

## 2.1 L'énoncé

- On part d'un cercle  $C$  et on appelle  $A$  son centre.
- On construit un polygone  $P$  dont tous les côtés sont tangents au cercle  $C$ .
- On construit ensuite un polygone  $P'$  en faisant tourner  $P$  autour du point  $A$ .
- A partir des deux polygones  $P$  et  $P'$ , on peut définir deux nouveaux polygones : un « petit polygone », intersection de  $P$  et  $P'$ , et un « grand polygone », réunion de  $P$  et  $P'$ .
- Cette situation sera illustrée, par exemple avec un logiciel de géométrie dynamique, et commentée.
- On s'intéressera à différentes propriétés du polygone  $P$  (formes possibles, périmètre, aire,...), puis à des propriétés du « petit polygone » et du « grand polygone » obtenus par différentes rotations.

### Exemple

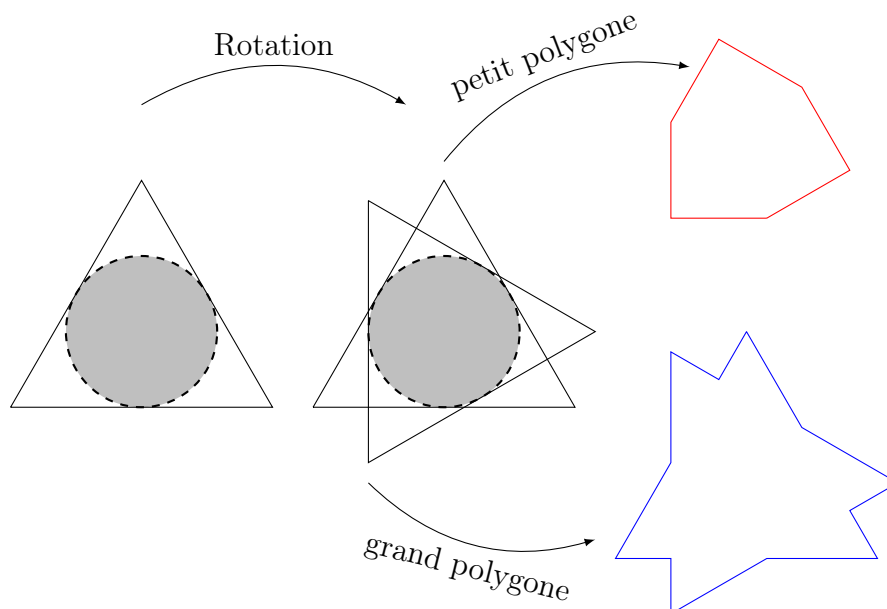


FIGURE 2.3 – Des exemples de polygones

## 2.2 Quelques éléments de mathématiques

Le cercle inscrit n'existe pas pour tout polygone. Seul le triangle a toujours un cercle inscrit dont le centre est le point de concours des bissectrices des angles intérieurs au triangle. En revanche tous les polygones réguliers possèdent un cercle inscrit dont le centre est le point de concours des bissectrices des angles intérieurs. On peut remarquer que ce centre est aussi le centre du cercle circonscrit au polygone, point de concours des médiatrices des côtés.

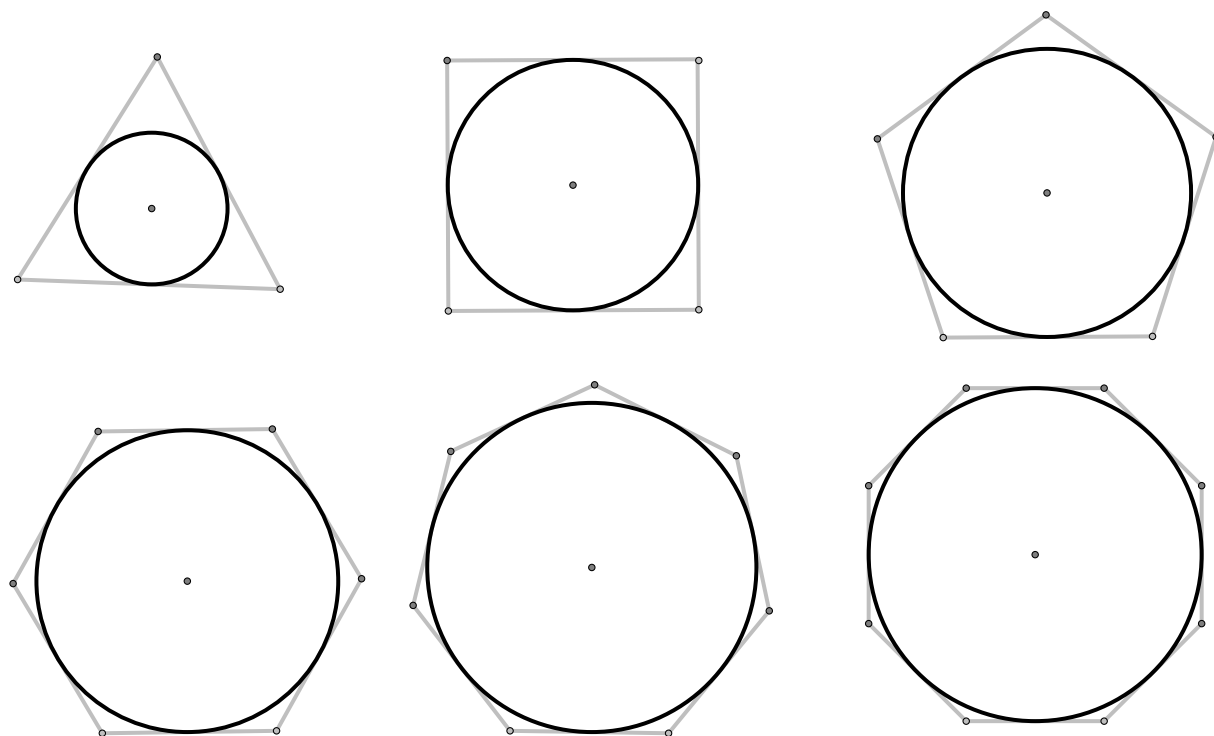


FIGURE 2.4 – Polygones réguliers et cercles inscrits

La première remarque qui peut être faite concerne le nombre de côtés des petits polygones ( $pP$ ) et des grands polygones ( $gP$ ). Appelons  $p$  le polygone initial et  $p_\theta$  son image par la rotation d'angle  $\theta$  (et de centre, le centre du polygone).

Chaque côté de  $p_\theta$  coupe deux côtés de  $p$ . Chaque côté de  $p$  sera « partagé » en trois ;  $gP$  aura ainsi 4 côtés ; Ainsi, le nombre de côtés de  $gP$  sera quatre fois le nombre de côtés de  $p$ . De la même façon, le nombre de côtés de  $pP$  sera deux fois le nombre de côtés de  $p$ . On verra plus bas que ce nombre de côtés peut varier si le polygone de départ n'est pas régulier.

Si on appelle  $\mathcal{A}_{pP}$ ,  $\mathcal{A}_{gP}$  et  $\mathcal{A}_P$  les aires des petits, grands polygones et polygone initial, et  $\mathcal{P}_{pP}$  et  $\mathcal{P}_{gP}$ ,  $\mathcal{P}_P$  leurs périmètres, il vient :

$$\mathcal{A}_{pP} + \mathcal{A}_{gP} = 2 \times \mathcal{A}_P$$

$$\mathcal{P}_{pP} + \mathcal{P}_{gP} = 2 \times \mathcal{P}_P$$

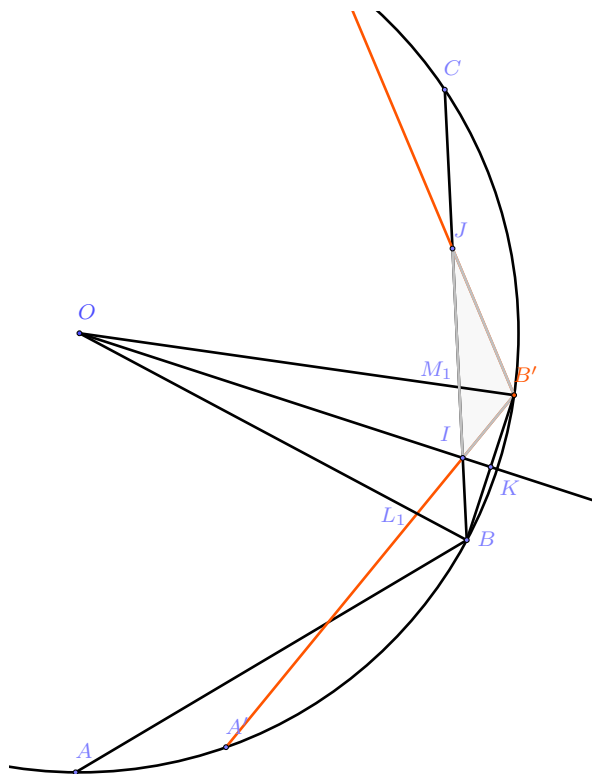


FIGURE 2.5 – Pour suivre les raisonnements du paragraphe suivant

### 2.2.1 Quelques remarques préliminaires

Considérons alors une rotation d'angle  $\theta$  et examinons la configuration sur chaque côté du polygone. La figure 2.5 donne les notations utilisées.

Pour étudier l'aire du grand polygone, on peut se limiter dans le cas d'un polygone à  $n$  côtés aux rotations d'angle compris entre 0 et  $\frac{2\pi}{n}$ . En effet les triangles extérieurs (voir figure 2.5) vont se reproduire à l'identique tous les  $\frac{2\pi}{n}$ .

**Résultat 1**  $OBIB'$  est un quadrilatère complet dont les diagonales  $(M_1L_1)$  et  $(BB')$  se coupent à l'infini. Donc  $I$  est le milieu de  $[L_1B']$  et  $k$  le milieu de  $[BB']$ .

**Résultat 2** Le triangle  $IJB'$  a comme angles :

$$\begin{aligned} \widehat{B'IJ} &= \frac{2\pi}{n} - \theta \\ \widehat{IB'J} &= \frac{(n-2)\pi}{n} \\ \widehat{B'JI} &= \theta \end{aligned}$$

En effet :

$\widehat{B'JI}$  est l'angle entre deux côtés images l'un de l'autre par la rotation d'angle  $\theta$ .

Par ailleurs,  $(\vec{A'B'}, \vec{BC}) = (\vec{A'B'}, \vec{AB} + (\vec{AB}, \vec{BC})) = -\theta + \frac{2\pi}{n}$ .

Enfin  $\widehat{IB'J}$  est la mesure de l'angle du polygone régulier à  $n$  côtés, soit  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ .

**Résultat 3** L'angle  $\widehat{B'BI}$  mesure  $\frac{\pi}{n} - \frac{\theta}{2}$ .

En effet :

Dans le triangle  $BB'J$ , l'angle en  $J$  vaut  $\theta$ , l'angle de la rotation. L'angle en  $B$  est la somme de l'angle au sommet du polygone, soit  $\frac{(n-2)\pi}{n}$  et de l'angle  $\widehat{JB'B}$ . Appelons  $\alpha$  cet angle.

Par ailleurs le triangle  $B'IB$  est isocèle et par conséquent  $\widehat{IB'B} = \widehat{B'B'J} = \alpha$ . Ainsi dans le triangle  $JBB'$  :

$$\theta + \frac{(n-2)\pi}{n} + \alpha + \alpha = \pi$$

On en déduit alors que :

$$\alpha = \widehat{B'BI} = \frac{\pi}{n} - \frac{\theta}{2}$$

**Résultat 4** En considérant que le rayon du cercle circonscrit aux polygone vaut 1,

$$BB' = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

En effet le triangle  $OBB'$  est isocèle avec  $OB = OB' = 1$  et d'angle au centre  $\theta$ . D'où le résultat.

**Résultat 5** Calculons alors  $B'I$

On a :

$$KB' = \sin \frac{\theta}{2} \text{ d'où :}$$

$$B'I = \frac{KB'}{\cos \alpha} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha}$$

Ainsi, dans le triangle  $IB'J$  nous connaissons les trois angles (Résultat 1) et le côté  $IB'$ , donc le triangle est parfaitement déterminé.

**Résultat 5** L'aire de  $IB'J$  vaut :

En effet :

On sait en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle que :

$$\frac{\sin \theta}{\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha}} = \frac{\sin \frac{(n-2)\pi}{n}}{IJ} = \frac{\sin \frac{2\pi}{n} - \theta}{JB'}$$

On en déduit alors, en fonction de  $\alpha = \frac{\pi}{n} - \frac{\theta}{2}$ , que :

$$\begin{aligned} B'I &= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha} \\ IJ &= \frac{\sin \frac{(n-2)\pi}{n}}{2 \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2}} \\ JB' &= \frac{\sin \left( \frac{2\pi}{n} - \theta \right)}{2 \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2}} \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{4} \times \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha} \times \frac{\sin \frac{(n-2)\pi}{n}}{2 \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin \left( \frac{2\pi}{n} - \theta \right)}{2 \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2}} \\ \mathcal{A}_{gP} &= \frac{n}{2} \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) + \frac{n}{4} \times \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha} \times \frac{\sin \frac{(n-2)\pi}{n}}{2 \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin \left( \frac{2\pi}{n} - \theta \right)}{2 \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2}} \\ \mathcal{A}_{pP} &= \frac{n}{2} \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right) - \frac{n}{4} \times \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha} \times \frac{\sin \frac{(n-2)\pi}{n}}{2 \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin \left( \frac{2\pi}{n} - \theta \right)}{2 \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

## 2.2.2 Cas particuliers

### Le triangle

Un premier résultat : si on appelle  $P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1, U_1$  les points d'intersection des côtés  $[CA]$  et  $[B'C']$ ,  $CA$  et  $[C'A']$ ,  $[AB]$  et  $[C'A']$ ,  $[AB]$  et  $[A'B']$ ,  $[BC]$  et  $[A'B']$  et enfin  $[BC]$  et  $[B'C']$ , alors les angles  $\widehat{P_1OQ_1}, \widehat{Q_1OR_1}, \widehat{R_1OS_1}, \widehat{S_1OT_1}$  et  $\widehat{T_1OU_1}$  sont tous égaux à  $\frac{\pi}{3}$ .

Pour démontrer ce résultat, on va s'appuyer sur la figure 2.6, en démontrant, par exemple, que l'angle  $\widehat{P_1OQ_1} = \frac{\pi}{3}$ .

Pour cela, montrons d'abord que  $[OL_1)$  est la bissectrice de  $\widehat{C'O A}$ .

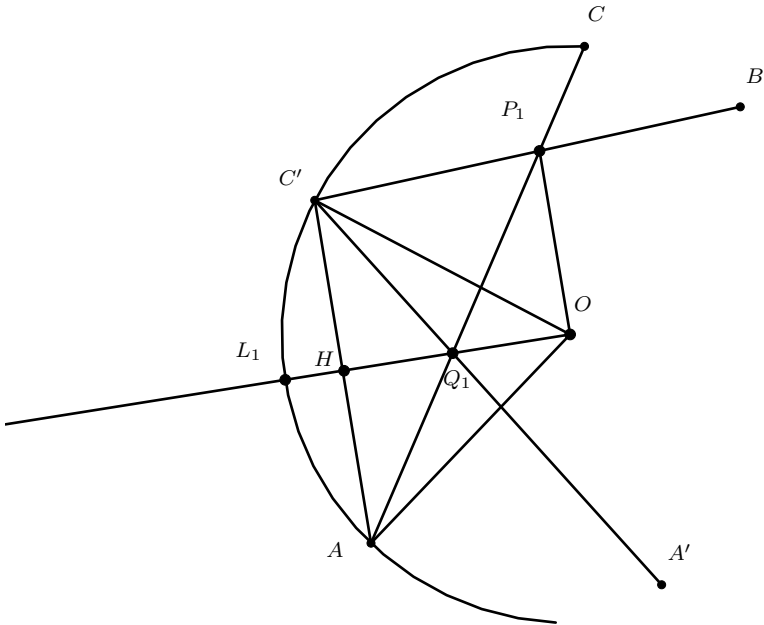


FIGURE 2.6 – Bissectrice

On considère les deux triangles  $HOC'$  et  $HOA$ . Ils ont un côté commun,  $[OH)$  et  $OC' = OA$  et les angles  $\widehat{OC'H}$  et  $\widehat{OAH}$  sont égaux. Les deux triangles sont donc égaux et les angles  $\widehat{C'OH} = \widehat{AOH}$  soit,  $\widehat{C'OL_1} = \widehat{AOL_1}$  et par conséquent,  $[OL_1)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{C'O A}$ .

Mais  $\widehat{C'O A} = \pi - \theta$  ( $\theta$  étant l'angle de la rotation).

Donc  $\widehat{C'O L_1} = \frac{\pi - \theta}{2} = \widehat{OQ_1 P_1}$  et par conséquent l'angle  $\widehat{C'O Q_1} = \frac{\pi + \theta}{2}$ .

On démontre de la même façon que  $(OP_1)$  est la bissectrice de  $\widehat{B'O C'}$

Par ailleurs, dans le triangle  $Q_1 C' P_1$  l'angle  $\widehat{C'} = \frac{\pi}{3}$  et  $\widehat{Q_1} = \theta$  donc  $\widehat{P_1} = \frac{2\pi}{3} - \theta$ .

Dans le triangle  $P_1 Q_1 O$ , on a :

$$\widehat{Q_1} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$\widehat{P_1} = \frac{\frac{\pi}{3} + \theta}{2}$$

et par conséquent :

$$\widehat{P_1 O Q_1} = \frac{\pi}{3}$$

On peut alors en déduire en itérant la démarche que :

$$\widehat{P_1 O Q_1} = \widehat{Q_1 O R_1} = \widehat{R_1 O S_1} = \widehat{S_1 O T_1} = \widehat{T_1 O U_1} = \frac{\pi}{3}$$

et qu'en particulier,

**Résultat 1 :**  $Q_1, O$  et  $T_1$  sont alignés tout comme  $P_1, O$  et  $S_1$  et  $U_1, O$  et  $R_1$ . Ce qui, dit autrement, indique que les droite  $(P_1 S_1)$ ,  $(Q_1 T_1)$  et  $(U_1 R_1)$  concourent. (Voir figure 2.7)

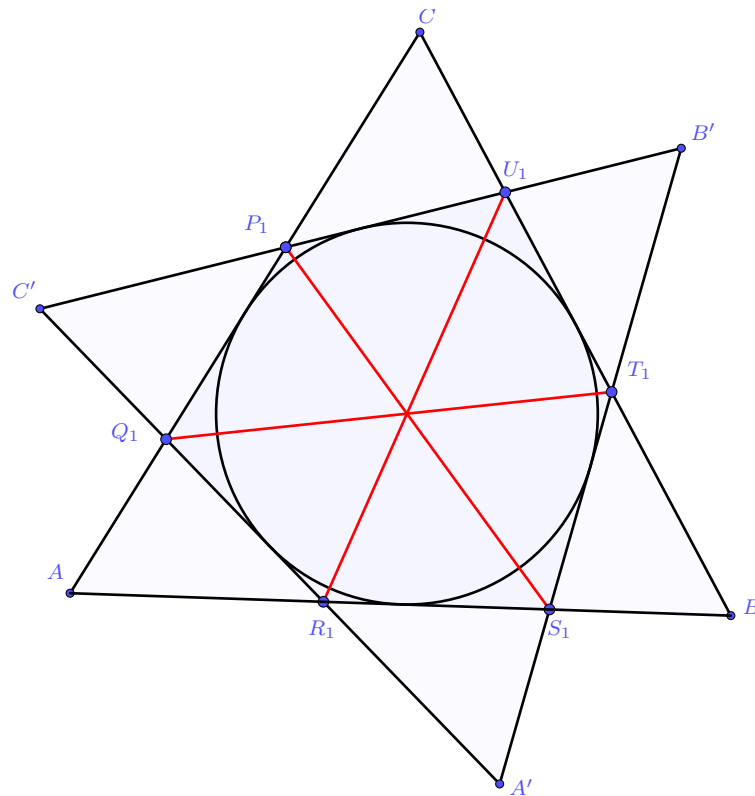


FIGURE 2.7 – Les diagonales du petit polygone concourent

Revenons maintenant à la question des aires.

Si on regarde le cas du triangle équilatéral, on obtient l'expression de l'aire de chacun des triangles extérieurs au triangle initial comme une fonction de  $\theta$  :

$$A(\theta) = \frac{\sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)}{16 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)^3 \times \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

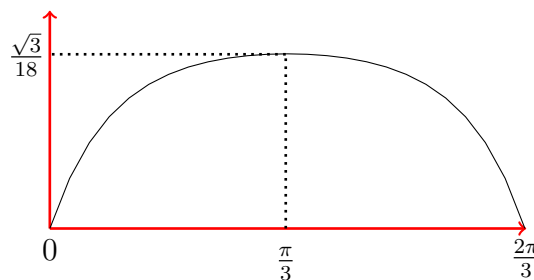


FIGURE 2.8 – Représentation graphique de l'aire d'un triangle extérieur,, cas du triangle

Ainsi, dans le cas du triangle équilatéral, avec le choix de considérer  $OA = OB = OC = 1$ , le maximum de l'aire du grand polygone est atteinte lorsque le triangle a tourné de  $\frac{\pi}{3}$  et sa valeur est :

$$\mathcal{A}_{gP} = \mathcal{A}_T + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3} + 4}{6}$$



## Le carré

L'aire de chacun des triangles extérieurs est alors donné par :

$$A(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta)}{4 \times \cos\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)^3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

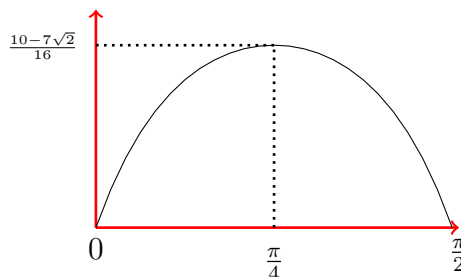


FIGURE 2.9 – Représentation graphique de l'aire d'un triangle extérieur, cas du carré

### 2.2.3 Plus généralement

D'une façon générale, le maximum de l'aire du grand polygone est atteinte lorsque l'aire des triangles extérieurs est maximum. Après des calculs un peu fastidieux et qui n'ont pas leur place ici, on peut démontrer que la fonction  $A_{gP}(\theta)$  admet un maximum sur  $[0, \frac{2\pi}{n}]$  en  $\frac{\pi}{n}$ .

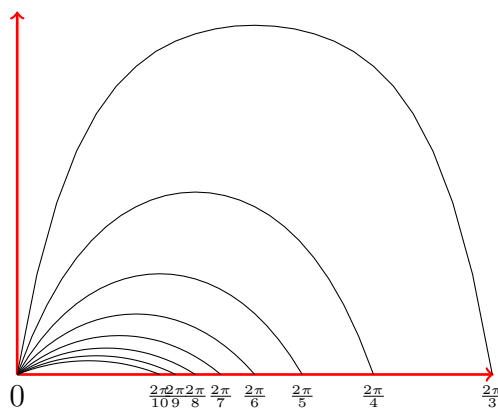


FIGURE 2.10 – Représentation graphique de l'aire d'un triangle extérieur pour  $n$  de 3 à 10.

### 2.2.4 Triangles scalènes

**Résultat 1 :** dans le cas du triangle, les sommets du triangle initial et de son image appartiennent à une même conique.

**Théorème :** deux triangles  $ABC$  et  $DEF$  se coupent de telle sorte que  $H = AB \cap FD$ ,  $I = FD \cap BC$ ,  $J = BC \cap DE$ ,  $K = DE \cap CA$ ,  $L = CA \cap EF$ ,  $G = EF \cap AB$ .

$A, B, C, D, E, F$  sont sur une même conique si et seulement si  $(HK)$ ,  $(IL)$  et  $(JG)$  concourent. Voir plusieurs preuves de ce résultat sur l'excellent site Cut the Knot<sup>2</sup>.

2. <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/HubertsStar.shtml>

Pascal	Brianchon
3 points alignés	3 droites concourantes
6 points sur une conique	6 droites tangentes à une conique

TABLE 2.1 – Dualité des théorèmes de Pascal et Brianchon

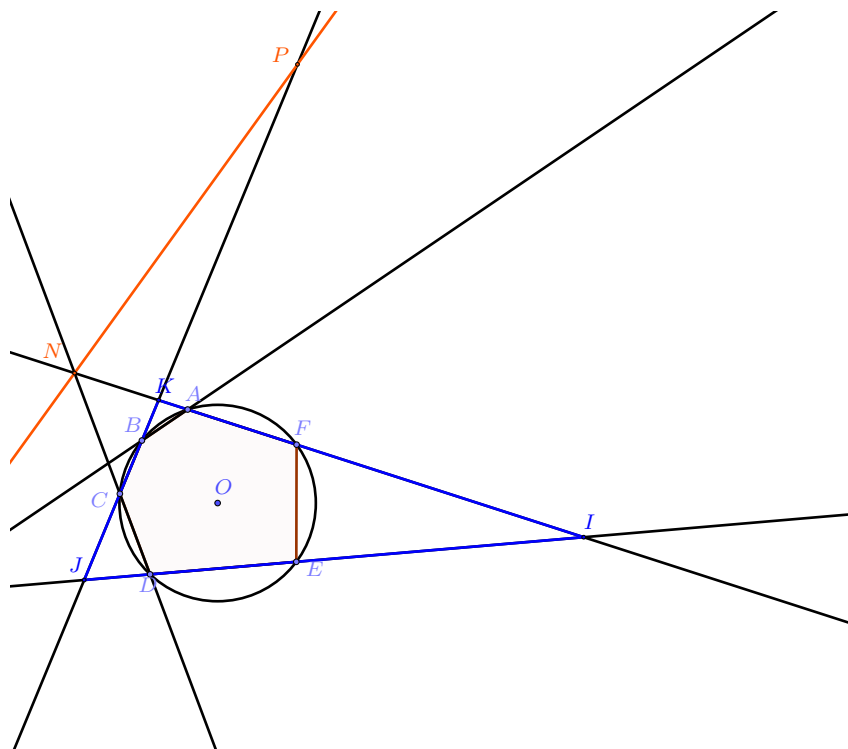


FIGURE 2.11 – Théorème de Pascal

Si les triangles sont équilatéraux, on a démontré dans le paragraphe 2.2.2, page 30, que les diagonales du petit polygone concouraient. On va maintenant démontrer ce résultat dans le cas général, c'est à dire les diagonales du petit polygone, s'il s'agit d'un hexagone, sont concourantes (Fig. 2.12). Ce résultat est connu sous le nom du théorème de Brianchon : Si  $ABCDEF$  est un hexagone circonscrit à un cercle, alors ses diagonales sont concourantes. C'est un théorème de géométrie projective qui dans toute sa généralité s'énonce de la manière suivante :

Les diagonales joignant les sommets opposés d'un hexagone sont concourantes si et seulement si cet hexagone est circonscrit à une conique.

Ce théorème est dual du théorème de Pascal : étant donné un hexagone inscrit dans un cercle, les intersections des côtés opposés sont alignées.

Démonstration du théorème de Pascal

On peut se limiter au cas où l'hexagone est inscrit dans un cercle. (voir figure 2.11)

Considérons le triangle  $IJK$  construit comme intersection des droites  $(AF)$ ,  $(BC)$  et  $(DE)$ . Pour démontrer que les points  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont alignés, il suffit que le produit suivant soit égal à 1 (théorème de Ménélaüs) :

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{MJ}} \times \frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} \times \frac{\overline{NK}}{\overline{NI}}$$

Or en utilisant le théorème de Ménélaüs dans le triangle  $IJK$ , comme  $M$ ,  $A$  et  $B$  sont alignés, on a :

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{MJ}} \times \frac{\overline{BJ}}{\overline{BK}} \times \frac{\overline{AK}}{\overline{AI}} = 1$$

d'où on en déduit que :

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{MJ}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{BJ}} \times \frac{\overline{AI}}{\overline{AK}} \tag{2.1}$$

Par permutation circulaire, on en déduit que l'on a aussi :

$$\frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EI}} \times \frac{\overline{FI}}{\overline{FK}} \tag{2.2}$$

$$\frac{\overline{NK}}{\overline{NI}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{CJ}} \times \frac{\overline{DJ}}{\overline{DI}} \tag{2.3}$$

Mais en considérant respectivement les puissances des points  $K$ ,  $I$  et  $I$  par rapport au cercle, on a :

$$\overline{KB} \times \overline{KC} = \overline{KA} \times \overline{KF}$$

et de la même façon :

$$\overline{IA} \times \overline{IF} = \overline{IE} \times \overline{ID}$$

$$\overline{JE} \times \overline{JD} = \overline{JB} \times \overline{JC}$$

On en déduit alors que :

$$\frac{\overline{MI}}{\overline{MJ}} \times \frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} \times \frac{\overline{NK}}{\overline{NI}} = 1 \text{ et que } P, M \text{ et } N \text{ sont alignés.}$$

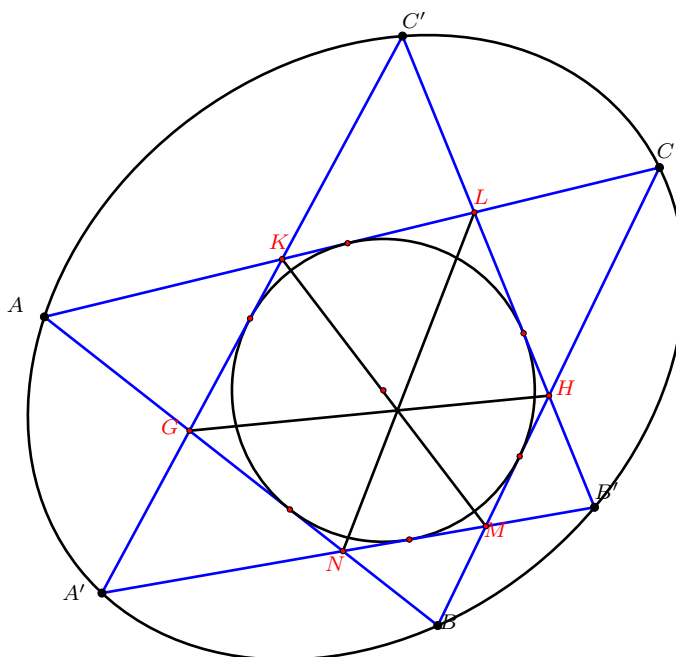


FIGURE 2.12 – Les six points sur une même conique

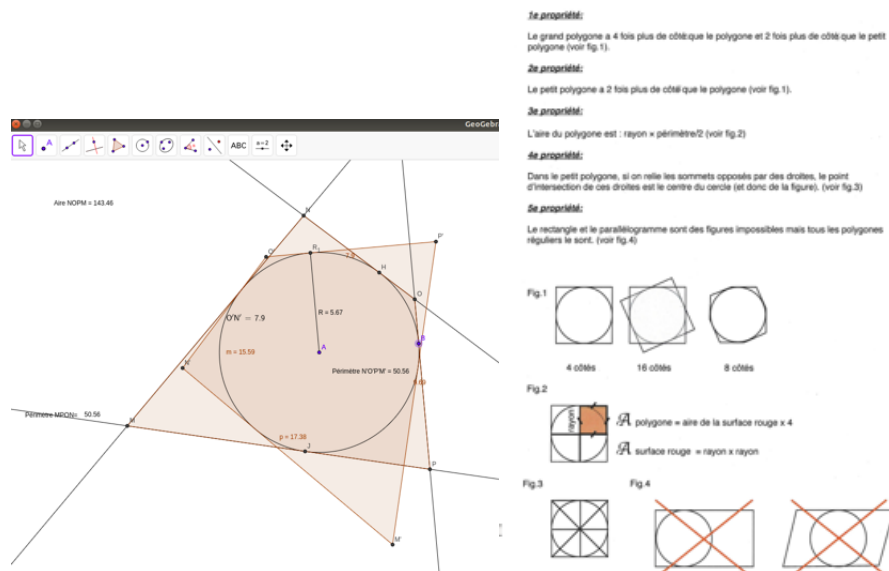


FIGURE 2.13 – Un fichier GeoGebra accompagnant les résultats trouvés

### 2.3 Le travail des élèves

Cette année encore, l'épreuve du problème ouvert n'a pas attiré beaucoup de classes malgré notre souci de relier plus directement les concepts utilisés aux mathématiques enseignées. Cependant, les réponses envoyées ont clairement montré que l'objectif que nous cherchions à atteindre était effectivement atteint pour les classes qui avaient participé à cette recherche. En effet, face à ce problème ouvert, les élèves se sont investis en faisant de nombreuses figures et en mettant en évidence des résultats ; malheureusement et sans doute du fait de la difficulté, très peu de démonstrations ont été proposées. Même si apparemment le problème était abordable, il était difficile pour les élèves de dépasser le stade de la simple constatation sur un dessin. Cette remarque a bien sûr été prise en compte pour les problèmes des années suivantes de façon à permettre à tous les élèves de rentrer véritablement dans un raisonnement mathématique pour trouver et prouver des résultats issus de la recherche de ce problème ouvert. En revanche les élèves ont beaucoup utilisé la géométrie dynamique (Voir par exemple la figure 2.13) et de nombreuses figures ont été envoyées comme réponse au problème, accompagnées de commentaires et de résultats, souvent écrits à la main sur des feuilles de papier ou des tableaux, ce qui montre bien la façon dont la géométrie dynamique était utilisée, comme support des recherches.

Dans les cas des polygones réguliers, les élèves ont bien remarqué les résultats donnés dans le paragraphe précédent sur le nombre de côtés des petits et grands polygones. Le résultat de la somme des aires des deux polygones égale à deux fois l'aire du polygone de départ est aussi un résultat proposé par les classes, comme en atteste cette réponse d'une classe de lycée (Fig. 2.14)

Encore une fois, le bilan de l'épreuve du problème ouvert dans le rallye mathématique de l'académie de Lyon était mitigé. Certes les réponses reçues montraient bien l'engagement des élèves, les recherches effectuées, l'investissement important dans une recherche mathématique, mais le peu de réponses reposaient de façon cruciale l'existence même d'une telle épreuve. Dans ces deux premières années, le bilan n'était pas très favorable à maintenir le problème ouvert dans le cadre du rallye. J'étais personnellement déçu et avec les collègues qui s'occupent de ce rallye, nous avons remis en question les problèmes tout comme l'organisation et chercher à comprendre le peu d'engouement pour la recherche de problèmes. Nous avons quand même persévéré en essayant de tirer au mieux les leçons des deux premières sessions.

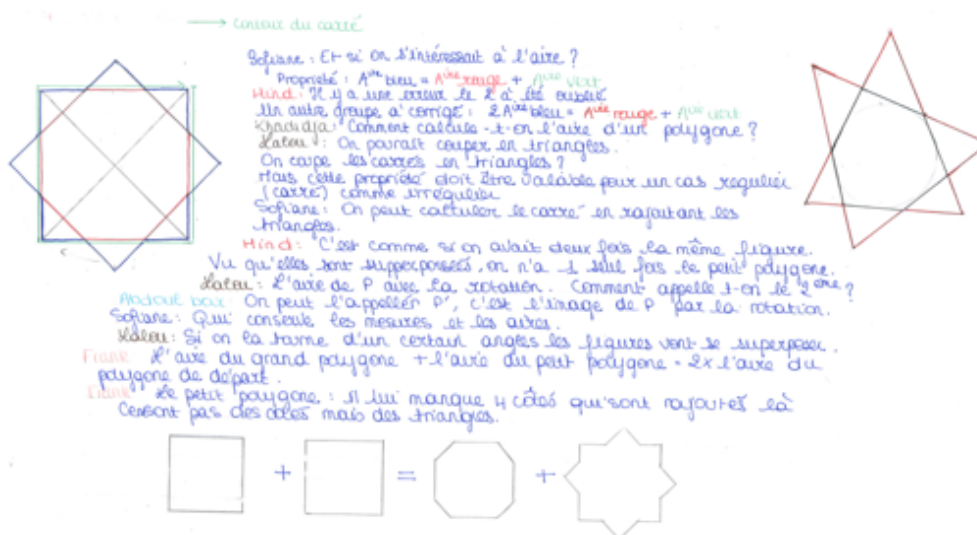


FIGURE 2.14 – Un résultat proposé par une classe de seconde

## 2.4 Utiliser ce problème en classe

### 2.4.1 À l'école primaire

En utilisant en particulier les polygones réguliers, la situation mathématique peut donner l'occasion de nombreuses explorations de figures mais aussi du vocabulaire utilisé pour décrire une figure polygonale (cercles inscrits, cercles circonscrits, polygones réguliers, convexes, concaves, étoilés, médiatrices, périmètres, aires, ...). En utilisant des modèles en papier, mobiles autour du centre du cercle inscrit, l'observation du nombre de côtés, de sommets peut être une activité féconde, si tout le vocabulaire est institutionnalisé. La figure 2.4, 28, peut être utilisée comme un patron pour construire ces modèles mobiles et les résultats sur le nombre de côtés des petits et grands polygones peuvent être observés directement à partir des expériences.

On peut également imaginer construire la figure sur un logiciel de géométrie dynamique. La seule construction de deux triangles équilatéraux dont l'un tourne autour du centre du cercle inscrit est un défi intéressant qui peut faire expérimenter les propriétés et caractérisations des objets manipulés.

Ainsi, le problème peut être l'occasion de parcourir un petit chemin dans le monde des polygones en découvrant et en utilisant des propriétés et tout un vocabulaire qui pourra être bien utile par la suite !

### 2.4.2 Au collège et au lycée

Comme nous l'a montré les réponses proposées par les classes lors de l'épreuve du rallye, ce problème est une occasion rêvée de construire des figures de géométrie et d'en examiner les propriétés. Les difficultés des raisonnements généraux ne doivent pas cependant masquer le fait que certains raisonnements peuvent être accessibles dès la classe de troisième. En particulier, et en particulierisant sur quelques exemples de polygones réguliers, les calculs d'angles (angles au centre, angles entre deux côtés) permettent de mettre en évidence des régularités et les relations pouvant exister entre les longueurs des côtés et les rayons des cercles inscrits et circonscrits. L'utilisation de la trigonométrie dans des triangles rectangles bien choisis est une occasion d'entraîner cette partie importante de la géométrie élémentaire. Et, dans le cas d'un triangle

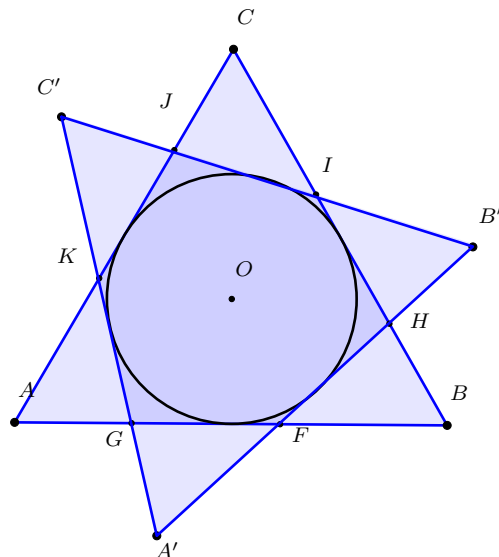


FIGURE 2.15 – Un calcul d'aire

équilatéral ou d'un carré, les calculs des aires des petits et des grands polygones peuvent être un but raisonnable d'une situation didactique. Bien entendu, l'énoncé devra être construit pour examiner ce (ou ces) cas et abandonner la généralité proposée dans le problème ouvert. Par exemple :

$ABC$  est un triangle équilatéral dont le centre du cercle circonscrit s'appelle  $O$ . En faisant tourner le triangle  $ABC$  autour de  $O$  d'un angle de  $\theta$  radians, on obtient un triangle  $A'B'C'$ . Calculer l'aire du polygone  $AGA'FBHB'ICJC'K$  (Voir figure 2.15) en posant  $OA = 1$ .

Dans cette configuration, les élèves peuvent remarquer que les trois triangles  $GFA'$ ,  $HB'I$  et  $JC'K$  sont égaux, que les angles  $\widehat{GAF} = \frac{\pi}{3}$ ,  $\widehat{A'GF} = \theta$  et  $\widehat{GFA'} = \frac{2\pi}{3} - \theta$  et il suffit alors de montrer que le côté  $GA'$  mesure  $2 \sin \frac{\theta}{2}$ , ce qui est suffisant pour conclure. (Voir le raisonnement page 29 fait dans le cas général).

Selon l'expérience des élèves, on peut particulariser la valeur de  $\theta$  en donnant une valeur simple comme  $\frac{\pi}{3}$  par exemple, dans lequel les triangles  $GFA'$ ,  $HB'I$  et  $JC'K$  sont équilatéraux.

Les manipulations de la trigonométrie du triangle rectangle, des angles au centre et une observation fine de la figure peuvent être aidées par un dessin réalisé sur un logiciel de géométrie dynamique. Mais de toutes façons, cette situation ne peut pas être proposée comme un exercice d'application qui pourrait être trouvé rapidement. C'est une invitation à un raisonnement géométrique complexe, avec des conjectures et des réfutations, que la situation propose. Dans ces conditions les expériences réalisées avec la géométrie dynamique peuvent être fécondes pour appuyer un résultat ou au contraire le réfuter et complémentaires de dessins réalisés sur papier. Il s'agit en effet d'interroger cette figure pour mettre en évidence des résultats qui pourront alors être démontrés.

# Chapitre 3

## 2013

Les leçons des deux premières années de l'épreuve « problème ouvert » du rallye de l'Académie de Lyon ont été tirées lors de nos réunions de bilan. Les collègues qui ont fait participer leurs élèves confirment l'engouement pour la recherche et l'investissement important des élèves dans cette recherche, même si le nombre de réponses envoyées a été encore cette année assez réduit. La question est alors de savoir comment généraliser cet enthousiasme à tous les élèves, ou en tout cas à un plus grand nombre d'élèves? Rendre l'épreuve obligatoire? Peut-être un peu radical comme réponse, et certainement contre-productive! Rendre le problème plus attractif? Nous y travaillons! Mais aussi, l'idée de reproduire à l'échelle des classes de l'Académie le projet « Polymath »<sup>1</sup> devint de plus en plus présente dans l'organisation de cette épreuve. De quoi s'agit-il?

Le projet Polymath est une collaboration entre mathématiciens du monde entier dont le but est de résoudre collaborativement des grands problèmes de mathématiques. En janvier 2009, Timothy Gowers a démarré une expérience sociale en proposant un blog sur lequel tout le monde pouvait réagir à un énoncé d'un problème de mathématiques non encore résolu. Il s'agissait de trouver une nouvelle preuve combinatoire à la version de densité du théorème de Hales-Jewett. Il écrit dans son blog :

I wanted to choose a genuine research problem in my own area of mathematics, rather than something with a completely elementary statement or, say, a recreational problem, just to show that I mean this as a serious attempt to do real mathematics and not just an amusing way of looking at things I don't really care about.

Au bout de quelques mois, sur le blog du projet et sous l'impulsion de Gowers mais également de Terence Tao, le problème fut résolu et la quarantaine de contributeurs publièrent sous le nom D.H.J Polymath<sup>2</sup> plusieurs articles dans les journaux de recherche mathématiques [Polymath, 2010]. Pourquoi alors ne pas copier cette initiative pour l'épreuve du problème ouvert et permettre aux élèves de travailler tous ensemble à la résolution d'un problème?

Le Polymath project se définit comme :

---

1. <https://polymathprojects.org/>

2. D.H.J est une référence au nom du premier problème : Density Hales-Jewett!

« A collaborative experiment, where we honor the world's great problem solvers, of past and present, by encouraging the rise of modern polymaths – teachers, entrepreneurs and awakened minds from all walks of life – to step up and guide humanity towards its fullest potential. »<sup>a</sup>. Ce projet est d'une certaine façon un équivalent des projets *open source* dans le domaine de la création mathématique. Terence Tao, médaille Field 2006 est avec Tim Gowers un grand instigateur des discussions, et, actuellement, il continue à participer activement à ce projet ; il a notamment lancé la discussion en janvier 2018 du quinzième polymath qui s'intéresse à la constante de Bruijn-Newman,  $\Lambda$  après avoir publié le 18 janvier 2018 avec Brad Rodgers, « The De Bruijn–Newman constant is non-negative ».

<sup>a</sup>. Une expérience de collaboration, où nous honorons les grands *résolveurs* de problèmes du monde, du passé et du présent, en encourageant la montée des polymaths modernes - enseignants, entrepreneurs et esprits éveillés de tous horizons - pour intensifier et guider l'humanité vers son plein potentiel.

Gowers et Nielsen écrivent en 2009 un article dans *Nature Massively collaborative mathematics* [Gowers et Nielsen, 2009] dans lequel ils écrivent :

The working record of the Polymath Project is a remarkable resource for students of mathematics and for historians and philosophers of science. For the first time one can see on full display a complete account of how a serious mathematical result was discovered. It shows vividly how ideas grow, change, improve and are discarded, and how advances in understanding may come not in a single giant leap, but through the aggregation and refinement of many smaller insights. It shows the persistence required to solve a difficult problem, often in the face of considerable uncertainty, and how even the best mathematicians can make basic mistakes and pursue many failed ideas. There are ups, downs and real tension as the participants close in on a solution. Who would have guessed that the working record of a mathematical project would read like a thriller?<sup>a</sup>

<sup>a</sup>. Le dossier de travail du projet Polymath est une ressource remarquable pour les étudiants en mathématiques et pour les historiens et philosophes des sciences. Pour la première fois, on peut voir en plein écran un compte rendu complet de la manière dont un résultat mathématique sérieux a été découvert. Il montre de façon frappante comment les idées grandissent, changent, s'améliorent et sont rejetées, et comment les progrès de la compréhension peuvent se faire non pas en un seul bond de géant, mais par l'agrégation et le raffinement de nombreuses idées plus petites. Il montre la persistance nécessaire pour résoudre un problème difficile, souvent dans un contexte d'incertitude considérable, et comment même les meilleurs mathématiciens peuvent commettre des erreurs fondamentales et poursuivre de nombreuses idées qui finalement échouent. Il y a des hauts, des bas et une réelle tension au fur et à mesure que les participants se rapprochent d'une solution. Qui aurait pu deviner que le dossier de travail d'un projet mathématique se lirait comme un thriller ?

Ainsi, en partant de ces idées et pour faire vivre aux élèves une telle aventure, nous proposâmes le troisième problème ouvert en cette année 2013. Il s'agissait donc pour les élèves de chercher collaborativement un problème dont la solution n'était publiée nulle part. Pour cela, une classe virtuelle WIMS a été ouverte dans laquelle les élèves pouvaient contribuer à l'avancée des solutions du problème.

### 3.1 L'énoncé

Trouver le plus grand nombre d'entiers entre 0 et ... qui sont le résultat d'opérations utilisant les chiffres de 2013, exactement une fois chacun, et uniquement ces chiffres.

Pour chacun de ces nombres, trouver un maximum d'écritures différentes à partir des chiffres 2,



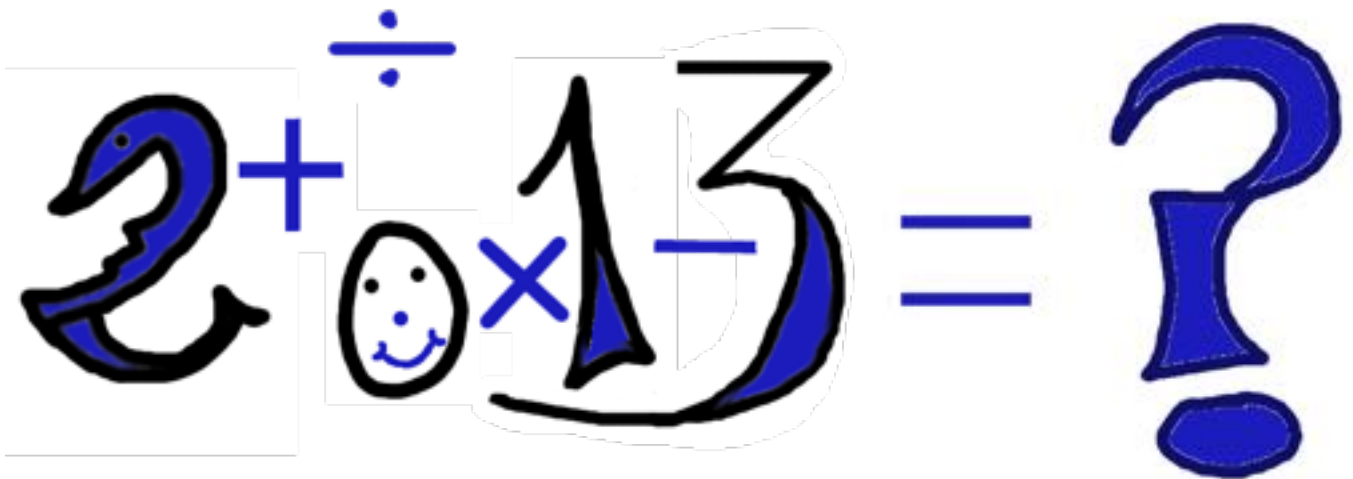


FIGURE 3.1 – L'image du problème

0, 1, 3 dans cet ordre. A défaut, on cherchera une écriture utilisant ces chiffres dans le désordre. Dans l'ordre (2, 0, 1, 3).

Exemple :

- $2 \times 0 \times 13 = 0$
- $(2 + 0 + 1)/3 = 1$

Dans le désordre.

Exemple :

- $30 - 2 \times 1 = 28$
- $1 - 2 + 30 = 29$
- $31 - 2^0 = 30$

Dans un premier temps chaque classe commencera par un calcul donnant 0, puis 1, puis 2, etc. On postera ses réponses en ligne au fur et à mesure.

Surveillez le forum où chacun peut intervenir avec ses idées et ses questions auxquelles l'équipe du Rallye ou vous-même pourrez répondre.

## 3.2 Un peu de mathématiques

Il est intéressant de constater qu'il existe une formule générale qui permet d'écrire tout nombre naturel  $n$  en utilisant, dans l'ordre, les chiffres 2, 0, 1, 3. Mais alors, ce problème n'est plus ouvert du tout ! Il le reste cependant à plus d'un titre !

Tout d'abord, il permet de revenir sur le qualificatif « ouvert ». Si on l'utilise dans le sens que les mathématiciens lui donne, un problème est ouvert lorsqu'aucune solution n'a été encore apportée et acceptée par la communauté mathématique ; ainsi, « est-ce que tout nombre naturel pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers ? » que l'on connaît aussi sous le nom de la conjecture de Golbach dans son assertion affirmative, est un problème ouvert en mathématiques. Mais, les problèmes utilisés avec des élèves ou des étudiants peuvent être dits « ouverts » pour exprimer que « l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution et qu'en aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours » [Arsac *et al.*, 1991]. Ainsi, un problème ouvert doit prendre en compte les connaissances des personnes à qui on le pose et un problème ouvert au cycle 1 pourra ne plus l'être au collège. Je reviendrai plus tard sur cette dimension également

importante permettant à un problème de vivre à des niveaux de connaissances différentes. Ensuite, c'est une des caractéristiques de ce problème, de pouvoir « introduire » de nouvelles opérations au fur et à mesure des recherches, et donc de permettre aux élèves de s'emparer de leurs connaissances pour les mettre en œuvre dans la résolution d'un problème. L'énoncé induit cette démarche en proposant comme exemple l'utilisation des parenthèses et de l'exponentiation. C'est également en acceptant et en affichant pour tous des solutions utilisant des fonctions que les élèves ont très naturellement généralisé l'utilisation des quatre opérations, souvent avec l'aide de leurs calculatrices, comme on le verra dans le paragraphe suivant.

Revenons au problème de mathématique. On peut dans un premier temps n'utiliser que opérations proposées dans l'énoncé (addition, soustraction, multiplication, division et exponentiation) et se poser la question de savoir quel sera le premier nombre que l'on ne pourra pas construire. Un rapide survol montre que :

$0 = 2 + 0 + 1 - 3$	$1 = (2 + 0 + 1)/3$	$2 = 2 + 0 \times 13$
$3 = 2 + 0 + 1^3$	$4 = 2 + 0 - 1 + 3$	$5 = 2 + 0 + 1 \times 3$
$6 = 2 + 0 + 1 + 3$	$7 = 20 - 13$	$8 = (2 + 0) \times (1 + 3)$
$9 = (2 + 0 + 1) \times 3$	$10 = -20/(1 - 3)$	$11 = -2 + 0 + 13$
$12 = -2^0 + 13$	$13 = 2 \times 0 + 13$	$14 = 2^0 + 13$
$15 = 2 - 0 + 13$	$16 = (2 + 0)^{1+3}$	$17 = 20 - 1 \times 3$
$18 = 20 + (1 - 3)$	$19 = 20 - 1^3$	$20 = 20^3?$
$21 = 20 + 1^3$	$22 = 20 - 1 + 3$	$23 = 20 + 1 \times 3$
$24 = 20 + 1 + 3$	$25 = ?$	

Comme on le voit sur ce tableau, 25 apparaît comme le premier nombre qui ne puisse être construit avec les opérations proposées dans l'énoncé. On peut en effet, tester les opérations, ce qui à la main peut être fastidieux mais ce qui peut donner l'idée de programmer de façon à automatiser la recherche ; il suffit en effet de demander à l'ordinateur de choisir les signes dans la liste des signes autorisés, et de mettre d'éventuelles parenthèses.

Pour \* dans  $\{+, -, \times, /, c\}$  (où  $c$  représente la concaténation)  
 calculer  $2*0*1*3$   
 calculer  $(2*0)*1*3$   
 calculer  $2*(0*1)*3$   
 calculer  $2*0*(1*3)$   
 calculer  $(2*0)*(1*3)$   
 calculer  $(2*0*1)*3$   
 calculer  $2*(0*1*3)$

Si le résultat vaut 25  
 alors afficher l'opération ; fin

afficher "impossible" fin

Il ne reste plus qu'à traduire cet algorithme dans un langage de programmation, ce qui n'est pas si simple ! Mais l'idée peut être conservée et la transformation du problème en un problème informatique peut être intéressante. Nous allons voir qu'un programme peut en effet trouver un grand nombre de solutions, pourvu que le programmeur inclue assez de fonctions !

Pour réussir à écrire 25, on peut changer l'ordre des chiffres, mais là encore sans succès, comme le montre le résultat de l'algorithme précédent sur les 24 permutations des nombres 0, 1, 2, 3 :

('0', '1', '2', '3')	[25, 'impossible']	('0', '1', '3', '2')	[25, 'impossible']
('0', '2', '1', '3')	[25, 'impossible']	('0', '2', '3', '1')	[25, 'impossible']
('0', '3', '1', '2')	[25, 'impossible']	('0', '3', '2', '1')	[25, 'impossible']
('1', '0', '2', '3')	[25, 'impossible']	('1', '0', '3', '2')	[25, 'impossible']
('1', '2', '0', '3')	[25, 'impossible']	('1', '2', '3', '0')	[25, 'impossible']
('1', '3', '0', '2')	[25, 'impossible']	('1', '3', '2', '0')	[25, 'impossible']
('2', '0', '1', '3')	[25, 'impossible']	('2', '0', '3', '1')	[25, 'impossible']
('2', '1', '0', '3')	[25, 'impossible']	('2', '1', '3', '0')	[25, 'impossible']
('2', '3', '0', '1')	[25, 'impossible']	('2', '3', '1', '0')	[25, 'impossible']
('3', '0', '1', '2')	[25, 'impossible']	('3', '0', '2', '1')	[25, 'impossible']
('3', '1', '0', '2')	[25, 'impossible']	('3', '1', '2', '0')	[25, 'impossible']
('3', '2', '0', '1')	[25, 'impossible']	('3', '2', '1', '0')	[25, 'impossible']

En revanche, il peut être intéressant de rajouter une « opération », par exemple, le factoriel : Pour  $n$  entier on définit le factoriel de  $n$  et on note  $n!$  le nombre obtenu en multipliant tous les nombres naturels non nul inférieurs ou égaux à  $n$  :

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 1$$

avec la convention  $0! = 1$

Ainsi,  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$  etc. Dans ces conditions, 25 peut maintenant s'écrire :

$$25 = (2 \times 0)! + (1 + 3)!$$

On voit ici que les possibilités de calcul s'ouvrent largement. En acceptant le factoriel, une large brèche s'ouvre et de nombreux résultats apparaissent qui n'étaient pas encore possibles avec les premières opérations. Bien sûr, nous pouvons alors rajouter d'autres possibilités, en utilisant par exemple la racine carrée ou la partie entière de  $x$ , notée  $\lfloor x \rfloor$  définie comme le plus grand entier inférieur à  $x$ , ou la partie entière supérieure de  $x$  définie cette fois comme le plus petit entier plus grand que  $x$ , noté cette fois  $\lceil x \rceil$  etc. Ainsi, par exemple 20 aurait pu s'écrire  $20 = 20 + \lfloor 1/3 \rfloor$  puisque le plus grand entier plus petit que  $1/3$  est 0. Ou par exemple, comme l'avait proposé une classe du lycée Rosa Parks :

$$33 = \left\lceil \sqrt{20}^{1+\sqrt{\sqrt{3}}} \right\rceil$$

Les possibilités de calculs s'ouvrent de plus en plus, mais, rien ne permet encore de savoir si un nombre pourrait ne pas être calculé. Il nous faut donc prouver que, quelque soit le nombre  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une formule utilisant 2, 0, 1, 3 dans cet ordre qui donne comme résultat le nombre  $n$ . On utilisera pour ça, en plus des opérations déjà décrites, la fonction  $\ln$ , logarithme népérien qui est définie comme la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui s'annule pour  $x = 1$ .

**Résultat**

$$\forall n > 0 \quad n = - \frac{\ln \left( \frac{\ln \left( \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}_n \right)}{\ln(0!+1)} \right)}{\ln(\lceil \sqrt{3} \rceil)}$$

ou, écrit en ligne :

$$n = - \frac{\ln(\ln(\underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}_n) / \ln(0! + 1)) / \ln(\lceil \sqrt{3} \rceil)}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\ln \left( \frac{\ln \left( \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}_n \right)}{\ln(0!+1)} \right)}{\ln(\lceil \sqrt{3} \rceil)} \right)}{\ln 2} = \frac{\ln \left( \frac{\ln \left( 2^{\frac{1}{2^n}} \right)}{\ln 2} \right)}{\ln 2} \\
 & = -\frac{\ln \left( \frac{1}{2^n} \right)}{\ln 2} = \frac{n \ln 2}{\ln 2} = n
 \end{aligned}$$

### 3.3 Le travail des élèves

Cette version de l'épreuve a été un réel succès. Beaucoup de classes ont été impliquées et le dynamisme des élèves se retrouvait sur la plateforme WIMS. Pas un jour sans qu'un nouveau résultat n'apparaisse. Dans cette recherche, les élèves ont été rapidement très inventifs et à partir du moment où nous avons donné la possibilité d'explorer d'autres pistes incluant des opérations nouvelles, de très nombreux résultats sont apparus. Très vite, tous les nombres de 0 à 100 ont trouvé leur calcul et pratiquement toujours en conservant l'ordre 2, 0, 1 et 3, comme le montre ce compte rendu effectué quelques jours après que l'énoncé eut été dévoilé :

3 février

14 = 20/1-3!

26 = 20+1\*3!

4 février

4 = gcd(20,1+3)

5 = floor(sqrt(sqrt((2+0+1+3)!)))

86 = floor(sqrt(sqrt(((2+0!)!)!)\*sqrt(sqrt(sqrt(13!))))))

87 = ceil(sqrt(sqrt(((2+0!)!)!)\*sqrt(sqrt(sqrt(13!))))))

88 = floor(sqrt(sqrt(((2+0!)!)!)\*ceil((sqrt(sqrt(sqrt(13!)))))))

89 = ceil(sqrt(sqrt(((2+0!)!)!)\*ceil(sqrt(sqrt(sqrt(13!))))))

0 = floor((2^0)\*1/3)

1 = floor(2^0+1/3)

1 = (-2+0)\*1+3

10 = (-2-0)\*(1-3!)

120 = (2-0!)\*(-1+3)!!

0 = (2\*0)/13

26 = lcm(2+0,13)

20 = lcm(20,1+3)

6 = floor(20^1/3)

2 = floor(sqrt(2+0+1\*3))

CLG LOUIS ARAGON  
CLG LOUIS ARAGON

LYC RENE DESCARTE  
LYC RENE DESCARTE

LYC DE LA PLAIN  
LYC DE LA PLAIN

LYC DE LA PLAIN  
LYC DE LA PLAIN

CLG GASTON BATY  
CLG GASTON BATY

LYC AMPERE  
LYC AMPERE

LYC ROSA PARKS  
B114 CLG LOUIS ARAGON

B064 CLG ARISTIDE BRI  
CLG ARISTIDE BRI

D033 CLG JACQUES PRE  
CLG JACQUES PRE

L'imagination est au rendez-vous! On voit en particulier l'utilisation du PGCD et du PPCM. Comme les réponses étaient proposées sur la plateforme WIMS, les élèves ont intégrés la syntaxe du logiciel qui vérifiait en direct les réponses données. Et la règle stipulait que toutes les fonctions ou opérations que WIMS connaissaient pouvaient être utilisées. Les élèves n'ont pas hésité à

explorer des fonctions même s'ils ne les avaient pas étudiées en classe comme le montre le tableau ci-dessous utilisant souvent *floor* et *ceil*, les parties entières inférieures et supérieures.

(02-03-2013, 08 :38 :28)	
$0 = 2*0^{\wedge}1*3$	CLG LOUIS ARAGON
$2 = 2-0*1/3$	LYC AUGUSTE ET LO
$1 = \text{gcd}(20-1,3)$	CLG GASTON BATY
$13 = \text{gcd}(2*0,13)$	GASTON BATY
$3 = \text{gcd}(20+1,3)$	GASTON BATY
$1 = \text{gcd}(2^{\wedge}(0+1),3)$	GASTON BATY
$2 = 2+0^{\wedge}(1+3)$	GASTON BATY
$5 = 2^{\wedge}(0+1)+3$	GASTON BATY
$12 = -2+0!+13$	LYC DE LA PLAIN
$10 = -2-0!+13$	LYC DE LA PLAIN
$20 = 20/1^{\wedge}3$	CLG LOUIS ARAGON
$33 = \text{ceil}(\text{sqrt}(20)^{\wedge}(1+\text{sqrt}(\text{sqrt}(3))))$	LYC ROSA PARKS
$30 = \text{ceil}(\text{sqrt}(20)^{\wedge}(1+\text{sqrt}(\text{sqrt}(\text{sqrt}(3!))))))$	LYC ROSA PARKS
$68 = \text{floor}(20*(1+\text{sqrt}(3!)))$	LYC ROSA PARKS
$52 = \text{ceil}(20*(1+\text{sqrt}(\text{sqrt}(3!))))$	LYC ROSA PARKS
$35 = \text{ceil}(20.1*(\text{sqrt}(3)))$	LYC ROSA PARKS
$92 = \text{floor}(\text{sqrt}(((2+0!)!)!)*(1+\text{sqrt}(3!)))$	LYC ROSA PARKS
$93 = \text{ceil}(\text{sqrt}(((2+0!)!)!)*(1+\text{sqrt}(3!)))$	LYC ROSA PARKS
$79 = \text{ceil}(\text{ceil}(\text{sqrt}(((2+0!)!)!)*\text{sqrt}(\text{sqrt}(\text{sqrt}((1+3!)!))))$	LYC ROSA PARKS
$77 = \text{floor}(\text{sqrt}(((2+0!)!)!)*\text{sqrt}(\text{sqrt}(\text{sqrt}((1+3!)!))))$	LYC ROSA PARKS
...	

On peut penser que dans les premiers temps les élèves essayaient « au hasard » des opérations et proposaient alors un résultat. Mais assez rapidement des nombres sont apparus comme « difficiles » en ce sens qu'ils n'avaient pas été trouvés dans la liste ordonnée des naturels. Dans ces conditions, une véritable exploration des nombres et des différentes fonctions a été mise à l'œuvre. 92, par exemple a « résisté » longtemps !

Voici une proposition :

$2*(0+E(\text{sqrt}(\text{sqrt}(\text{sqrt}((1C(3!)!))))))$  où C représente la concaténation :

$1C3! = 16$  (1 concaténé avec le résultat de  $3!=6$ )

$16! = 20922789888000$  et  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{20922789888000}}} \approx 46,2463$  dont la partie entière vaut 46.

Finalement  $2 \times 46 = 92$ .

De cette recherche, je retiens deux éléments qui me paraissent intéressants et importants : d'une part la créativité dont on fait preuve les élèves pour « boucher les trous » lorsqu'un résultat manquait. Ce faisant, les élèves sont rentrés dans une exploration des fonctions qui peut leur permettre de mieux comprendre leur comportement et de mieux estimer des calculs qu'ils pourront être amenés à rencontrer dans leurs études.

D'autre part la collaboration a fonctionné de très belle façon, en construisant petit à petit une trousse à outils de plus en plus perfectionnée ; quand une classe trouvait un résultat en introduisant un nouvel outil, cet outil était très rapidement réutilisé pour compléter encore la longue liste des nombres « trouvés ».

Enfin, pour conclure ce chapitre, et même si aucun élève n'a pensé à écrire un tel programme (l'enseignement de l'algorithmique et de l'informatique n'étaient pas encore à l'ordre du jour !) je propose un programme en Python permettant d'explorer les nombres, ici de 0 à 100 :

```
from math import *
from random import *
import itertools

bi=['plus','moins','mult','div','puis','D']
un=['','fact','op','E','rac','expo']

def plus(a,b):
    return a+b
def moins(a,b):
    return a-b
def mult(a,b):
    return a*b
def div(a,b):
    if b==0:
        return False
    return a*1.0/b
def puis(a,b):
    if a==0:
        return 0
    if b*log(abs(a))>10000.:
        return False
    if a<0:
        return False
    return a**b
def D(a,b):
    return 10*a+b

def rac(n):
    if n<0:
        return False
    return sqrt(n)
def expo(n):
    if n>20:
        return False
    return exp(n)
def fact(n):
    if n<0 or n>=10:
        return False
    if n==0 or n==1:
        return 1
    return n*fact(n-1)
def op(n):
    return -n
def E(n):
    return floor(n)

def cherche(n,chiffres):
```



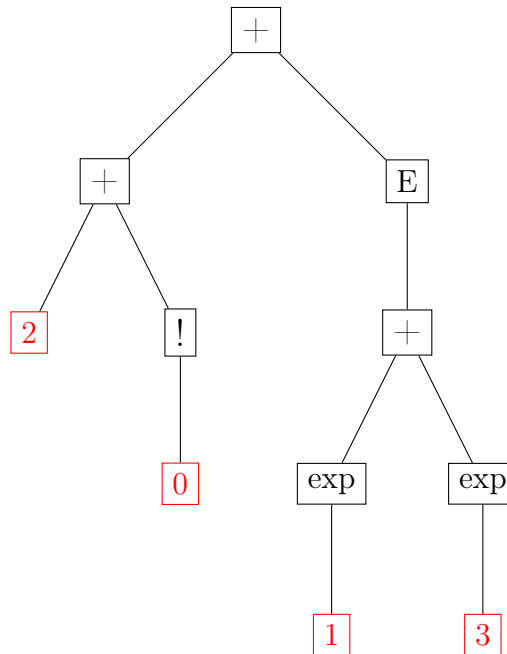
Le programme donne des réponses en notation polonaise inversée qui peuvent être représentées sous forme d'arbre de l'expression algébrique ; par exemple si nous demandons d'afficher pour 25, en remplaçant les dernières lignes du programme ci-dessus par :

```
print cherche(25,['2','0','1','3'])
```

La réponse donnée est :

```
(plus((plus((2),fact(0)),E(plus(expo(1),expo(3))))))
```

ce qui peut être représenté par l'arbre :



Ce qui peut être écrit :

$$(2 + 0!) + (1 + 3) = 25$$

Il est ici intéressant de voir qu'un même nombre, issu des mêmes calculs, peut être représenté d'au moins trois façons différentes.

Par ailleurs, le programme peut également donner les réponses pour d'autres années ! Essayons avec 2020 en remplaçant les dernières lignes par :

```
ll=list(itertools.permutations(['0','0','2','2']))
```

```
for i in ll:
    for j in range(25):
        print cherche(j,i)
```

En ne conservant que les résultats obtenus en mettant les chiffres dans l'ordre de l'année 2020, il vient :

```
(1, '(plus((plus((plus((2), (0))), op(2))), (0)))', 0)
(1, '(plus((plus((plus((2), (0))), op(2))), fact(0)))', 1)
(1, '(plus((plus((plus((2), fact(0))), op(2))), fact(0)))', 2)
(3, '(plus((2), (plus(fact(plus((0), op(2))), fact(0)))))', 3)
(1, '(plus((plus((plus((2), (0))), (2))), (0)))', 4)
(1, '(plus((plus((plus((2), (0))), (2))), fact(0)))', 5)
(1, '(plus((plus((plus((2), fact(0))), (2))), fact(0)))', 6)
```



(2, '(plus((plus(op(2),fact(0))),E(plus(expo(2),fact(0)))))', 7.0)  
 (3, '(plus((2),(plus(fact(plus(fact(0),(2))), (0)))))', 8)  
 (3, '(plus((2),(plus(fact(plus(fact(0),(2))),fact(0)))))', 9)  
 (3, '(plus((2),(plus(E(plus((0),expo(2))),fact(0)))))', 10.0)  
 (3, '(plus((2),(plus(E(plus(fact(0),expo(2))),fact(0)))))', 11.0)  
 (2, '(plus(fact(plus((2),fact(0))),fact(plus((2),fact(0)))))', 12)  
 (3, '(plus((2),E(plus(expo(plus(fact(0),rac(2))), (0)))))', 13.0)  
 (3, '(plus((2),E(plus(expo(plus(fact(0),rac(2))),fact(0)))))', 14.0)  
 (1, '(plus(E(plus((plus(expo(2), (0))),expo(2))),fact(0))', 15.0)  
 (1, '(plus(E(plus((plus(expo(2),fact(0))),expo(2))),fact(0))', 16.0)  
 (3, 'E(plus((2),expo(plus(rac(plus((0),expo(2))), (0)))))', 17.0)  
 (3, '(plus(op(2),E(plus(expo(plus(fact(0),(2))), (0)))))', 18.0)  
 (3, '(plus(op(2),E(plus(expo(plus(fact(0),(2))),fact(0)))))', 19.0)  
 (3, 'E(plus((2),expo(plus(rac(plus(fact(0),expo(2))), (0)))))', 20.0)  
 (1, '(plus(E(plus(expo(plus((2),fact(0))),rac(2))), (0))', 21.0)  
 (3, '(plus((2),E(plus(expo(plus(fact(0),(2))), (0)))))', 22.0)  
 (3, '(plus((2),E(plus(expo(plus(fact(0),(2))),fact(0)))))', 23.0)  
 (1, '(plus(fact(plus((plus((2), (0))), (2))), (0))', 24)

Cette troisième session de l'épreuve du problème ouvert a levé bien des doutes sur l'opportunité de l'épreuve du problème ouvert dans le rallye mathématique de l'académie de Lyon. Les élèves, par leur participation, nous ont montré qu'avec un énoncé bien ciblé et la possibilité de collaborer, l'épreuve était intéressante et provoquait exactement ce que nous souhaitions qu'elle provoque, un certain engouement pour la recherche mathématique ! Cette troisième expérience a été déterminante dans la suite de la vie de l'épreuve « problème ouvert » et même si les années suivantes, le succès a été fluctuant, cette expérience nous a montré toutes les potentialités de cette expérience.

## 3.4 Utiliser ce problème en classe

### 3.4.1 À l'école primaire

La solution savante développée dans la partie mathématique de ce chapitre ne peut pas être utilisée dans les classes de l'école élémentaire mais en revanche, tout comme le premier problème, cette situation est féconde pour faire faire des opérations variées et interroger la question des priorités des opérations. L'année 2013 était propice puisque les quatre premiers nombres naturels étaient présents. De plus, la présence de 0 est à la fois intrigante et féconde puisqu'elle oblige à se poser la question de l'utilité de ce nombre dans les calculs. Mais, il est bien sûr possible de partir d'un autre nombre, c'est ce qu'on appelle une variable didactique : le problème ne sera pas tout à fait le même en utilisant par exemple que les nombres 1, 2 et 3, puisque cette question de l'utilité (l'utilisation) de 0 ne pourra pas apparaître.

Par ailleurs en autorisant la concaténation des chiffres pour construire un nombre écrit dans la base décimale de position, le problème interroge également cette écriture qui est un des objectifs majeur de l'apprentissage de l'école primaire.

### 3.4.2 Au collège et au lycée

C'est bien sûr dans les classes de collège et de lycée que l'ajout de nouvelles opérations est intéressante et, là encore, tout comme dans le premier chapitre, les questions qui pourront être

```

( 'plus((plus((plus((0),fact(0))), (2))), op(2)))', 1)
( 'plus((0), (plus(fact(plus((0), op(2))), (2)))))', 2)
( 'plus((0), (plus(op(plus(fact(0), op(2))), (2)))))', 3)
( 'plus((plus((plus((0), (0))), (2))), (2))', 4)
( 'plus((plus((plus((0), fact(0))), (2))), (2))', 5)
( 'plus((plus((plus(fact(0), fact(0))), (2))), (2))', 6)
( 'plus((0), E(plus(fact(plus((0), op(2))), expo(2))))', 7.0)
( 'plus((0), (plus(fact(plus(fact(0), (2))), (2))))', 8)
( 'plus((0), (plus(E(plus((0), expo(2))), (2))))', 9.0)
( 'plus((0), (plus(E(plus(fact(0), expo(2))), (2))))', 10.0)
( 'plus((plus(fact(0), fact(0))), E(plus((2), expo(2))))', 11.0)
( 'plus((0), E(plus(expo(plus(fact(0), rac(2))), rac(2))))', 12.0)
( 'plus((0), E(plus(fact(plus(fact(0), (2))), expo(2))))', 13.0)
( 'plus((plus((0), (0))), E(plus(expo(2), expo(2))))', 14.0)
( 'plus((plus((0), fact(0))), E(plus(expo(2), expo(2))))', 15.0)
( 'plus((plus(fact(0), fact(0))), E(plus(expo(2), expo(2))))', 16.0)
( 'E(plus((plus((0), fact(0))), expo(plus(rac(2), rac(2))))', 17.0)
( 'plus((0), E(plus(expo(plus(fact(0), (2))), op(2))))', 18.0)
( 'plus(fact(0), E(plus(expo(plus(fact(0), (2))), op(2))))', 19.0)
( 'E(plus((0), expo(plus(op(plus(fact(0), op(2))), (2))))', 20.0)
( 'plus((0), E(plus(expo(plus(fact(0), (2))), rac(2))))', 21.0)
( 'plus((0), E(plus(expo(plus(fact(0), (2))), (2))))', 22.0)
( 'plus(fact(0), E(plus(expo(plus(fact(0), (2))), (2))))', 23.0)
( 'plus((plus((0), (0))), fact(plus((2), (2))))', 24)
( 'plus((plus(fact(0), (0))), fact(plus((2), (2))))', 25)

```

FIGURE 3.2 – Des résultats avec les chiffres de l'année 2020

abordées à travers la recherche de ce problème vont permettre de manipuler dans des contextes différents de ceux habituellement utilisés des fonctions comme la racine carrée, l'inverse, la factorielle, la partie entière, etc, dont on a vu, dans les productions des élèves, tout le profit qu'ils en tiraient en mettant en œuvre une grande imagination pour trouver de nouvelles valeurs. Il est aussi intéressant de voir que même avec une donnée de départ « pauvre » comme celle de l'année 2020, il est possible de trouver des résultats comme le montre la figure 3.2 avec des résultats de 1 à 25 écrits en polonaise inversée.

Cette situation peut permettre une illustration des concepts d'ensembles de nombre et dans les classes de lycée de montrer que la programmation peut permettre de trouver des résultats peut-être difficiles à mettre en évidence à la main. L'étude systématique de toutes les combinaisons des opérations mises en mémoire peut déboucher sur de nouveaux résultats mathématiques. Du point de vue épistémologique, la situation peut être l'occasion d'un débat dans la classe de mathématiques pour distinguer un résultat difficile à trouver mais facile à vérifier comme c'est le cas, par exemple, dans ceux présentés en figure 3.2 d'un résultat dont la vérification est laissée à un algorithme, comme c'est le cas par exemple pour la démonstration initiale du théorème des 4 couleurs proposée par Haken, Appel ([Appel et Haken, 1977]). Un travail en lien avec le professeur de philosophie serait certainement intéressant !

## Chapitre 4

# Les boîtes explosives

Fort du succès de l'année précédente, nous avons alors proposé en cette année 2014 un problème à résoudre encore une fois collaborativement. Et pour franchir une étape supplémentaire, le problème choisi est un « vrai » problème ouvert au sens des mathématiciens. Il est connu sous le nom des nombres de Schur et de partitions « libres de sommes » (*sum-free*). On dit qu'un ensemble d'entiers est libre de sommes si quelque soit  $a$  et  $b$  dans un cet ensemble,  $a + b$  n'appartient pas à cet ensemble. Le théorème de Schur est ainsi formulé :

**Théorème de Schur** : quelque soit l'entier  $k$ , il existe un plus grand entier positif  $N(k)$  tel que l'ensemble  $\{1, 2, \dots, N(k)\}$  peut être partitionné en  $k$  sous-ensemble libres de sommes.

Son auteur Issai Schur est un mathématicien russe qui a travaillé en Allemagne et était un élève de Ferdinand Georg Frobenius. Successivement professeur à l'Université de Bonn et de Berlin, Issai Schur était membre de l'Académie des Sciences Prussienne. Dans la période du nazisme, Issai Schur a perdu successivement son poste de professeur ainsi que sa position dans l'Académie des Sciences. Malgré les interventions de ses collègues, Issai Schur dût s'exiler au début de l'année 1939 ; après un bref séjour en Suisse où résidait sa fille, il rejoint Tel Aviv en Palestine ; mais, après les années de privation et de persécution imposées par le régime nazi, sa santé fragile s'est dégradé et il est mort en 1941. Ses relations en Suisse avec George Pölya lui ont permis de participer à des conférences pendant lesquelles il a montré l'étendue de ses travaux en théorie des nombres, entre autres. Sa correspondance avec Emmy Noether, Frobenius, Fraenkel et d'autres grands mathématiciens alors qu'il enseignait à l'université de Berlin témoigne de la notoriété de ce mathématicien à l'international (sa correspondance est regroupé dans le livre : *Studies in Memory of Issai Schur* [Joseph *et al.*, 2003]). Depuis la publication du théorème cité ci-dessus, de nombreux travaux ont été menés pour déterminer  $N(k)$ . Ce problème dans toute sa généralité est encore ouvert en mathématiques.

Même si les premières étapes peuvent parfaitement être abordées en classe dès la troisième, la généralisation est rapidement compliquée comme le montrent les développements du paragraphe suivant. Pour répondre au problèmes les élèves pouvaient tester leurs conjectures sur une page du site du rallye (Fig.4.2) et les réponses dès qu'elles étaient trouvées par une classe étaient disponibles sur le site. De ce fait, les élèves pouvaient essayer d'aller plus loin ou de montrer que le maximum était atteint. Pour la première fois, la présentation du problème a été faite en vidéo, et, pour les élèves, il était aussi possible d'envoyer des vidéos qui expliquaient la façon dont ils avaient travaillé (Fig.4.1).

Ainsi, les manipulations concrètes des nombres pouvaient être réalisées, les expériences conduites à la fois comme le montre la figure 4.1 avec des objets tangibles mais aussi sur le site du rallye où une simulation permettait de s'essayer et d'avoir un retour immédiat comme le montre la capture d'écran de la figure 4.2.

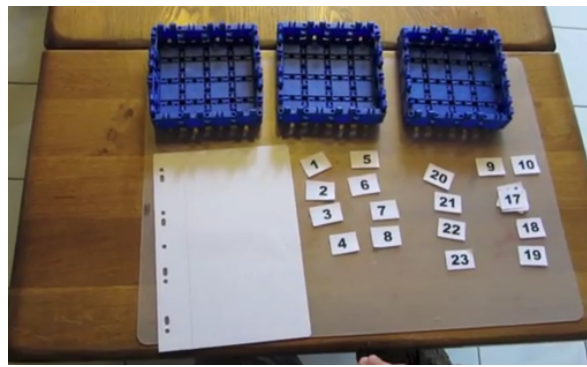


FIGURE 4.1 – Une image d’un film envoyé par une classe



FIGURE 4.2 – Le site pour tester le problème

## 4.1 Énoncé

On dispose de  $n$  récipients dans lesquels on doit mettre les nombres entiers, dans l’ordre avec la seule condition qu’il est impossible de mettre dans un récipient un nombre s’il est égal à la somme de deux nombres déjà présents. Jusqu’à quel nombre peut-on aller ?

## 4.2 Un peu de mathématiques

### 4.2.1 Avec deux boîtes

Pour  $n = 2$ , on peut dessiner l’ensemble des possibles (Fig. 4.3) et voir que le plus grand nombre atteint est 8 avec la configuration suivante :

$$(1, 2, 4, 8) - (3, 5, 6, 7)$$

### 4.2.2 Généralisation

Il s’énonce de la manière suivante :

Déterminer le plus grand  $m$  tel que l’ensemble  $\{1, 2, \dots, m\}$  puisse être partitionné en  $n$  sous-ensembles  $A_1, \dots, A_n$  tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall a \in A_i \forall b \in A_i, c = a + b \notin A_i$$

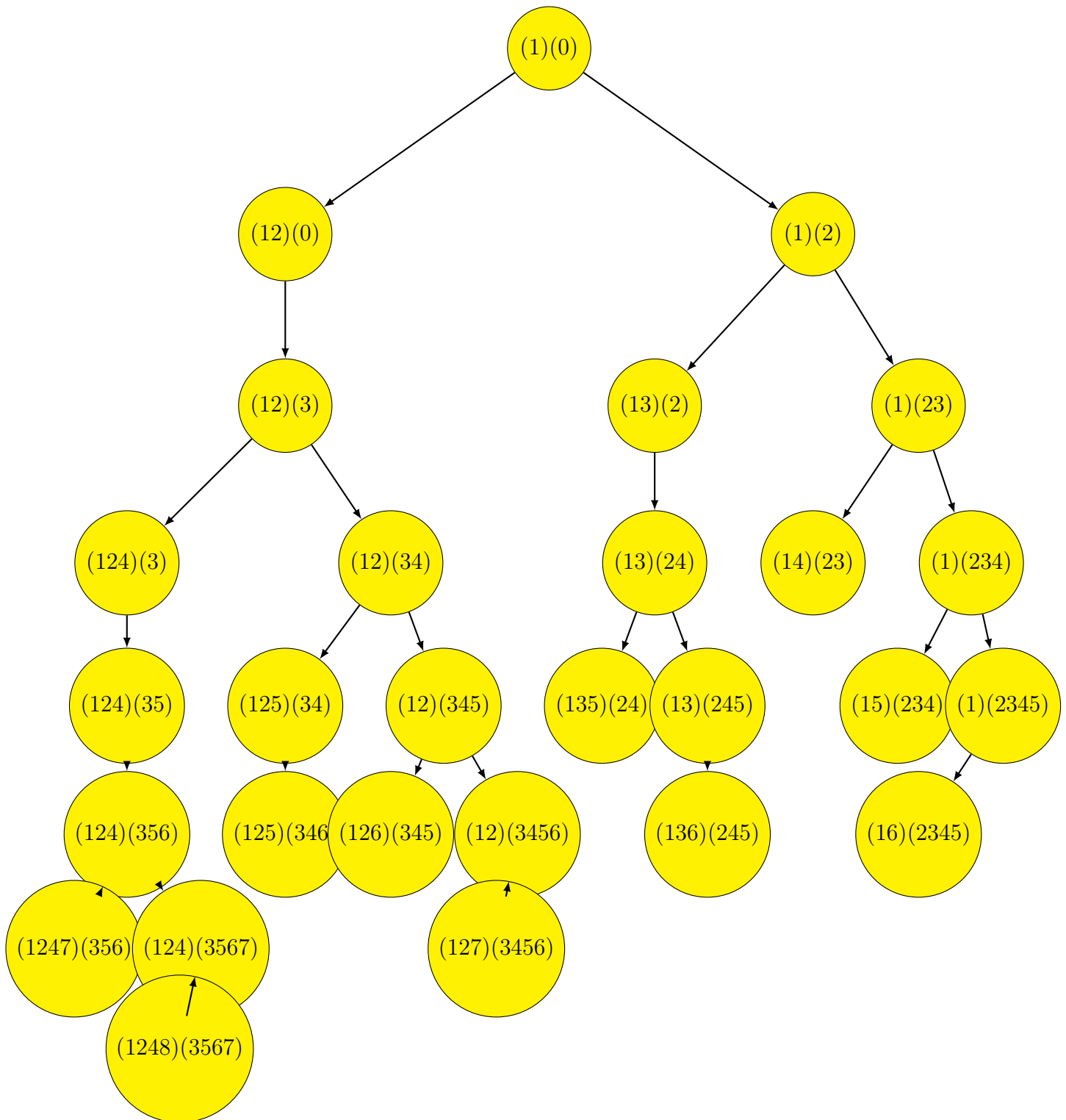


FIGURE 4.3 – Avec 2 boîtes (en notant 0 lorsque la boîte est vide)

On dit alors que la partition est « sum-free »

On dit que la partition est « weakly sum-free » si  $a$  et  $b$  sont distincts.

Si on note  $w_i$  la suite des nombres  $m$  pour des partitions weakly sum-free :

$$w_1 = 2$$

$$w_2 = 8$$

$$w_3 = 23$$

$$w_4 = 66$$

$$w_5 = 160 \text{ (mais ce résultat n'a été publié qu'en 2017 par par Marijn J.H. Heule du } \textit{Computer Science Department} \text{ de l'Université du Texas à Austin aux Etats-Unis.}$$

$$w_6 \leq 574$$

Un résultat dû à Irving [Irving, 1973] donne une majoration de  $w_i$  par  $\lfloor k!e \rfloor$ , soit :

$$w_2 \leq 10$$

$$w_3 \leq 48$$

$$w_4 \leq 260$$

$$w_5 \leq 1630$$

$$w_6 \leq 11742$$

$$w_7 \leq 95900$$

$$w_8 \leq 876808$$

$$w_9 \leq 8877690$$

$$w_{10} \leq 98641010$$

$$w_{11} \leq 1193556232$$

Cette majoration, au vu des résultats (ou conjectures) pour 5 et 6 est loin d'être optimale !

Une borne inférieure a été donnée sans preuve :  $w_i \geq \frac{3(3^i+2i-1)}{4} - 1$ .

Si on note  $s_i$  la suite des nombres  $m$  pour des partitions sum-free :

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 4$$

$$s_3 = 13$$

$$s_4 = 44$$

$$s_5 = 160$$

Cette dernière suite s'appelle la suite de Schur et le théorème de Schur s'énonce de la manière suivante :

**Théorème de Schur** Etant donné un entier positif  $k$ , il existe un plus grand entier  $N(k)$  tel que l'ensemble  $\{1, 2, \dots, N(k)\}$  peut être partitionné en  $k$  sous-ensembles sum-free. On a par ailleurs :

$$\frac{1}{2}(3^k - 1) \leq N(k) \leq \lfloor k!e \rfloor - 1$$

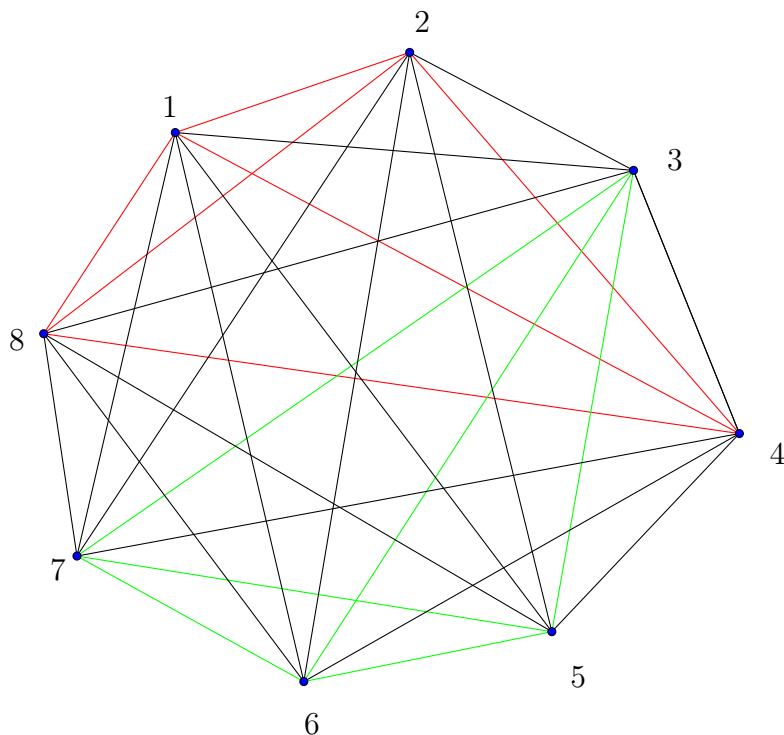
où  $\lfloor x \rfloor$  indique la partie entière de  $x$

On a donc les encadrements suivants :

i	borneinf	$s_i$	bornesup
2	4	$s_2$	4
3	13	$s_3$	15
4	40	$s_4$	64
5	121	$s_5$	325
6	364	$s_6$	1956
7	1093	$s_7$	13699
8	3280	$s_8$	109600
9	9841	$s_9$	986409
10	29524	$s_{10}$	9864100
11	88573	$s_{11}$	108505111

Les nombres de Schur sont les plus petits nombres tels qu'il est impossible de contruire une partition sum-free, c'est à dire 1 de plus que les termes de la suite  $s_i$ .

Le problème général peut être rapporté à la théorie de Ramsey. On dira que deux nombres sont de même couleur s'ils appartiennent à une même partition sum-free (ou weakly sum-free). Le théorème de Schur indiquant qu'il est possible d'extraire  $k$  graphes complets monocolores d'un graphe complet à  $n$  éléments. Par exemple si on considère le graphe complet à 8 éléments, on peut extraire deux sous graphes complets dont les arêtes seront de même couleur.



Le programme suivant, écrit en Python, indique, quant à lui, s'il est possible avec  $n$  boîtes, de placer les nombres de 1 à  $k$ .

```
from copy import deepcopy
def explode(l,k):
    n=len(l)
    for i in range(n-1):
        for j in range(i+1,n):
            if l[i]+l[j]==k:
```

```

        return 1
    return 0
def base(n):
    l=[[1]]
    for i in range(1,n):
        l.append([])
    return l
def construis(k,l):
    rep=[]
    n=len(l)
    liste=deepcopy(l)
    for i in range(n):
        long=len(liste[i])
        if explode(liste[i],k)==0:
            liste[i][long:]=[k]
            rep.append(liste)
        liste=deepcopy(l)
    return rep
def construis2(k,l,prof):
    while prof>1:
        rep=[]
        n=len(l)
        for i in range(n):
            liste=deepcopy(l)
            liste=construis(k,liste[i])
            rep=rep+liste
        l=deepcopy(rep)
        prof=prof-1
        print prof
        k=k+1
    return rep
def test(n):
    i=2
    while construis2(2,base(n),i)!=[]:
        i+=1
        print i
    return i-1
#Ecris les solutions permettant de placer dans n boites les nombres de 1 à i.
def lance(n,i):
    print construis2(2,base(n),i)
lance(2,8)

```

Ainsi, lance (2,8) permet de savoir s'il est possible de remplir les deux boites avec les nombres de 1 à 8 ; la réponse donnée par le programme est :

[[[1, 2, 4, 8], [3, 5, 6, 7]]] où l'on retrouve la solution proposée dans la figure [4.3](#).

lance (3,23) devrait donner la réponse avec trois urnes. Armez vous de patience et laissez tourner votre ordinateur un petit moment pour obtenir les solutions :



[1, 2, 4, 8, 11, 16, 22]	[3, 5, 6, 7, 19, 21, 23]	[9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20]
[1, 2, 4, 8, 11, 17, 22]	[3, 5, 6, 7, 19, 21, 23]	[9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20]
[1, 2, 4, 8, 11, 22]	[3, 5, 6, 7, 19, 21, 23]	[9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20]
[1, 2, 4, 8, 11, 16, 22]	[9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20]	[3, 5, 6, 7, 19, 21, 23]
[1, 2, 4, 8, 11, 17, 22]	[9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20]	[3, 5, 6, 7, 19, 21, 23]
[1, 2, 4, 8, 11, 22]	[9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20]	[3, 5, 6, 7, 19, 21, 23]

On voit que dans chacune de ces solutions, il est impossible de rajouter 24; regardons par exemple la première solution, dans la première boîte  $22+2 = 24$ , dans la seconde  $21+3=24$  et dans la troisième  $10+14 = 24$ .

### 4.3 Le travail des élèves

Assez rapidement les élèves ont trouvé le maximum pour deux boîtes. Nous ne demandions pas d'arguments mais de montrer les compositions des boîtes. Ainsi, pour trois puis quatre boîtes, les « records » ont évolués tout au long de la recherche du problème et finalement les valeurs 8, 13 et 44 ont été trouvées, ce qui était exactement les connaissances mathématiques de l'époque. Bien sûr, elles ont été trouvées de manière empirique sans justifications et, en particulier sans montrer que le maximum avait été atteint.

Même si les arguments n'ont pas été fourni, il est intéressant de voir que les élèves ont beaucoup travaillé sur les majorations et mis à jour des stratégies pour avancer dans le problème. Ainsi, par exemple, une vidéo a été envoyée (Fig. 4.4) qui montrait qu'avec un nombre  $n$  de boîtes, on pouvait toujours mettre le nombre  $2^n$ . En effet, après avoir mis 1 et 2 dans la première boîte, la seconde peut sans problème contenir tous les nombres jusqu'à  $2 \times$  le plus grand nombre de la boîte précédente, soit, 3, 4 dans la deuxième boîte, 5, 6, 7, 8 dans la troisième, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 dans la quatrième et ainsi de suite. Le résultat n'est pas optimal mais le raisonnement particulièrement intéressant !

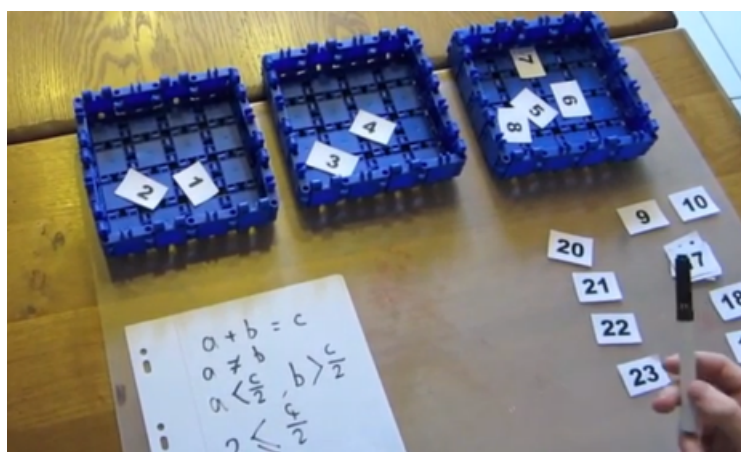


FIGURE 4.4 –  $2^n$  dans  $n$  boîtes

Ce problème a aussi été l'occasion pour les élèves de « manipuler » les nombres, d'une façon très concrète comme on le voit sur la capture d'une autre vidéo (Fig. 4.5) où les nombres sont représentés par des buchettes; la boîte « explosera » lorsque il sera possible d'aligner deux suites de buchettes de même longueur !

Des classes ont également essayé de programmer en utilisant Scratch, ce qui permet de faire l'expérience comme il avait été fait sur la page d'essai du site du rallye (Fig. 4.2).

Le fait que la page du problème sur le site du rallye ait été interactive a certainement participé au succès du problème parce qu'elle incitait les élèves à se lancer dans l'expérience. Par ailleurs,

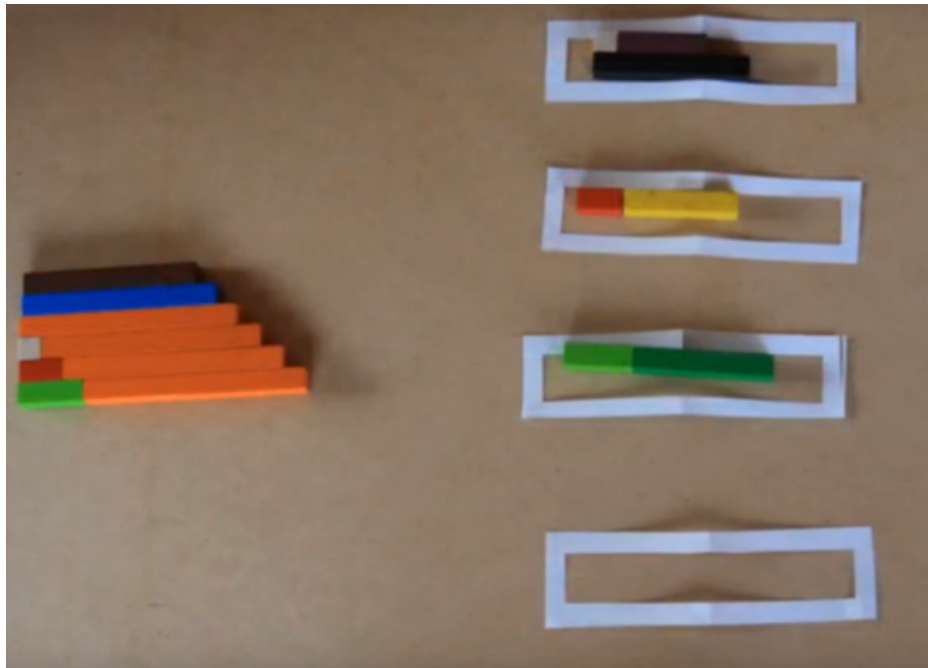


FIGURE 4.5 – Les nombres représentés par des buchettes

comme les résultats étaient publiés au fur et à mesure des réponses envoyées, la stimulation entre les classes a là aussi certainement joué dans le nombre de réponses, chacun voulant obtenir le maximum et détenir le record.

Bien que dans le fond très difficile, ce problème a été un succès et la créativité des élèves s'est traduit à la fois par les résultats trouvés et les présentations envoyées, vidéos, images, schématisations, programmations comme le montrent les figures 4.4 et 4.5.

Petit à petit, l'épreuve du problème ouvert a trouvé son identité propre et s'est installée dans le paysage du rallye comme une évidence, même si elle reste marginale vis-à-vis du succès grandissant du rallye au fur et à mesure des années.

## 4.4 Utiliser ce problème en classe

### 4.4.1 À l'école primaire et au collège

Ce problème peut être utilisé dans les classes de primaire comme un jeu qui peut même se jouer à deux. Chaque joueur joue à tour de rôle le premier place 1 dans une boîte, le second place 2, et ainsi de suite. Le jeu s'arrête quand un des deux joueurs ne peut plus continuer. La question de savoir si une stratégie gagnante existe avec 2 ou trois boîtes peut déjà être un défi intéressant dans les classes de cycle 3.

Dans cette situation, c'est bien sûr la vérification du coup de l'adversaire et la prévision de son propre coup qui amène les élèves à faire des calculs et à les organiser puisque le nombre qui sera placé dans la boîte ne doit pas être la somme de deux quelconques déjà présents.

Faire le jeu avec des buchettes (comme illustré sur la figure 4.4 page 57) ou avec des cartes et des boîtes en carton n'est pas difficile à réaliser et peut s'avérer un petit jeu sympathique pour des élèves intéressés. La difficulté des raisonnements n'en fait cependant pas un problème très fécond pour les classes de primaire ou des premières années de collège.

### 4.4.2 Au lycée

Utiliser quatre boîtes et des cartes peut s'avérer un jeu intéressant pour des lycéens mais, c'est certainement dans la construction d'un algorithme et la réalisation d'un programme que le problème peut être utilisé de la façon la plus féconde. C'est l'occasion de parler de complexité d'un programme et de montrer que même si l'algorithme est facile à mettre en œuvre, le temps de calcul vite prohibitif ne permet pas d'atteindre une réponse.



## Chapitre 5

# Combien de multiplications ?

Ce problème a été inspiré par la petite calculatrice Primaire de Texas Instruments. Cette calculatrice<sup>1</sup> est un environnement propre à susciter l'exploration et l'investigation autour des nombres et des opérations. Ses fonctionnalités spécifiques, notamment dans le mode « exercice », permettent de proposer aux élèves des rétroactions facilitant la construction de validations à partir des propriétés des nombres. La calculatrice prend en charge « la gestion d'expressions comportant des éléments inconnus que l'utilisateur aura à identifier »<sup>2</sup>. Par exemple, dans l'ensemble des nombres décimaux, quelle opération peut être mise à la place du symbole \* pour que l'opération  $3 * 1,5 = 4,5$  soit juste ? La première indication donnée par la calculatrice est alors qu'il existe deux solutions, mais, si par exemple, on propose la soustraction comme opération, elle indique que le résultat de l'opération  $3 - 1,5$  est inférieur à 4,5. Cet exemple simple illustre cette construction de stratégies de validation décrite précédemment. Dans ce contexte, le projet CaPriCo (Calculatrices en Primaire et au Collège) a eu pour objet de construire des activités pour la classe (entre le CM1 et la cinquième), de les mettre en œuvre et d'en analyser les effets sur la compréhension des nombres par les élèves. Voir par exemple [Aldon et Rabatel, 2015] dans les actes de la XLIIe COPIRELEM qui s'est déroulée à Besançon en juin 2015.

Parmi les situations développées dans ce groupe, nous avons adapté une recherche des nombres premiers pour des élèves de CE2-CM1. Dans cette situation, les élèves ne connaissent pas les nombres premiers mais connaissent l'opération « multiplication » et la division euclidienne ainsi que les tables de multiplication. Même si traditionnellement, ces tables se terminent par la multiplication du nombre de base par 10, il est possible d'amener les élèves à penser que cet algorithme se poursuit. Les connaissances qui peuvent être visées à travers la recherche de ce problème pourraient donc être le lien entre le reste nul dans une division euclidienne et l'appartenance du nombre à la table du diviseur. Ainsi l'énoncé proposé aux élèves a été :

Quels sont les nombres qui n'apparaissent qu'une fois dans les tables de multiplication (élargies...)?

Exemple : 2 n'apparaît que dans la table de 2, mais 4 apparaît dans la table de 2 et dans la table de 4 donc on va le barrer. 18 apparaît dans la table de 2 :  $2 \times 9$  et apparaît aussi dans la table de 3 :  $18 = 3 \times 6$ .

La calculatrice était alors un outil parmi d'autres pour interroger les nombres et savoir combien de fois un nombre apparaît :  $? \times ? = 18$  :

- Si la réponse de la calculatrice est "2 sol", ce nombre est à retenir puisqu'il n'apparaît que dans sa table  $1 \times n$  et  $n \times 1$ .
- Si la réponse de la calculatrice est supérieur à 2, ce nombre est à rejeter puisqu'il appartient à au moins deux tables de multiplication.

---

1. TI-Primaire Plus™

2. D'après le manuel TI Primaire plus page 22



FIGURE 5.1 – La calculatrice TI Primaire Plus

Ainsi, et avec l'aide de la calculatrice, les élèves ont progressivement, mis en place l'algorithme d'Eratosthène et en parallèle se sont posés des questions du type : pour quelle raison la calculatrice ne donne jamais 0 solution ? Ce qui, bien sûr conduit au fait qu'un nombre est toujours divisible au moins par 1 et par lui même.

C'est une des activités proposée en CM2 et en sixième qui a été à l'origine du problème ouvert 2015. Dans le mode « exercice », la calculatrice peut travailler avec des nombres entiers ou des nombres décimaux ou encore avec des fractions. Dans chacun de ces ensembles, un ou plusieurs des termes d'une expression peuvent être remplacé par un point d'interrogation. La calculatrice ne fonctionne plus alors comme une calculatrice ordinaire mais donne des indications sur le nombre de solutions qui rendraient l'expression vraie ; ainsi, par exemple, l'affichage de  $? \times ? = 20$  dans l'ensemble des naturels provoque la réponse de la calculatrice : "6 solutions". Alors que cette même question dans l'ensemble des décimaux donne comme rétroaction : "infinité de solutions". En jouant sur les rétroactions de la machine, des activités pour la classe ont été mises au point et observées dans les classes de primaire mais aussi dans les premières classes de collège. L'idée du problème ouvert de l'année 2015 est donc née de ces réflexions et d'une question toute bête : quel algorithme permet-il à la calculatrice de donner le nombre de solutions d'un produit de deux facteurs lorsqu'on connaît le résultat ? Et, bien sûr, la généralisation s'imposait : que se passerait-il si le produit avait 3 facteurs, 4 facteurs,...

## 5.1 Enoncé

### Combien de multiplications ?

Dans ce problème on travaillera **avec les nombres entiers strictement positifs**.

On cherche le nombre de multiplications donnant comme résultat un certain nombre entier.

Par exemple :

$? \times ? = 2$  est une multiplication de deux nombres dont le résultat est 2.

Il y en a exactement 2 différentes :

$$\begin{array}{r} 2 \times 1 = 2 \\ 1 \times 2 = 2 \end{array}$$

TABLE 5.1 – Les deux multiplications de deux facteurs de produit 2

#### A vous de jouer !

Pouvez-vous trouver toutes les multiplications de deux facteurs dont le résultat vaut 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, ..., 2015, ...

Pouvez vous trouver une règle générale pour compter ces multiplications ?

**Lorsque la multiplication est une multiplication de trois nombres**

**Un exemple**

$$? \times ? \times ? = 2$$

Il y a exactement 3 multiplications différentes :

$$\begin{array}{r} 2 \times 1 \times 1 = 2 \\ 1 \times 2 \times 1 = 2 \\ 1 \times 1 \times 2 = 2 \end{array}$$

TABLE 5.2 – Les 3 multiplications de trois nombres dont le résultat est 2

#### A vous de jouer !

Pouvez vous trouver toutes les multiplications de trois facteurs dont le résultat vaut 3, 4, 5, 6. Combien de multiplications différentes de trois facteurs donnent comme résultat 100 ? 1000 ? 2015 ? ...

Pouvez vous trouver une règle générale pour compter ces multiplications ?

**Et avec quatre nombres ?**

$$? \times ? \times ? \times ? = 2$$

## 5.2 Un peu de mathématiques

Combien de multiplications différentes de quatre facteurs donnent comme résultat 2, 3, 4, ..., 100, 1000, 2015 ? ...

### 5.2.1 Pour deux facteurs

On peut commencer à faire des essais pour voir apparaître des régularités :

- sur les nombres premiers (2, 3, 5, ...) : 2 multiplications différentes,
- sur les carrés de nombres premiers (4, 8, 9) : 3 multiplications différentes,

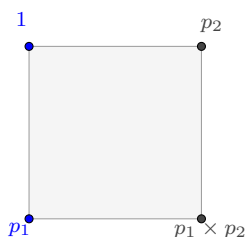
- sur un nombre produit de deux nombres premiers ( $2 \times 3, 5 \times 7$ ) : 4 multiplications différentes,
- sur un nombre produit de trois nombres premiers : 6 multiplications différentes.

Ou bien, remarquer que si on choisit un premier facteur, ce sera obligatoirement un diviseur de  $n$ . Il suffit alors de parcourir tous les diviseurs de  $n$  pour écrire toutes les multiplications.

La chose intéressante est de relier ces deux remarques : le nombre de multiplications différentes est le nombre de diviseurs de  $n$  et suivant la décomposition en nombres premiers ce nombre varie. Quel lien de l'un à l'autre.

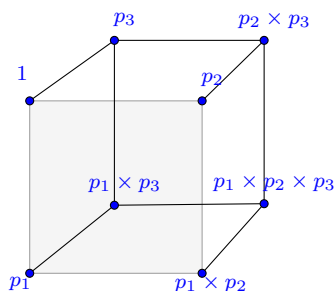
Supposons que l'on ait la décomposition en produit de facteurs premiers de la forme  $n = p_1 \times p_2$

Une représentation :



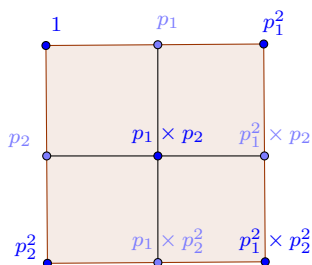
Comme l'exposant de  $p_1$  vaut 1 il y a deux sommets (exposant 0 et exposant 1); idem pour  $p_2$ , donc on associe la forme géométrique du carré qui a 4 sommets, chaque sommet étant un diviseur de  $n$ .

Imaginons maintenant que l'on ait 3 nombres premiers :  $n = p_1 \times p_2 \times p_3$ ; au lieu de représenter dans le plan, on représente dans l'espace :



Maintenant si les nombres premiers apparaissent avec un exposant.

Par exemple  $p_1^2 \times p_2^2$ ; pour représenter géométriquement, chaque ligne d'un nombre premier aura une longueur égale à son exposant.



Il y a donc 9 diviseurs.

En terme de combinatoire, construire un diviseur, c'est choisir un exposant entre 0 et 2 pour chacun des deux nombres premiers.

Il y a donc  $3 \times 3$  choix.

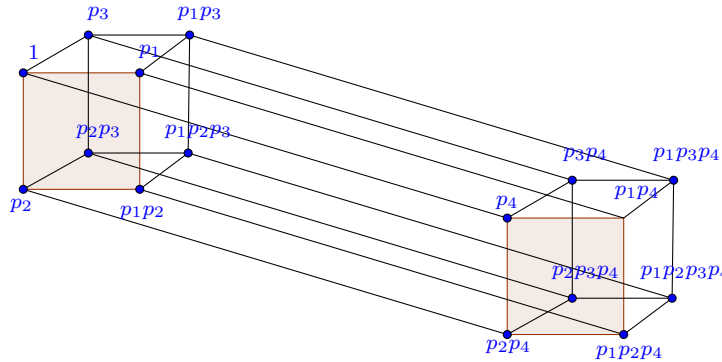
Mais alors, que se passe t'il si on a les exposants  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  : il y a  $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1)$  choix



possibles, c'est à dire  $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1)$  diviseurs.

Continuons avec la représentation géométrique des diviseurs (treillis de diviseurs);

Comment, par exemple représenter les diviseurs de  $n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4$  :



### 5.2.2 Pour trois facteurs

Résultat : Si  $N = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$  alors le nombre de solutions est

$$\frac{\prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1)(\alpha_i + 2)}{2^n}$$

*Preuve*

Il s'agit de dénombrer les triplets de diviseurs de  $N$  dont le produit vaut  $N$ . On choisit un diviseur, combien y-a-t-il de choix pour le diviseur suivant ? Le troisième est évidemment contraint. Pour le premier diviseur, on choisit  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ . Pour le deuxième on n'a plus que  $0 \leq \gamma_i \leq \alpha_i - \beta_i$ . Si  $\beta_i = 0$  il y a  $\alpha_i + 1$  choix, si  $\beta_i = 1$ , il y a  $\alpha_i$  choix, etc. Si  $\beta_i = \alpha_i$ , il n'y a plus qu'un choix. Au total, il y a donc

$$\prod_{i=1}^n (1 + 2 + \dots + (\alpha_i + 1)) = \prod_{i=1}^n \frac{(\alpha_i + 1)(\alpha_i + 2)}{2} \text{ choix}$$

Par exemple :

Si  $N = 900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$  alors le nombre de triplets solutions est  $\frac{27 \times 64}{2^3} = 216$

### 5.2.3 Et après

On peut faire un raisonnement identique :

$$N = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$$

A la première place, on met  $\prod_{i=1}^n p_i^{\beta_i}$ , il reste donc

$$\frac{\prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}}{\prod_{i=1}^n p_i^{\beta_i}} = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i - \beta_i}$$

Un exemple :

Si  $N = 2^2 = 4$

1	1	1	4	2	1	1	2	4	1	1	1
1	1	2	2	2	1	2	1				
1	1	4	1	2	2	1	1				
1	2	1	1								
1	2	2	1								
1	4	1	1								

Si  $N = 36 = 2^2 \times 3^2$  alors le nombre de quadruplets solutions est :

$\beta_1$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$\beta_2$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Pour les 3 facteurs restants	36	18	6	18	9	3	6	3	1
Total	100								

...

La suite est connue et répertoriée dans l'Encyclopédie en ligne des suites d'entiers<sup>3</sup> sous le numéro A007426. D'autres résultats pour les plus curieux peuvent être trouvés dans la suite A061200 qui donne les factorisations des nombres naturels en 5 facteurs.

### 5.3 Le travail des élèves

Toujours dans l'idée d'un travail collaboratif entre les élèves, les résultats ou les pistes de recherche envoyés ont été placés au fur et à mesure sur le site du rallye<sup>4</sup>. Nous avons reçu des documents de différentes natures : photos de cahiers, vidéos mises en scène, documents pdf, images, diaporamas, feuilles de tableur ...

La réponse à la première question, c'est-à-dire lorsque le produit a deux facteurs, a été rapidement trouvée et publiée, comme le montre cet extrait de la réponse d'une seconde du lycée de Parc à Lyon :

*On remarque que le nombre de multiplications de deux nombres est toujours égal au nombre de diviseurs de ce nombre. Si  $n$  est le résultat et qu'il a  $d$  diviseurs, alors il y aura exactement  $d$  multiplications différentes : ceci est donc la règle générale pour compter ces multiplications.*

Une difficulté a été que ce résultat a caché le dénombrement des diviseurs d'un nombre qui a été posé *a priori* comme dans l'extrait précédent mais pas calculé en fonction de la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre considéré. Ce fait a empêché de vraiment attaquer la généralisation à trois ou plus de facteurs. Cependant, les vidéos proposées par les élèves montrent bien l'investissement dans la recherche, les conjectures proposées et les intéressantes propositions, comme par exemple cette classe de troisième du collège Saint Jean-François-Régis qui cherche à énoncer des « règles » pour trouver la solution en fonction du type de décomposition (2 facteurs premiers, 3 facteurs, ...); ou bien la troisième 4 du collège Maurice Utrillo qui cherche des invariants à partir des exemples trouvés. Malheureusement, bien souvent, le raisonnement par induction proposé ne fonctionne pas mais l'exploration a été l'occasion de manipuler des nombres et leurs décompositions en produit de facteurs premiers.

Il est également intéressant de noter que certains élèves, individuellement, se confrontent au problème et propose pour leur classe une réponse en donnant des définitions comme cet élève

3. On-line Encyclopedia of Integer Sequences, <https://oeis.org/>

4. <http://rallye-math.univ-lyon1.fr/>

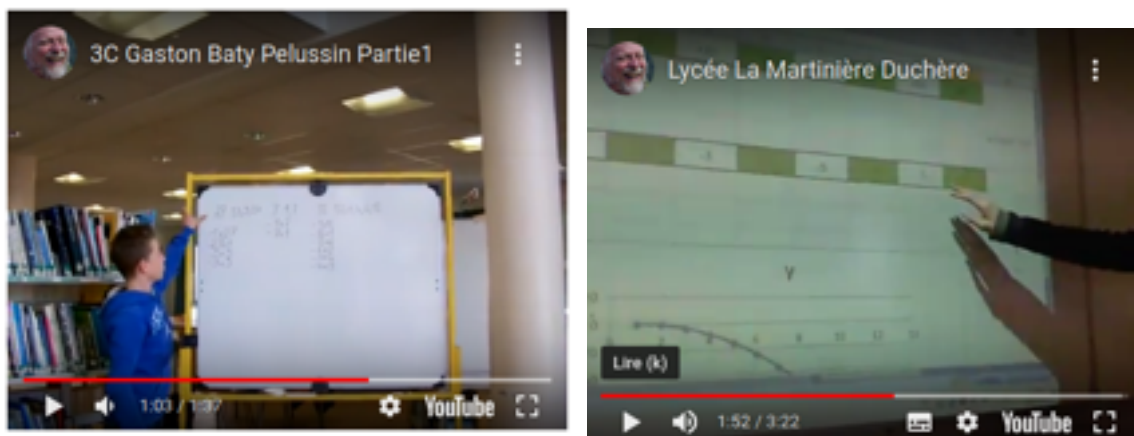


FIGURE 5.2 – Des captures de vidéos de troisième et de seconde



FIGURE 5.3 – Une pause nécessaire dans les recherches !

du lycée Ferney Voltaire qui redéfinit les nombres premiers : « si  $x$  est un nombre primaire, comme 1, 2, 3, 7 etc.)... » ; même si la tentative n'est pas tout à fait correcte, l'intérêt a été de placer cet élève dans une situation où il a eu besoin de définir, maladroitement certes, mais quand même de définir un ensemble de nombres pour distinguer les cas.

Un autre avantage de ce problème est qu'il peut être posé à des niveaux très différents et si les élèves de l'école primaire peuvent commencer à émettre des conjectures et même à prouver des résultats, les collégiens et les lycéens ont encore suffisamment de matière pour prolonger les raisonnements et explorer une petite partie des mathématiques.

De plus en plus de classes participent à l'épreuve du problème ouvert, même si le nombre est encore loin du nombre de classes inscrites au rallye mathématique. Les vidéos envoyées sont des témoignages vivants de l'investissement des élèves dans le problème et je les visionne toujours avec beaucoup de plaisir (Figure 5.2). Mais ce sont aussi des textes tout simples qui ressemblent à des narrations de recherche qui jalonnent les envois comme cette photo envoyée par une classe de seconde, prise devant la page du site du rallye qui présentait le problème ouvert (Figure 5.3) ou ce texte proposée par Laurie, une élève de troisième (Figure 5.4). On voit par ailleurs l'expérience en marche et les réflexions qui s'appuient sur les résultats « concrets » comme cette longue suite de calculs proposée par une classe de troisième qui se terminent par une « règle » (Figure 5.5)

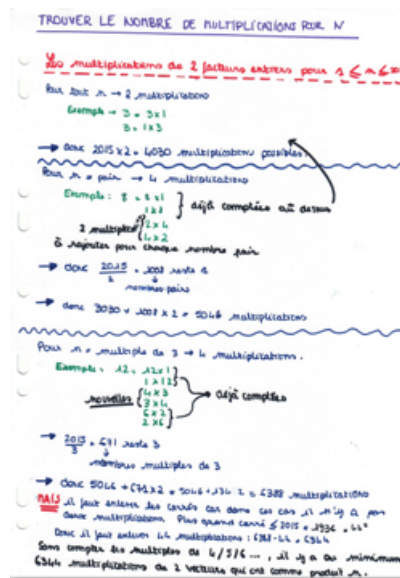


FIGURE 5.4 – Les résultats de Laurie

**Jeune A du collège Saint François - Régis avec 2 nombres : Les multiplications sont :**

- Pour 3 : 3x1 1x3
- Pour 4 : 2x2 1x(2x2)=1x4 (2x2)x1=4x1
- Pour 5 : 1x5 5x1
- Pour 6 : 3x2 2x3 (3x2)x1=6x1 1x(3x2)=1x6
- Pour 7 : 7x1 1x7
- Pour 8 : (2x2)x2=4x2 2x(2x2)=2x4 (2x2)x(2x1)=4x1 1x(2x2x2)=1x8
- Pour 9 : (3x3)x1=9x1 1x(3x3)=1x9 3x3
- Pour 10 : (5x2)x1=5x1 1x(5x2)=1x10 5x2 2x5
- Pour 100 :

- (5x2)x(5x2)=10x10
- 5x(2x5x2)=5x20
- (2x5x2)x5=20x5
- (5x5)x(2x2)=25x4
- (2x2)x(5x5)=4x25
- (5x2x5)x2=50x2
- 2x(5x2x5)=2x50
- (2x5x2x5)x1=100x1
- 1x(2x5x2x5)=1x100

Pour 15 : 3x5 5x3 (3x5)x1=15x1 1x(3x5)=1x15 Pour 2015 :

- 5x(13x31)=5x403
- (13x31)x5=403x5
- (5x13x31)=65x31
- 31x(5x31)=31x155
- (5x13x31)x1=2015x1
- 1x(5x13x31)=1x2015
- (5x31)x(13)=155x13
- 13x(5x31)=13x155

Pour 16 :

- (2x2)x(2x2)=4x4
- 2x(2x2x2)=2x8
- (2x2x2)x2=8x2
- (2x2x2)x(2x1)=4x4
- 1x(2x2x2x2)=1x16

**Règle :** On décompose le nombre en facteurs premiers

On fait tous les rassemblements possibles afin de former 2 facteurs. Les multiplications ainsi formées doivent être différentes les unes des autres (2 multiplications différentes, seulement par l'ordre des facteurs, considérées comme identiques).

On compte ces multiplications et on multiplie le résultat par 2 (la multiplication est commutative). Si le nombre de départ est un carré parfait (ex : 9), on retranche 1 au résultat. Le nombre final est le nombre de multiplications possibles.

FIGURE 5.5 – Une règle issue d'une longue série d'expériences

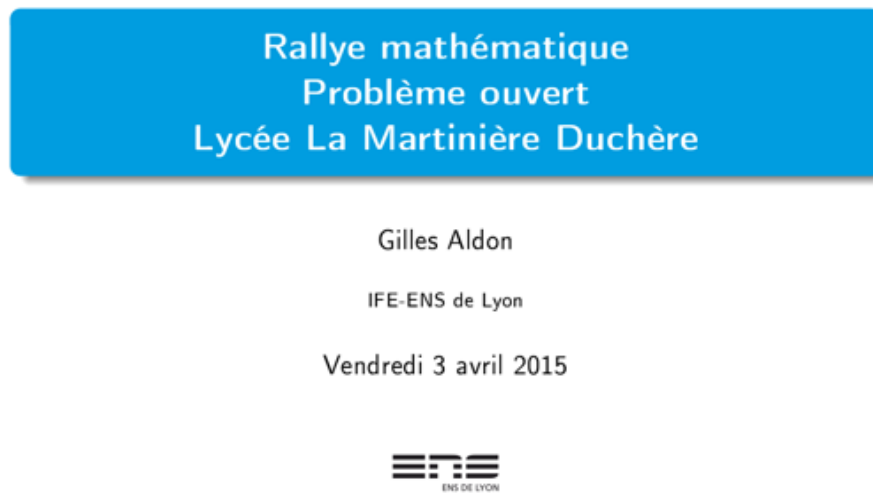


FIGURE 5.6 – Une intervention auprès des élèves

Dans le règlement du rallye, les classes qui arrivent en tête du classement participent à une finale sur le campus de la Doua de l'Université Lyon 1. Mais aussi certaines classes qui ont obtenu de bons résultats sont récompensées par une visite dans l'établissement. Ainsi, j'ai pu intervenir dans des classes qui ont été particulièrement actives dans la résolution du problème ouvert et rencontrer les élèves et discuter avec eux de leurs recherches (Figure 5.6). Ces moments sont toujours agréables et me confortent dans le bien-fondé de cette épreuve ; il faut voir l'enthousiasme des élèves pour discuter de mathématiques, du problème ouvert, bien sûr, mais aussi des mathématiques actuelles, des métiers des mathématiques, des mathématiciens actuels, etc. Ces rencontres, comme celles que j'ai pu avoir avec les élèves à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique pendant toutes les années où j'ai proposé des ateliers pour les classes, sont des moments privilégiés où le goût des mathématiques peut être largement diffusé, à travers des activités comme celle proposée dans cette épreuve du rallye.

## 5.4 Utiliser ce problème en classe

### 5.4.1 À l'école primaire

Comme il a été écrit dans l'introduction de ce chapitre, le problème est né du fonctionnement d'une calculatrice destinée aux classes de l'école primaire, et plus largement des premières classes du collège. Et en effet, le problème qui s'apparente à un problème de combinatoire peut également être utilisé avec l'objectif de mieux comprendre les ensembles de nombres : nombres entiers, nombres décimaux, nombres fractionnaires.

Ainsi, une situation qui a été expérimentée dans des classe de collège partait de la situation initiale où il s'agissait de trouver des couples de nombres entiers rendant l'égalité  $? \times ? = 20$  juste. Les 6 solutions sont rapidement trouvées par les élèves. La question alors se pose de trouver des solutions décimales, et a été formulée de la manière suivante <sup>5</sup> :

$$20 = ? \times 20$$

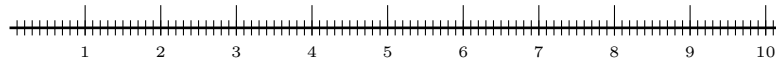
Cette égalité admet une infinité de solutions décimales. Trouve trois couples solutions qui vérifient cette égalité, composées d'une entier et d'un nombre décimal qui n'est pas entier.

5. Ce travail a été réalisé par Anne Voltolini en parallèle de son travail de thèse [Voltolini, 2017] dans le cadre du projet CaPriCo

$$20 = 3 \times ?$$

Existe-t-il un nombre décimal qui vérifie cette égalité ?

Place sur l'axe le point rouge dont l'abscisse est la solution de cette égalité.



L'objectif de cette situation est d'amener les élèves à réfléchir à l'existence ou non d'une solution dans l'ensemble des nombres décimaux et de travailler sur les représentations des nombres sur la droite graduée. La situation permet aussi d'interroger un résultat numérique donné par une calculatrice :  $20 \div 3 \rightarrow 6,66666667$  ; est-ce une égalité ? Quand un résultat peut être considéré comme exact ? Approché ? Faux ?

### 5.4.2 Au collège et au lycée

Tel que proposé dans le rallye, le problème peut être utilisé avec comme objectif le théorème fondamental de l'arithmétique, la décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers. Même s'il n'est pas explicitement cité dans les programmes, ce résultat peut être abordé à travers la résolution de ce problème. De la même façon, la détermination de tous les diviseurs d'un nombre est une connaissance attachée à la résolution de ce problème ; savoir en déterminer le nombre, savoir en dresser la liste exhaustive sont autant de connaissances arithmétiques qui sont bien utiles pour manipuler des nombres entiers dans la perspective des programmes d'arithmétique du lycée.

## Chapitre 6

# Un problème qui déchire !

L'origine de ce problème est à chercher sur le web. Jason Ermer est un professeur de mathématiques qui propose des défis sur son site *Collaborative Mathematics*<sup>1</sup>. C'est toujours intéressant de parcourir ses différentes propositions, comme par exemple : quels sont les nombres à 4 chiffres dont le produit par 4 est le nombre de départ à l'envers ? Autrement dit, existe-t-il quatre chiffres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  tels que  $4 \times \overline{abcd} = \overline{dcba}$  ? Une analyse rapide de cette question montre que la seule solution est le nombre 2178 ; en effet,  $2178 \times 4 = 8712$ . On peut alors, bien sûr généraliser à tous les multiples à un chiffre et on trouve assez facilement que seuls 1, 4 et 9 donnent des solutions. 1 donne la liste des 90 palindromes entre 1000 et 9999, 4 donne la solution déjà trouvée, et 9 le nombre 1089 ( $9 \times 1089 = 9801$ ). On pourrait bien sûr généraliser à de plus grands nombres ou facteurs et on voit qu'il est possible de s'amuser un moment avec les nombres. La programmation sur un tableur ou avec un langage de programmation peut également permettre de manipuler l'écriture décimale de position des nombres naturels. Tous les défis proposés sur le site de Jason Emer pourraient potentiellement devenir des problèmes ouverts du rallye ! Cette année 2016, j'ai choisi un de ces défis ; en effet, ce problème m'a paru tout à fait intéressant pour des élèves de troisième et de seconde. Plus tard, ce problème a été testé dans d'autres classes et notamment en primaire. Je l'ai également proposé dans une circoscription dans un travail commun entre CM2 et sixième qui a fait l'objet d'un article dans la revue Repères [Aldon et Garreau, 2017]. Il est également largement commenté et analysé sur le site de l'IREM de Lyon consacré aux problèmes<sup>2</sup> et vous pourrez trouver de nombreux comptes rendus dans les Newsletter de l'équipe DREAM disponibles sur le site.

### 6.1 Enoncé

#### Première partie

Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux.

Imaginons : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?

Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux ?

Et si je faisais la même opération mais en coupant chaque fois en quatre ? En cinq ? . . .

---

1. <http://www.collaborativemathematics.org/>

2. <http://dreammath.univ-lyon1.fr>

Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ? Et si je voulais atteindre 2015 ? 2017 ? 2018 ? et si je voulais atteindre un nombre  $n$  de morceaux, quelles seraient les découpes qui me permettraient de l'atteindre ?

## Deuxième partie

Maintenant, je choisis de couper ma feuille en deux ou en trois parties. Est-ce que je peux atteindre 2016 ? De combien de façons différentes ?

Et si je coupe en trois ou quatre parties ? En six ou huit parties ? ... Est-ce que je peux toujours obtenir 2016 morceaux de papier ?

Et si oui, de combien de façons différentes ?

Et si je choisis un nombre entier  $n$ . Pourrais-je toujours découper ma feuille pour avoir à un certain moment  $n$  morceaux de papier ? Et de combien de façons différentes ?

## 6.2 Un peu de mathématiques

### 6.2.1 Première partie

Si je considère la découpe en  $n$  morceaux, j'obtiens la suite de morceaux de papier :

$$1 \rightarrow n \rightarrow 2n - 1 \rightarrow 3n - 2 \rightarrow \dots$$

c'est à dire la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison  $n - 1$ . 2016 sera atteint s'il est congru à 1 modulo  $n - 1$  :

$n$	Atteint ?	$\text{mod}(2016, n - 1)$
2	Oui	1
3	Non	0
4	Non	0
5	Non	0
6	Oui	1
...		

Ainsi pour 6 découpes, on obtient :

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow 11 \rightarrow \dots \rightarrow 2001 \rightarrow 2006 \rightarrow 2011 \rightarrow 2016$$

Plus généralement, 2016 sera atteint pour toute découpe  $n$  si et seulement si  $1 + (n - 1)k = 2016$  si et seulement si  $mk = 2015$  avec  $m = n - 1$ .

Donc  $m$  nécessairement un diviseur de 2015 et  $2015 = 5 \times 13 \times 31$ . Les diviseurs de 2015 sont donc  $\{1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015\}$  et donc les valeurs de  $n$  qui permettent d'atteindre 2016 sont :

$$\{2, 6, 14, 66, 156, 404, 2016\}$$

D'une façon encore plus générale, un nombre  $p$  sera atteint par des découpes en  $n$  si et seulement si  $n - 1$  est un diviseur de  $p - 1$ .

Ainsi, 2017 sera atteint pour des découpes  $n$  avec  $n - 1$  diviseur de 2016, c'est à dire :

$$n \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 17, 19, 22, 25, 29, 33, 37, 43, 49, 57, 64, 73, 85, 97, 113, 127, 145, 169, 225, 253, 289, 337, 505, 673, 1009, 2017\}$$

Mais 2018, dont le prédécesseur 2017 est premier, ne sera atteint que par 2 et 2018 !

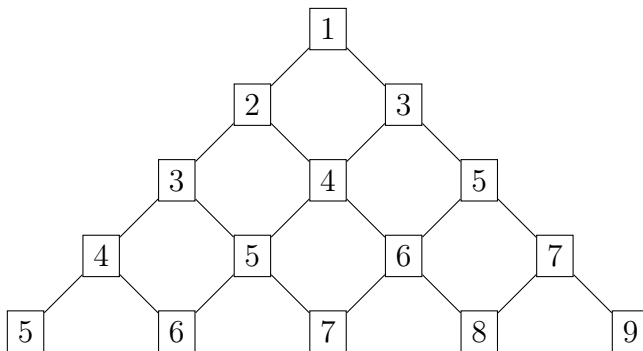


## 6.2.2 Deuxième partie

### Introduction

Je sais qu'avec 2 découpes j'atteindrai tous les nombres strictement positifs, donc 2016 et que avec 3 découpes, je ne peux pas atteindre 2016. Si je choisis de ne pas toujours découper en 2, mais au moins une fois de découper en 3, est-ce que je pourrais atteindre 2016 ?

En découpant en 2, à partir d'une certaine valeur  $n$  j'obtiens  $n + 1$  morceaux. En découpant en trois, à partir d'une valeur  $n$  j'obtiens  $n + 2$  morceaux. Je peux représenter le nombre de morceaux de la manière suivante :



On voit ainsi que 3 apparaît deux fois, 5 apparaît trois fois, et on peut supposer que 7 apparaîtra quatre fois. . . . Et 2016, combien de fois apparaîtra-t-il ?

Sur le côté droit apparaissent les nombres impairs. Quand un nombre est apparu pour la première fois en ligne  $k$  il réapparaîtra les  $k$  lignes suivantes puis disparaîtra par la gauche. 2016 apparaîtra lorsque la ligne se terminera par 2017 soit sur la 1009<sup>ème</sup> ligne. 2017 apparaît à gauche sur la ligne 2017.  $2017 - 1009 + 1 = 1009$  ; donc 2017 apparaît 1009 fois et 2016, 1008 fois. En fait, 2016 apparaîtra dans le tableau autant de fois que l'équation  $x + 2y = 2016$  aura des solutions entières positives.

### Résolution de l'équation $ax + by = c$

Il s'agit donc de résoudre l'équation :

$$ax + by = c \tag{6.1}$$

Supposons  $a \wedge b = 1$ , d'après le théorème de Bezout, il existe un unique couple  $(u, v)$  tel que  $au + bv = 1$ . Si  $(x, y)$  est une solution de l'équation, alors  $ax + by = 1$ , donc  $a(x - u) + b(y - v) = 0$ , soit :

$$a(x - u) = b(v - y) \tag{6.2}$$

D'après le théorème de Gauss et comme  $a \wedge b = 1$ ,  $b$  divise  $x - u$  et  $a$  divise  $v - y$ . Donc

$$x - u = k_1 b \Leftrightarrow x = k_1 b + u \tag{6.3}$$

$$v - y = k_2 a \Leftrightarrow y = -k_2 a + v \tag{6.4}$$

En reportant  $x$  et  $y$  dans l'équation, il vient :

$$ak_1 b + au - bk_2 a + bv = 1 \tag{6.5}$$

Et, comme  $au + bv = 1$ , on en déduit  $k_1 = k_2$ .

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation  $ax + by = 1$  est :

$$S = \{(u + kb, v - ka) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

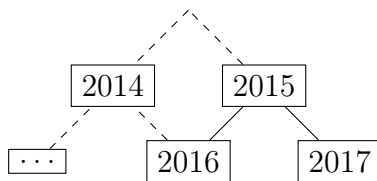
Et l'équation (6.1) :

$$S = \{(uc + kb, vc - ka) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

Ainsi, l'équation  $x + 2y + 1 = 2016$  ou  $x + 2y = 2015$  aura comme ensemble de solutions :

$$S_{1,2} = \{(-2015 + 2k, 2015 - k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

Parmi toutes les solutions,  $-2015 + 2k \geq 0$  et  $2015 - k \geq 0$ , soit  $1008 \leq k \leq 2015$ , soit 1009 solutions. Par exemple, avec  $k = 1008$ ,  $(1, 1007)$  et effectivement,  $1 \times 1 + 2 \times 1007 = 2015$ , ce qui veut dire que si on coupe la feuille une fois en deux, puis 1007 fois en trois on obtient 2016 morceaux. Ce qui correspond à la solution qui dans le tableau apparaîtra juste avant 2017 :



Si  $a \wedge b = d > 1$

Si  $c$  est divisible par  $d$ , l'équation (6.1) est équivalente à l'équation :

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d} \tag{6.6}$$

avec  $a' = \frac{a}{d}$  et  $b' = \frac{b}{d}$  premiers entre eux ; on obtient alors :

$$S = \left\{ \left( u \frac{c}{d} + kb', v \frac{c}{d} - ka' \right) \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si  $c$  n'est pas divisible par  $d$ ; l'équation (6.1) n'a pas de solution !

### Retour à l'analyse

Imaginons donc maintenant que l'on puisse découper en  $p$  et  $q$  morceaux et que l'on veuille atteindre  $n$ . L'équation que l'on aura à résoudre serait :

$$(p - 1)x + (q - 1)y + 1 = n \tag{6.7}$$

Soit encore :

$$(p - 1)x + (q - 1)y = n - 1 \tag{6.8}$$

Par exemple, si on découpe en 3 ou 4 parties, et que l'on cherche à atteindre 2016 l'équation à résoudre est :

$$2x + 3y = 2015 \tag{6.9}$$

dont les solutions sont :

$$S_{2,3} = \{(-2015 + 3k, 2015 - 2k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

avec  $672 \leq k \leq 1007$ ; soit 336 solutions, par exemple avec  $k = 1000$ , en coupant 985 fois en 3 parties et 15 fois en 4, on obtient 2016 morceaux. En effet, en coupant 985 fois en 3 parties, on

obtient  $985 \times 2 + 1 = 1971$  morceaux. Puis, en coupant 15 fois en 4 à partir des 1971 morceaux, on obtient  $1971 + 15 \times 3 = 2016$  morceaux.

Si on coupe en 6 ou 8 morceaux, l'équation à résoudre est :

$$5x + 7y = 2015 \tag{6.10}$$

et on trouve des solutions ; en revanche, en coupant en 7 morceaux et 9 morceaux, on obtient l'équation

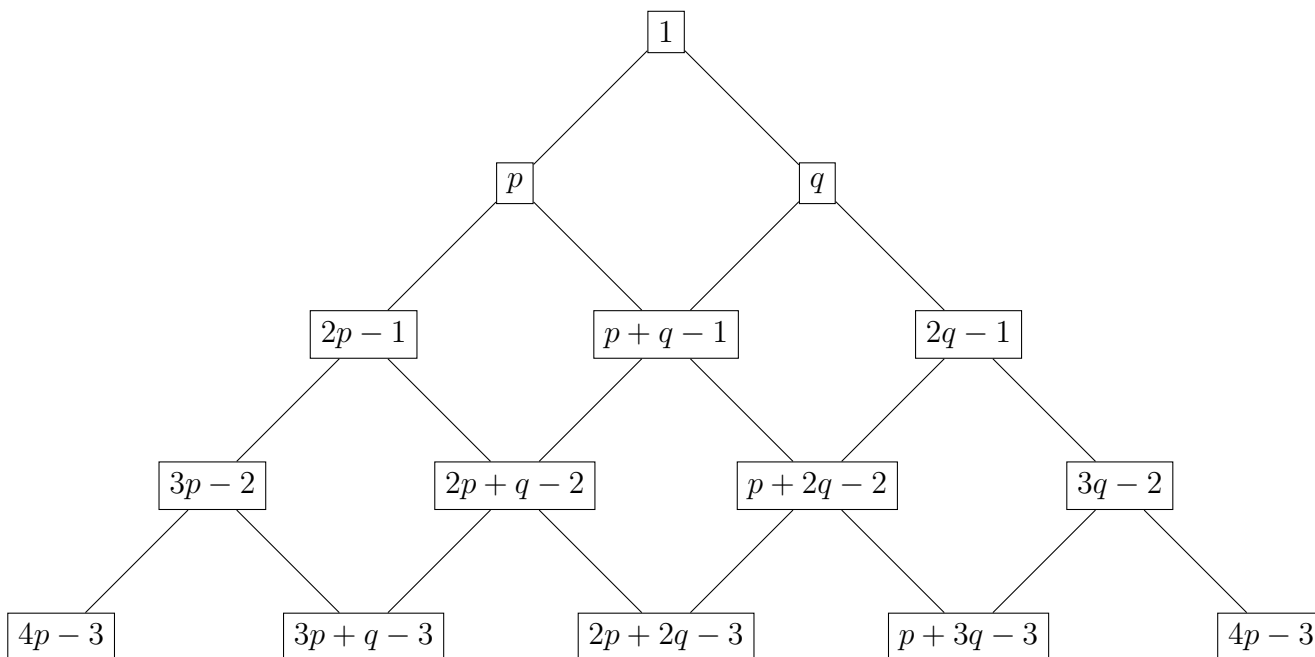
$$6x + 8y = 2015 \tag{6.11}$$

qui n'a pas de solutions !

D'une façon plus générale si on veut découper en  $p$  et  $q$  morceaux, on pourra atteindre tous les nombres si  $p - 1 \wedge q - 1 = 1$ .

Si  $p - 1 \wedge q - 1 = d$ , l'équation  $px + qy = n - 1$  a des solutions (c'est à dire, les nombres atteints) si et seulement si  $d$  divise  $n - 1$ . Par exemple,  $p = 7, q = 9, p - 1 \wedge q - 1 = 2$ .

Dans tous les cas (en notant  $p < q$ ), on peut représenter la situation par le schéma ci-dessous. On remarque en particulier que la différence entre les termes consécutifs d'une même ligne vaut  $q - p$  :



### 6.3 Le travail des élèves

Cette année encore les réponses des élèves étaient publiées sur le site du rallye au fur et à mesure de leurs arrivées. Des réponses d'une excellente qualité nous sont parvenu, dont des réponses individuelles extrêmement détaillées, je pense en particulier à un élève de seconde du lycée de la Boisse<sup>3</sup> qui a proposé une solution rédigée complète du problème. Mais d'une manière générale, les classes qui ont participé à cette épreuve ont très bien répondu, notamment à la première question. Lorsque les découpages pouvaient se faire de deux façons différentes, la première rencontre avec l'équation diophantienne  $ax + by = c$  a donné lieu à des exemples plutôt qu'à des démonstrations générales. Beaucoup de classes ont proposé des programmes sur

3. Léo-Nils Boissier

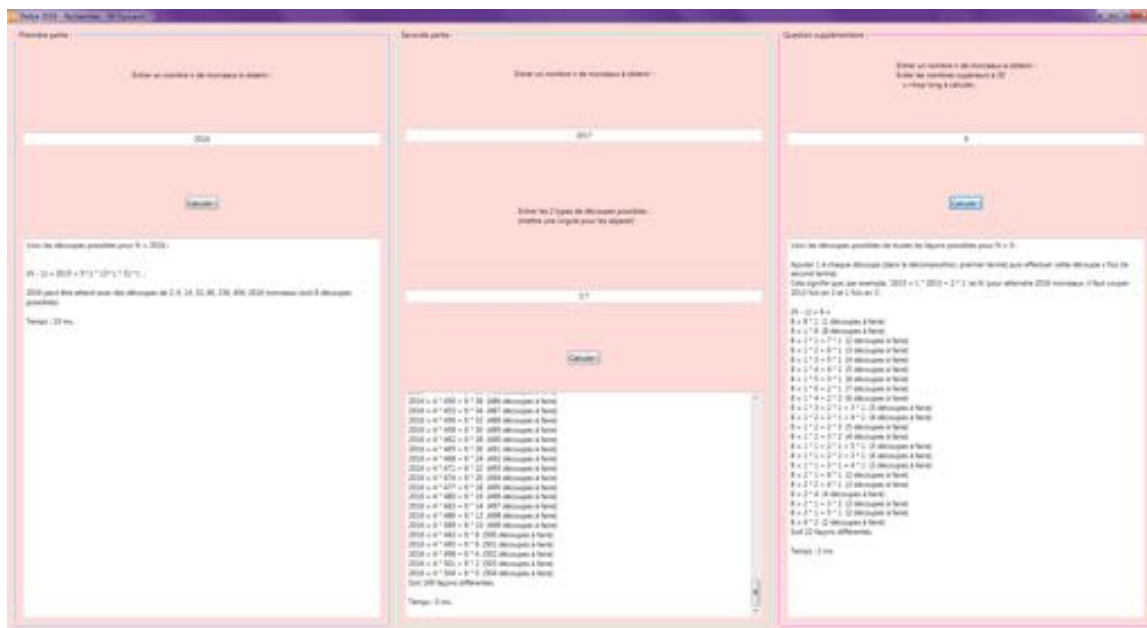


FIGURE 6.1 – Un programme écrit en C

calculatrices ou avec un langage de programmation, comme le montre par exemple la figure 6.1 qui montre l’interface d’une application qui répond aux questions de la première partie.

Ce problème a été ensuite largement utilisé en formation d’enseignants, à l’école primaire (sans la deuxième partie) ou au collège et au lycée [Aldon et Garreau, 2017] ; je l’ai même proposé à des étudiants de Master de l’Ecole Normale Supérieure de Lyon. Dans tous les cas, le lien entre l’expérience (couper la feuille en morceaux) et le modèle mathématique apparaît d’une façon très naturelle. Dans toutes les expériences vécues en classe ou en formation, le premier réflexe consiste à commencer par découper une feuille, à faire des constats, à mettre en évidence des invariants puis à essayer de modéliser de différentes façons. La photographie de la figure 6.2 est significative de ce comportement : après un bon nombre d’expériences, il est temps de réfléchir à ce qui a été obtenu ; c’est bien cette réflexion sur les résultats de l’expérience mettant en rapport les constatations et des éléments de la théorie mathématique qui constitue la part expérimentale de la recherche de problèmes en mathématiques.

### 6.3.1 Ce que les élèves peuvent aborder

Avec l’énoncé de départ, les élèves peuvent se lancer dans des expériences en découpant en 2, puis en 3, puis en 4. Quels résultats peuvent ils trouver ?

#### Dans la première partie

En coupant en 2, les élèves peuvent écrire la suite des nombres de morceaux :

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$  et en déduire que tous les nombres peuvent être atteints et qu’en particulier 2016 peut être atteint en 2015 découpages.

En coupant en 3, les élèves peuvent encore faire l’expérience et écrire la suite des nombres de morceaux :

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots$  et en déduire que tous les nombres impairs seront atteints et que par conséquent 2016 ne le sera pas.

En coupant en 4, même chose :



FIGURE 6.2 – Un élève en pleine expérience

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow \dots$  c'est là que la réflexion doit vraiment commencer. A chaque étape on rajoute 3, donc le nombre est de la forme 1 plus un certain nombre de fois 3. Avec une écriture symbolique on l'écrirait  $3k + 1$ . Ou bien, si on divise les nombres qui seront atteints par 3 le reste dans la division sera 1. Mais :

2016	3
21	672
06	
0	

Ou bien, dit autrement, le nombre qui vient avant 2016 devrait être divisible par 3, mais la somme des chiffres de 2015 vaut 8 qui n'est pas dans la table de 3 et donc 2015 n'est pas divisible par 3.

Les élèves peuvent encore continuer avec des découpages en 5, puis en 6 et faire apparaître que pour des découpages en 6, 2016 sera atteint :

$1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 13 \rightarrow \dots$  pour être atteint, il faudrait que 2016 est un reste égal à 1 dans la division par 4 (ce qui n'est pas le cas)

$1 \rightarrow 6 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow \dots$  pour être atteint, il faudrait que 2016 est un reste égal à 1 dans la division par 5. Et c'est le cas, donc on peut atteindre 2016 avec des découpages en 6 morceaux.

A cette étape, la notion de diviseur a pu être convoquée et poser la question de tous les découpages qui peuvent mener à 2016. Voir fiche professeur.

Arriver à bien jouer avec cette première partie est une condition nécessaire pour produire quelques résultats pour la seconde partie.

## Dans la seconde partie

Cette partie sera abordée dans la relance en classe.

A partir du moment où les élèves auront mis en évidence des questions de généralisation dans la première partie, la deuxième partie peut être abordable en plusieurs étapes et plusieurs questions :

1. avec des découpages en 2 et 3 :
  - avant de savoir si 2016 est atteint et combien de fois, il conviendra de poser la question pour 10, 20,...
  - regarder si on fait un découpage en 2, puis des découpages en 3, quels nombres sont atteints.
  - et si on en fait deux, etc.
  - regarder si on fait un découpage en 3, puis des découpages en 2, quels nombres sont atteints ?
2. avec des découpages en 3 et 4 : même type de questions
3. aborder avec des découpages en 3 et 5 pour trouver un exemple où 2016 ne sera pas atteint.
4. ...

L'épreuve du problème ouvert est maintenant bien rodée et le nombre grandissant de participants montre qu'elle est reconnue dans le cadre du rallye. Mais la recherche d'énoncés est toujours un long processus, d'abord bibliographique, rechercher des résultats mathématiques originaux, simples et abordables en classe, puis mathématiques pour analyser les concepts qui peuvent être mis en jeu mais aussi essayer de voir si des solutions simples peuvent être trouvées par les élèves. Ce n'est qu'au terme de l'épreuve que l'on peut savoir si le « cru » de l'année était satisfaisant pour les élèves. Ce problème, repris à de nombreuses occasions, est très caractéristique des qualités d'un problème ouvert : il est facilement abordable, il donne lieu à des expériences concrètes, des manipulations qui débouchent sur des réflexions utilisant des concepts mathématiques connus des élèves. Et il permet de pousser encore le questionnement et d'aborder de nouvelles questions<sup>4</sup>.

## 6.4 Utiliser ce problème en classe

### 6.4.1 De l'école primaire au lycée

Cette situation fait partie de ce que l'équipe DREAM a appelé à la suite de Marie-Line Gardes [Gardes, 2013] une *situation didactique de recherche de problème* c'est à dire des situations didactiques au sens de [Brousseau, 1986] dans les quelles le projet annoncé est de résoudre un problème de mathématiques et où le maître cherche à transmettre à l'élève la responsabilité de son apprentissage à travers d'une situation didactique, qui sont aussi des situations d'apprentissage, c'est-à-dire des situations dans lesquelles des connaissances mathématiques se construisent ou s'affirment et enfin des situations dans lesquelles la dimension expérimentale est fortement présente.

---

4. Voir à ce propos les prolongements publiés sur le site DREAM <https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/3764306>

Cette situation peut également être utilisée à des niveaux d'enseignements très variés comme le montrent les deux témoignages suivants, l'un à l'école primaire et l'autre en BTS.

### 6.4.2 Retour d'expérience, Ecole du Rocher

Laissons le soin à Stéphanie Aubert, Christelle Langard et Stéphane Dégorges de raconter ce qu'il s'est passé en CM2<sup>5</sup>

Au sein de l'école du Rocher à Pierrelatte, le problème qui déchire a été cherché par des élèves de CM1 et de CM2. Ils étaient encadrés par Stéphanie Aubert et Christelle Langard, leurs enseignantes, et Stéphane Dégorges, conseiller pédagogique de circonscription. Lors de la première séance, les élèves ont eu à travailler sur une configuration où le papier est déchiré en deux morceaux à chaque action. Lors du bilan, deux formules sont apparues :

- Une pour trouver le nombre de bouts de papier : Nbre d'actions + 1
- Une pour trouver le nombre d'actions : Nbre de bouts de papier - 1

Les élèves ont observé que tous les nombres sont ainsi atteignables.

En fin de bilan, une élève s'est tout naturellement demandé si l'on pouvait aussi atteindre tous les nombres en déchirant un bout de papier en trois. Pour la seconde séance de recherche, le papier est coupé en trois morceaux. Lors de la mise en commun, les élèves ont vu la différence avec le cas précédent : on ne peut plus atteindre tous les nombres mais seulement les nombres impairs. Une nouvelle formule a alors été trouvée pour ce cas :

$$\text{Nbre de bouts de papier} = (\text{Nbre d'actions} \times 2) + 1$$

Si certains élèves ont su produire la formule en CM2, l'enseignante de CM1 a dû accompagner les siens dans son élaboration. Ils ont aussi remarqué qu'à partir de cette formule, on peut retrouver le nombre d'actions réalisées. Suite à ces séances de recherche, des prolongements ont été proposés aux élèves. Ils ont été amenés vers la division euclidienne avec l'introduction de l'opérateur de la division entière qui permet de trouver directement le nombre d'actions à effectuer connaissant le nombre de bouts de papier. Avec ce nouvel outil, les élèves ont pu résoudre des divisions euclidiennes mais également des problèmes comme celui des pirates voulant partager équitablement un trésor. Un travail sur la caractérisation du nombre impair a pu être réalisé en amenant les élèves à produire l'écriture  $(2 \times k) + 1$ .

Pour concevoir et mener à bien ces séances, il a fallu une bonne compréhension du problème et cela nécessite une bonne culture mathématique. De plus, il est difficile d'arriver à capter toutes les remarques d'élèves pouvant amener à des prolongements. Lors des recherches, il a fallu faire face à l'hétérogénéité des élèves limitée par l'utilisation d'un tableau d'étayage.

Ces situations sont motivantes et permettent aux élèves de manipuler des nombres de manière intensive. Le réalisation de ce problème au sein des classes a donc été une première expérience positive, d'autres problèmes seront proposés à ces niveaux lors de cette année.

### 6.4.3 Retour d'expérience, lycée La Martinière Montplaisir

Laissons Antoine Guise raconter son expérience avec des élèves de BTS<sup>6</sup>.

Cette situation a été présentée lors de la dernière newsletter en cycle 3. Cette fois ci, c'est avec une classe de 1ère année de BTS qu'elle est expérimentée. La séance a duré deux heures, avec vingt élèves ayant des profils scolaires très différents (bac pro et bac technologique pour la majorité et quelques bacs généraux). La mise en œuvre est celle préconisée par le groupe

5. Repris de la Newsletter n°1 de <https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/2958693>

6. <https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/3586441>

DREAM si ce n'est qu'il n'y a pas eu création d'affiches ni de débat mais la production de comptes rendus écrits. Pour cette situation, j'ai évalué les trois compétences suivantes : chercher, modéliser et communiquer. Tous les étudiants ont validé la première compétence – ce qui traduit une réelle dévolution de la situation chez les étudiants – mais les deux autres ont révélés de nettes différences entre les groupes. À l'issue des deux heures de recherche et des comptes rendus réalisés, voici le bilan présenté :

- conjectures et propositions formulées :
  - si on déchire en 2, 2020 morceaux est atteint en 2019 étapes ;
  - si on déchire en 3, il est impossible d'obtenir 2020 morceaux ;
  - si on déchire en 4, on peut obtenir 2020 morceaux en 673 étapes.
- notions mathématiques utilisées :
  - division euclidienne,
  - divisibilité, parité,
  - suites arithmétiques

Deux groupes sont allés un peu plus loin. Le premier a présenté la formule  $(n - 1)k + 1$ , où  $n$  désigne le nombre de morceaux déchirés à chaque étape et  $k$  désigne le nombre d'étapes. Pour savoir si 2020 pouvait s'écrire sous cette forme, les étudiants du groupe ont utilisé un tableur avec un tableau à  $2020^2$  cellules ( $n$  varie en lignes et  $k$  en colonnes) et en cherchant 2020 parmi toutes les réponses. Ils se sont perdus face au nombre de cellules à analyser et n'ont pas réussi à utiliser les fonctionnalités du tableur pour effectuer cette recherche.

Le second groupe a cherché de manière exhaustive toutes les déchirures possibles pour obtenir 2020 morceaux.

Sur son compte rendu, il indique la formule  $(x - 1) \div (y - 1)$ , où, je suppose,  $x$  désigne le nombre cible et  $y$  désigne le nombre de morceaux déchirés à chaque étape. Sans expliciter davantage à l'écrit (mais à l'oral oui), ils énumèrent les quatre découpes possibles pour obtenir 2020 morceaux.

En conclusion, cette situation a permis une réelle mise en activité et une mobilisation efficace des connaissances mathématiques antérieures des étudiants, parfaits pour aborder la suite de la séquence en arithmétique



## Chapitre 7

# Les grilles diaboliques

Les problèmes avec des grilles ne manquent pas en partant des nombres croisés, cousins numériques des mots croisés largement publiés dans les quotidiens, pour aller jusqu'aux Sudokus, en passant, bien sûr, par les carrés magiques dont les Sudokus sont les héritiers. Le plus ancien carré magique connu est chinois et date de quelques 650 ans avant Jésus-Christ. Il s'agit d'un carré  $3 \times 3$  dont les nombres sont représentés par des formes (Figure 7.1) et aurait été révélé à l'empereur en apparaissant sur le dos d'une tortue. En fait deux légendes se superposent, qui donnent à ce premier carré magique des interprétations philosophiques différentes ; la première raconte l'histoire de l'empereur Yu qui se promenait le long de la rivière Lo. La tortue géante lui apparut alors et le dessin qu'elle portait sur le dos racontait le cycle de l'eau dans le fleuve. En comprenant cette énigme, l'empereur comprit alors que les crues et les basses eaux ne devaient pas être combattues mais que ses sujets devaient au contraire s'adapter pour en tirer le meilleur. La seconde légende parle encore de crues et d'inondation : alors que la rivière Lo débordait, la population donnait des offrandes aux dieux, et à chaque don, une immense tortue sortait du fleuve et regardait une à une les offrandes pour ensuite replonger dans les eaux bouillonnantes de la rivière. C'est un enfant qui remarqua les drôles de dessins sur la carapace de la tortue et qui demanda alors aux villageois de préparer 15 paniers pour offrir aux dieux. La tortue sortit de l'eau, parcourut les 15 paniers, et rentra dans la rivière qui s'apaisa. La crue était passée. D'autres interprétations voient dans l'alternance des pairs et des impairs le principe du ying et du yang, et le nombre 5, central, représente les 5 éléments.

Mais que voit on en effet sur le dos de cette tortue ? En comptant les points, le carré « magique » apparaît :

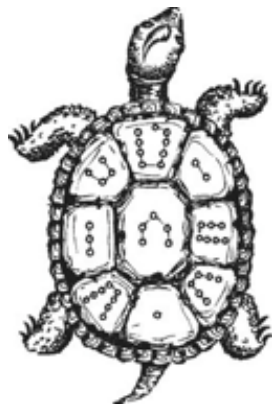


FIGURE 7.1 – La tortue géante de Lo Shu

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Dans ce carré, la somme des lignes, la somme des diagonales et la somme des colonnes valent toutes 15. C'est le seul carré magique « normal », c'est à dire utilisant les nombres de 1 à 9, une fois et une seule (à des permutations de lignes ou de colonnes près). On retrouve traces de carrés magiques dans beaucoup de civilisations, en Egypte, en Mésopotamie, en Inde, dans les mathématiques arabes, et bien sûr en occident où Luca Pacioli au XVe siècle étudie les carrés magiques d'ordre 3 à 9 dans son livre de « mathématiques amusantes » *De viribus quantitatis* paru en 1509. Et bien sûr, la fameuse gravure de Dürer (Fig. 7.2 paru en 1514), *Melencolia* sur laquelle apparaît un carré magique d'ordre 4 ; Dürer et Luca Pacioli se connaissaient et c'est sans doute sous l'influence du second qu'il a intégré ce carré dans son œuvre.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



FIGURE 7.2 – Melencolia de Dürer

En partant du carré des nombres de 1 à 16, on obtient facilement ce carré magique en *renversant* les diagonales, puis en inversant les deux colonnes centrales comme indiqué sur la figure 7.3. De très nombreux ouvrages parlent des carrés magiques, de leur histoire et de leurs constructions. Citons par exemple l'ouvrage de Jacques Bouteloup [Bouteloup, 1991] ou celui de René Descombes [Descombes, 2000].

1	2	3	4	16	2	3	13	16	3	2	13
5	6	7	8	5	11	10	8	5	10	11	8
9	10	11	12	9	7	6	12	9	6	7	12
13	14	15	16	4	14	15	1	4	15	14	1

FIGURE 7.3 – Une construction du carré de Dürer

C'est ainsi à partir d'une idée de grilles numériques que le problème de cette année a été construit. Les réponses étaient envoyées par courriel et au fur et à mesure des envois, j'alimentais une page du site du rallye pour maintenir cette idée de recherche collaborative qui avait si bien fonctionné les années précédentes.

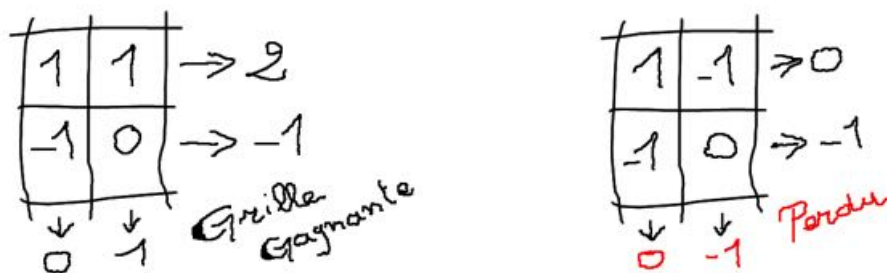


FIGURE 7.4 – Une grille gagnante, une grille perdante

### 7.1 Enoncé

Pour le problème de cette année vous n’aurez besoin que de trois nombres : 1, 0 et -1... et de grilles!

Il faudra remplir les grilles avec ces nombres mais avec une condition supplémentaire : en faisant la somme des nombres placés dans chacune des lignes et dans chacune des colonnes, vous trouverez des résultats tous différents. On dira qu’une grille est gagnante si aucune des sommes des lignes et des colonnes ne sont égales.

Quelles sont les grilles gagnantes de taille  $2 \times 2$ ? De taille  $3 \times 3$ ? de taille  $4 \times 4$ ? ... de taille  $n \times n$ ? Et plus généralement :

Quelles sont les grilles que vous pouvez remplir en respectant cette règle?

### 7.2 Un peu de mathématiques

Une grille  $2 \times 2$  était donné dans l’énoncé et la première question qui pouvait se poser était de savoir si c’était la seule. La réponse est bien sûr non, et une remarque assez fondamentale pour la suite apparaît dans cette première recherche : en multipliant tous les termes d’une grille gagnante par -1 on obtient une autre grille gagnante. Ainsi

-1	-1
1	0

est aussi une ligne gagnante. Ce sont les deux seules solutions à une permutation de lignes ou de colonnes près. En regardant par ailleurs les sommes obtenues, on a soit -1, 0, 1, 2 soit -2, -1, 0, 1. En particulier, on ne peut pas avoir -2 et 2 dans une même grille gagnante. C’est un résultat important que l’on généralisera pour toute grille impaire  $n \times n$  :  $n$  et  $-n$  ne peuvent pas apparaître dans une même grille gagnante.

Mais revenons dans un premier temps à des exemples. Peut-on remplir une grille  $3 \times 3$ ? Quelques essais suffisent pour comprendre que ce remplissage est impossible. Une démonstration par exhaustion de cas semble encore possible.

Preuve

Les sommes possibles sont -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. On a vu que si une grille G est gagnante alors -G l’est aussi. On peut donc commencer par remplir la première ligne de 1 :

1	1	1

Pour la deuxième ligne on peut essayer de mettre des -1 :

1	1	1
-1	-1	-1

Comme les deux premières lignes sont identiques, il faut nécessairement placer -1, 0 et 1 dans la dernière ligne. Mais alors cette dernière ligne a une somme nulle tout comme la deuxième colonne!

1	1	1	somme=3
-1	-1	-1	=somme-3
1	0	-1	somme=0
somme=1	somme=0	somme=-1	

Il faut donc revenir à notre première assumption qui nous a fait remplir la seconde ligne ; comme la somme -3 est exclue, toutes les autres doivent apparaître. Mais -2 ne peut pas être la somme d'une ligne verticale. Il faut donc nécessairement l'écrire à l'horizontal :

1	1	1
0	-1	-1

De même, la somme 2 doit apparaître. Elle peut être insérer dans la première colonne et le tableau est automatiquement complété :

1	1	1	somme=3
0	-1	-1	somme=-2
1	0	-1	somme=0
somme=2	somme=0	somme=-1	

C'est donc que la somme 2 doit apparaître sur la dernière ligne et comme les deux dernières colonnes commencent de la même façon, 1 ne peut être distribué que sur la première et deuxième (à une permutation près des deux colonnes) :

1	1	1	somme=3
0	-1	-1	somme=-2
1	1	0	somme=2
somme=2	somme=1	somme=0	

Ce qui achève de montrer que la grille 3 × 3 ne peut être remplie.

On peut continuer à manipuler les nombres et construire une grille 4 × 4 (Fig. 7.5) :

1	1	1	1
-1	1	1	1
-1	-1	0	1
-1	-1	-1	0

FIGURE 7.5 – Une grille 4 × 4 gagnante

Et encore une fois on se casse le nez sur les grilles 5 × 5. On s'achemine vers un résultat :

**Il est impossible de remplir une grille impaire.  
Toute grille paire possède une solution.**

Prouvons le!

**Quelques résultats**

Dans un premier temps, on remarque que dans une grille gagnante la somme des sommes horizontales est égale à la somme des sommes verticales et la somme de toutes les sommes est égale à deux fois la somme de tous les nombres présents dans la grille.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n h_i &= \sum_{i=1}^n v_i \\ \sum_{i=1}^n h_i + \sum_{i=1}^n v_i &= 2\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{i,j} \end{aligned}$$

Par ailleurs, dans une grille  $n \times n$  il y a  $2n$  lignes et colonnes et les sommes étant comprises entre  $-n$  et  $n$ , il y a  $2n + 1$  sommes potentielles. Il y en a donc une de trop ! Ce qui veut dire que pour obtenir une grille gagnante, il faut nécessairement enlever une des sommes entre  $-n$  et  $n$ . Supposons qu'on enlève la somme  $-s < 0$ . (on peut en effet choisir d'enlever une somme négative puisque nous avons déjà remarqué que si  $G$  est une grille gagnante,  $-G$  l'est aussi).

$$\sum_{i=1}^n h_i + \sum_{i=1}^n v_i = 2\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{i,j} = s$$

Une première conséquence est que la somme  $s$  est nécessairement paire.

Examinons la composition de la grille. Appelons  $N(a)$  le nombre de  $a \in \{-1, 0, 1\}$  de la grille. On a :

$$N(1) + N(-1) = n^2 - N(0) \quad (1)$$

mais aussi :

$$N(1) - N(-1) = \frac{s}{2} \quad (2)$$

Démontrons ce résultat.

Appelons  $\Sigma h^+$  ( $\Sigma h^-$ ,  $\Sigma v^+$ ,  $\Sigma v^-$ ) la somme des sommes horizontales positives (horizontales négatives, verticales positives, verticales négatives).

On sait que :  $\Sigma h^+ + \Sigma v^+ = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $\Sigma h^- + \Sigma v^- = -\frac{n(n+1)}{2} + s$

Appelons également  $N(P_h)$  ( $N(P_v)$ ) le nombre de paires  $\{-1, 1\}$  dans les lignes horizontales (verticales).

On a  $\Sigma h^+ = N(1) - N(p_h)$  : La somme des sommes horizontales positives est le nombre de 1 dans la grille auquel on enlève les 1 associées à -1 et qui ne comptent pas dans les sommes (respectivement  $\Sigma v^+ = N(1) - N(p_v)$ ,  $\Sigma h^- = -N(-1) + N(p_h)$ ,  $\Sigma v^- = -N(-1) + N(p_v)$ ).

Donc

$$\Sigma h^+ + \Sigma h^- = N(1) - N(p_h) - N(-1) + N(p_h) = N(1) - N(-1) = \frac{s}{2}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

On peut donc aussi en déduire que :

$$\begin{cases} \Sigma h^+ + \Sigma h^- = N(1) - N(-1) = \frac{s}{2} & (3) \\ \Sigma v^+ + \Sigma v^- = N(1) - N(-1) = \frac{s}{2} & (4) \\ \Sigma h^+ - \Sigma h^- = N(1) + N(-1) - 2N(p_h) & (5) \\ \Sigma v^+ - \Sigma v^- = N(1) - N(-1) - 2N(p_v) & (6) \end{cases}$$

En combinant (3) et (5) puis (4) et (6) et en se rappelant (1) on obtient :

$$\begin{cases} 2\Sigma h^+ = n^2 - N(0) - 2N(p_h) + \frac{s}{2} & (7) \\ 2\Sigma h^- = -n^2 + N(0) + 2N(p_h) + \frac{s}{2} & (8) \\ 2\Sigma v^+ = n^2 - N(0) - 2N(p_v) + \frac{s}{2} & (9) \\ 2\Sigma v^- = -n^2 + N(0) + 2N(p_v) + \frac{s}{2} & (10) \end{cases}$$

En ajoutant (7) et (9) (ou bien (8) et (10)), il vient :

$$2(\Sigma h^+ + \Sigma v^+) = n(n + 1) = 2n^2 - 2N(0) - 2N(P_h) - 2N(p_v) + s$$

Donc :

$$s = n - n^2 + 2(N(0) + N(p_h) + N(p_v))$$

Intéressons nous à  $N(0) + N(p_h) + N(p_v)$ . Il s'agit du nombre de 0 dans les lignes et les colonnes obtenus avec 0 ou avec la somme  $1+(-1)$ , c'est à dire dans les résultats de  $-n$  à  $n$  (sauf la somme  $s$ ).

Mais,

pour obtenir	il faut ... 0
$n$	0
$n - 1$	1
$n - 2$	2
...	...
1	$n - 1$
0	$n$
-1	$n - 1$
...	...
$-s$	$n - s$
...	...
$-n$	0

Au total, il faut donc,  $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n - s = n^2 - n + s$  zéros.

$$2(N(0) + N(p_h) + N(p_v)) = n^2 - n + s$$

Mais pour faire la somme 0, il ne faut que des 0 ou que des paires  $\{1, -1\}$

Les cases qui participent aux sommes non nulles horizontalement ou verticalement sont donc au nombre de :

$$2n^2 - (n^2 - n + s) = n^2 + n - s$$

Raisonnons par l'absurde, c'est à dire, supposons que  $s < n$  (H) :

Horizontalement,  $n^2 - (N(0) + 2N(p_h))$  correspond au nombre de cases qui participent aux sommes. C'est donc  $\Sigma h^+ - \Sigma h^-$  qui est égal à  $\frac{s}{2}$  (résultat 3).

Donc

$$n^2 - (N(0) + 2N(p_h)) < \frac{n}{2}$$

Donc

$$N(0) + 2N(p_h) > n^2 - \frac{n}{2}$$

De la même façon :

$$N(0) + 2N(p_v) > n^2 - \frac{n}{2}$$

Donc :

$$2N(0) + 2N(p_h) + 2N(p_v) > 2n^2 - n$$

Donc :

$$s = -n^2 + n + 2N(0) + 2N(p_h) + 2N(p_v) > n^2$$

Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse (H)  $s < n$ . Donc :

$$s = n$$

On en déduit alors le résultat :

### Il n'existe pas de grilles impaires gagnantes

Preuve

Supposons que la grille comporte une ligne de 1, elle n'aura donc pas de lignes de -1 (ni de colonne, d'ailleurs).

Par conséquent la somme de toutes les sommes vaut :

$$n + n - 1 + \dots + 1 + 0 + -1 + \dots + (-n + 1) = n$$

Or comme ce nombre est impair, il ne peut pas être égal à  $2\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{i,j}$  qui est pair.

Pour montrer alors que les grilles paires sont gagnantes, on utilise une méthode constructive.

On sait que la grille  $2 \times 2$  est gagnante.

Laissons Mohammed, un élève de troisième du collège Le Bassenon à Condrieu donner une méthode :

« J'utilise le nombre de zéros en fonction du carré. Par exemple, un carré  $8 \times 8$  je divise le nombre 8 par  $2 = 4$ , puis après j'utilise 4 dans le problème. Après je pose les 4 zéros en diagonale en commençant du haut à droite et je mets des zéros en diagonale, après je remplis le reste de la diagonale avec des -1 sauf la dernière case en bas à gauche où il faut mettre un 1. La dernière colonne verticale en commençant de la droite soit commencer par 1 et finir par -1 et entre les deux remplir autant de -1 et des 1. Pour finir on imagine que la plus grande diagonale est une ligne qui sépare le tableau en deux parties, la partie du bas à droite je l'ai rempli avec des 1 et l'autre partie avec des -1.

Cette méthode fonctionne que pour les grilles paires comme  $10 \times 10$ , mais pas pour les impaires » (Voir l'illustration figure 7.6)

D'autres « méthodes » peuvent être utilisées. Je détaille ci-dessous une méthode par récurrence en partant de la grille  $2 \times 2$  gagnante.

On suppose que  $G_{n-2}$  est une grille gagnante  $n - 2 \times n - 2$  dont la somme enlevée est  $-n + 2$

On rajoute 2 lignes et 2 colonnes

On remplit la première ligne de 1

On complète la première colonne ajoutée avec des -1

On complète la deuxième ligne avec des -1 sauf la dernière case où on place un 0.

On complète la dernière colonne avec des 1.

La grille obtenue est une grille  $n \times n$  gagnante; en effet :

la somme de la première ligne vaut  $n$

la somme de la deuxième ligne vaut  $-n + 1$

La somme de la première colonne ajoutée vaut  $-n + 2$  qui n'est pas dans la grille précédente.

La somme de la dernière colonne est  $n - 1$

On a donc rajouté les sommes  $n, n - 1, -n + 2, -n + 1$  qui ne pouvaient pas être présentes dans la grille  $G_{n-2}$ .

Par ailleurs, dans les  $n - 2$  premières colonnes et dans les  $n - 2$  dernières lignes des 2 dernières colonnes on a rajouté 0 (1-1) et on conserve les sommes de  $G_{n-2}, \{-n + 3, \dots, n - 2\}$ . On obtient ainsi une grille  $G_n$  gagnante (Voir figure 7.7).

Cette description par récurrence est un algorithme qui peut être programmé comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant !



FIGURE 7.6 – Un exemple de grille paire gagnante

1	1	...	1	1
-1	-1	...	-1	0
$G_{n-2}$			-1	1
			...	...
			-1	1

FIGURE 7.7 – Le passage d'une grille gagnante à une autre





FIGURE 7.8 – Les premières réponses

### 7.3 Le travail des élèves

Le sujet a été l'occasion d'un grand nombre de réponses de la part des classes qui ont trouvé de nombreux résultats : certaines classes ont dénombré le nombre de grilles gagnantes  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  ; d'autres ont cherché à prouver l'impossibilité des grilles impaires notamment pour les grilles  $3 \times 3$  et  $5 \times 5$  ; beaucoup de remarques pertinentes ont été publiées comme le montre les premiers envois publiés sur le site du rallye (Figure 7.8)

Petit à petit, et fortes de ces premiers résultats, les classes se sont lancées dans des défis plus importants : montrer l'impossibilité des grilles impaires, trouver une façon de générer des grilles paires. J'ai déjà cité dans le paragraphe précédent des réponses intéressantes en les remettant en forme. Mais dans les réponses produites par les élèves, les raisonnements étaient présents, souvent écrits à partir d'un exemple comme dans le cas de cet élève de troisième (Fig. 7.6) mais aussi transformés en programmes en Scratch, python ou Javascript. C'est ce programme proposé par une classe de seconde du lycée Saint Thomas d'Aquin que je reproduis ci-dessous (Fig. 7.9).

Finalement, avec l'ensemble des réponses, la solution complète du problème a pratiquement été trouvée. Les vidéos proposées montrent le grand nombre d'expériences faites par les élèves et

```

<!--
*****
*****
**
**           Classe de Seconde verte
**           Saint Thomas D'aquin, Oullins
**
*****
*****
Ce programme permet de créer des grilles gagnantes de n par n.
Pour ceci, il suffit de l'exécuter puis une boîte de dialogue
s'ouvrira, y rentrer n.
Ce programme a été entièrement écrit en Javascript par la classe de seconde Verte
de lycée Saint Thomas D'Aquin à Oullins.
Les grilles sortantes de cet algorithme sont toutes basées sur un même modèle.
-->
<script language="JavaScript">

    var n          //Variables définies
    var i = 0      //dans cet
    var j = 0      //espace

while((n/2 != Math.round(n/2))||(n==0))           //Si n impair ou n = 0
    n = prompt("Nombre des colonnes et lignes (Nombre pair) ?"); //alors redemander valeur

for(i=1;i<=n;i++)
{
    for(j=1;j<=n;j++)
    {
        if (i>j)                //Pour les valeurs négatives
            document.write(".-1");
        else if (i<j)           //Pour les valeurs positives
            document.write("..1");
        else if (i<=(n/2))      //Pour les diagonales
            document.write("..1");
        else
            document.write("..0");
    }

document.write("<br/>");           //Saut de ligne
}

</script>

```

FIGURE 7.9 – Un programme proposé par une classe

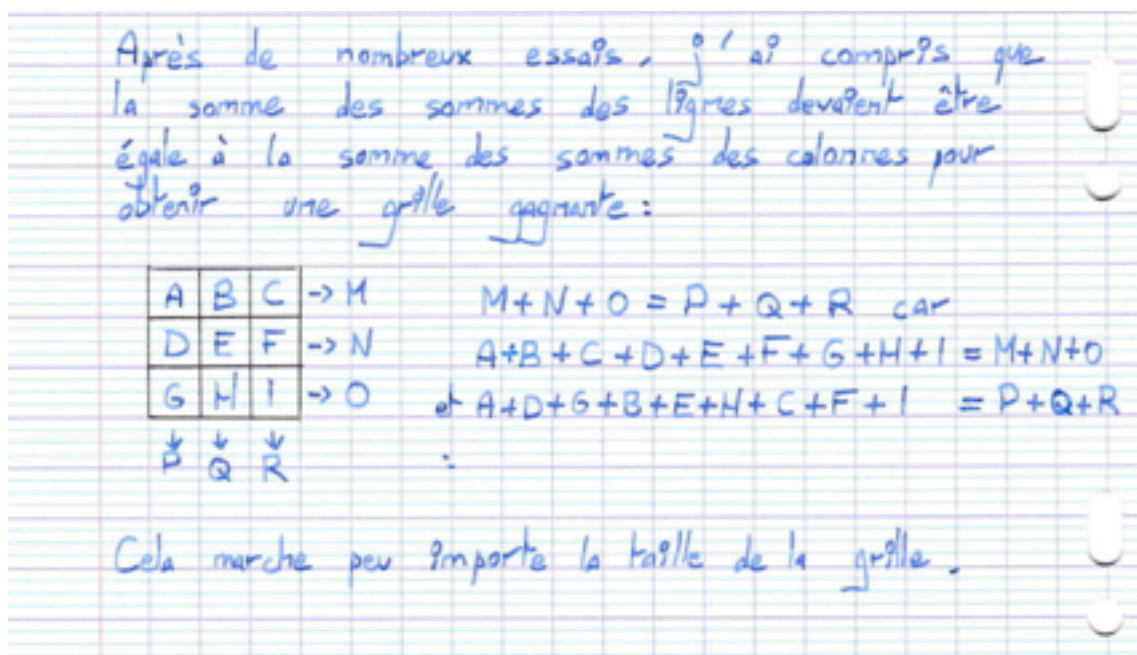


FIGURE 7.10 – Une réponse sous forme de narration de recherche

surtout mettent bien en évidence l'interprétation que les élèves font des résultats des expériences dans des tentatives de généralisation, l'exemple étudié étant alors caractéristique d'une situation plus générale. Plusieurs élèves ont proposé des narrations de recherche, en personnalisant leur réponse avec tout le cheminement qui leurs a permis d'arriver à un résultat particulier, comme le montre l'extrait de cette réponse d'un élève de troisième (Fig. 7.10).

Ce problème a été l'occasion de recherches intéressantes et la persévérance des élèves met bien en évidence que le fait de pouvoir expérimenter sur des exemples permet de rentrer dans le problème et de faire émerger des résultats qui demandent ensuite à être prouvés de façon formelle. Même si toutes les preuves formelles n'ont pas été écrites, les réponses des classes montrent bien l'exploration d'un petit domaine des mathématiques et la mise en œuvre de raisonnements construits sur les résultats des expériences.

## 7.4 Utiliser ce problème en classe

Dans ce problème, les connaissances mathématiques essentielles, mais largement non suffisantes, seront de savoir additionner des nombres entiers relatifs. Autant dire qu'il est difficilement exploitable à l'école primaire. En revanche, dès que les nombres relatifs ont été enseignés, ce problème peut constituer un bon entraînement pour l'addition de tels nombres. Les solutions proposées, tout comme les réponses données par les élèves montrent par ailleurs que la recherche de ce problème fait plus travailler des heuristiques que des connaissances « scolaires » de notions mathématiques. L'écriture d'un programme peut être intéressante d'une part pour la structure de tableau de représentation des données et d'autre part sur la traduction sous forme d'algorithme d'une technique récurrente pour passer d'une grille gagnante à une autre.

L'écriture de la preuve de l'impossibilité d'obtenir des grilles  $3 \times 3$  ou  $5 \times 5$  est intéressante pour utiliser une technique d'exhaustion de cas qui peut être une technique transposable à d'autres sujets. Tout comme le raisonnement par l'absurde qui intervient dans ces démonstrations d'impossibilité.

Ainsi, ce problème peut être proposé en classe dans un but de mettre en évidence des méthodes

de raisonnement transposables à d'autres situations, tout comme il peut être l'occasion de travailler la description d'un algorithme et sa traduction dans un langage de programmation.

## Chapitre 8

# Les chemins sur un quadrillage

Paul Erdős était un mathématicien surprenant et prolifique. Il a voyagé tout au long de sa vie de mathématiciens de congrès en conférences, invité dans les plus grandes universités du monde, proposant des problèmes, des collaborations, écrivant un nombre extraordinaire d'articles, environ mille cinq cents, qu'il a écrit avec environ cinq cent collaborateurs ! Les mathématiciens se sont ainsi amusés à définir leur nombre d'Erdős, qui correspond au plus court chemin entre eux et Erdős dans le graphe des collaborations : deux mathématiciens sont reliés entre eux s'ils ont publié un article co-signé. Ainsi les mathématiciens qui ont publié avec Erdős ont un nombre d'Erdős de 0 et s'il n'y a aucune collaboration reliant à Erdős ce nombre est infini. Du fait des nombreuses collaborations d'Erdős, ce nombre est très souvent petit pour les mathématiciens actuels ! Pour ma part, mon nombre d'Erdős est 5, puisque j'ai écrit avec Marie-Line Gardes [Aldon *et al.*, 2017]. Michel Mizony a écrit avec Marie-Line [Gardes et Mizony, 2012], et précisément sur une conjecture, non encore démontrée à ce jour, la conjecture d'Erdős-Straus qui nous dit :

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on peut trouver des entiers non nuls  $x, y, z$  (non nécessairement distincts) tels que :  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ . L'article cité montre bien le travail simultané d'un chercheur en mathématiques et des élèves confrontés au même problème, mais pour plus de détail, il faut lire la thèse de Marie-Line Gardes [Gardes, 2013] qui analyse en profondeur les processus de recherche des élèves et des mathématiciens pour mettre en évidence des *gestes* de la recherche que Marie-Line définit de la manière suivante :

Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans la possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience. (Ibidem, page 144)

Michel a écrit avec Paul Zimmerman [Dubner *et al.*, 2002], Paul a écrit avec Jean-Louis Nicolas [Deléglise *et al.*, 2008] qui lui même a écrit avec Paul Erdős [Erdős *et al.*, 1998]. Les mathématiciens purs me reprocheront sans doute de citer un article personnel qui n'est pas en mathématiques mais en didactique des mathématiques, mais, tant pis, je reste fier de mon nombre d'Erdős !

Son premier article en 1932, reprenant un résultat de Tchebychev et proposant une démonstration originale du fait qu'entre un nombre et son double il y a toujours un nombre premier. Quand on lui posait la question : quel est le sens de la vie ? il répondait « Prouver et conjecturer et garder le score de SF bas ». SF pour *Supreme fascist* la façon dont Erdős appelait Dieu. Il poursuivait : « Le jeu avec le SF se joue de la façon suivante : si tu fais quelque chose de mal le SF gagne au moins 2 points, si tu ne fais pas quelque chose de bien qui aurait pu être fait, le SF gagne au moins un point et si tout va bien, personne ne gagne de point. Le but est de

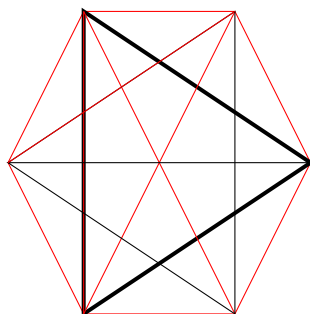


FIGURE 8.1 – Un exemple de coloration de  $K_6$  avec un triangle monocolore

garder ce score bas. ». Il disait aussi : « on ne peut pas être un mathématicien et ne pas être un petit peu fou » et « un mathématicien est une machine qui transforme le café en théorèmes ! ». Erdős est aussi connu pour présenter des preuves simples, élégantes et utilisant souvent des mathématiques élémentaires. Un des sujets de prédilection d'Erdős était la combinatoire. Il s'est par exemple intéressé au fameux théorème de Ramsey qui affirme que pour tout  $n$ , tout graphe complet suffisamment grand et dont les arêtes sont colorés contient des sous-graphes complets de taille  $n$  d'une seule couleur. Par exemple, si on considère  $K_6$ , le graphe complet à 6 sommets dont les arêtes sont colorées en deux couleurs noir et rouge, on peut montrer qu'il existe forcément un  $K_3$  (un triangle) monochromatique. En effet, considérons un sommet  $s$  du graphe, il est de degré 6, c'est à dire 6 arêtes sont issues de  $s$ . Il en existe donc au moins 3 qui sont de même couleur, rouge par exemple. Appelons  $\{s, s_1\}$ ,  $\{s, s_2\}$  et  $\{s, s_3\}$  ces trois arêtes. Si  $\{s_1, s_2\}$  ou  $\{s_2, s_3\}$  ou  $\{s_3, s_1\}$  est rouge alors  $ss_1s_2$  ou  $ss_2s_3$  ou  $ss_3s_1$  est entièrement rouge. Sinon les trois arêtes sont noires et le triangle  $s_1s_2s_3$ ; ce que l'on peut interpréter en disant par exemple que dans une assemblée de 6 personnes il y en a forcément 3 qui se connaissent ou bien 3 qui ne se connaissent pas.  $R(n, n)$  est alors le nombre minimum de sommets d'un graphe pour qu'on puisse extraire un graphe complet d'ordre  $n$  mono-colore. Erdős s'est intéressé à cette théorie et avec une méthode probabiliste il donne des minorants des nombres de Ramsey. Mais quel rapport entre Erdős et les problèmes ouverts du rallye mathématique ? Et, bien, précisément, cette année là, le problème ouvert était un problème de combinatoire.

### 8.1 Enoncé

Cette année, le problème ouvert du rallye est encore une question de grilles ! On se donne une grille rectangulaire de 3 lignes et 6 colonnes.

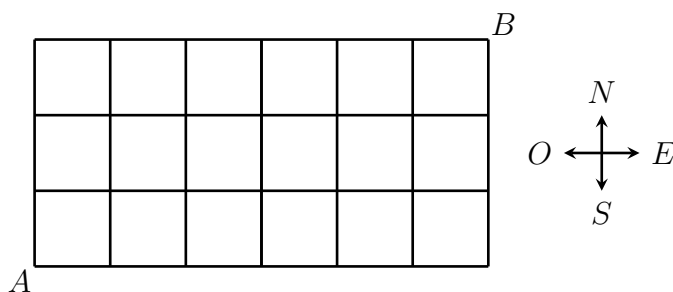
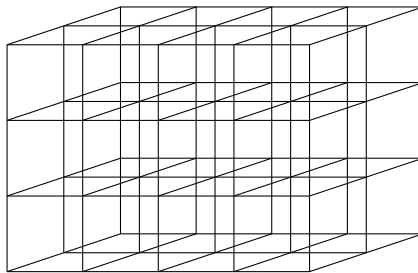


FIGURE 8.2 – la grille de départ

On veut se déplacer sur les segments de cette grille pour aller du point  $A$  au point  $B$ . On ne peut se déplacer que dans les directions  $E$  et  $N$  (voir sur le dessin).

FIGURE 8.3 – Une grille  $4 \times 3 \times 2$ **Partie 1**

Combien de chemins différents conduisent de  $A$  à  $B$  ?

Et si la grille était une grille de  $n$  colonnes et de  $p$  lignes ? (n'hésitez pas à faire des essais avec des valeurs de  $n$  et de  $p$ !)

**Partie 2**

Toujours sur les mêmes grilles, la règle change ! Dès que l'on atteint le bord supérieur ou le bord droit, les déplacements autorisés changent et on ne peut plus se déplacer qu'en utilisant les directions  $O$  et  $S$ .

Combien de chemins partent de  $A$  et reviennent à  $A$  ?

**Partie 3**

Et si maintenant la grille était dessinée dans l'espace. Les déplacements autorisés sont  $E$ ,  $N$ ,  $P$  (voir figure 8.3).

Combien de chemins mènent de  $A$  à  $B$  dans un parallélépipède  $n \times m \times p$  ?

Et s'il y avait des rebonds ?

## 8.2 Un peu de mathématiques

### 8.2.1 Partie 1

Le problème est ici ouvert pour des élèves de troisième et seconde, mais c'est un problème classique de combinatoire.

Le nombre de chemins pour aller de  $A$  à  $B$ , le nombre de chemins est le nombre de combinaisons de 3 parmi 9 soit  $\binom{9}{3} = 84$ . En effet un chemin de  $A$  à  $B$  est de longueur 9, et il y a 6 déplacements vers l'est et 3 déplacements vers le nord. Il s'agit donc de dénombrer le nombre de façons de placer 3  $N$  dans les 9 emplacements (ou de placer 6  $E$  dans ces 9 emplacements). Il s'agit donc de choisir 3 places parmi 9 (respectivement 6 places parmi 9) ; on choisit la première, il y a 9 choix, on choisit la seconde, il n'y a plus que 8 choix et on choisit la troisième, il y a 7 choix. Au total il y a donc  $9 \times 8 \times 7$  choix ; mais il y a à chaque choix 6 identiques. Finalement, il y a

$$\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = \frac{9!}{6! \times 3!} = 84$$

On remarque au passage que le raisonnement avec le choix de 6 déplacements vers l'est est de même nature et conduit au même résultat.

D'une façon générale, pour atteindre le point  $B$  dans une grille de  $n$  colonne et  $p$  lignes, le nombre de chemins sera :

$$\frac{(n+p)!}{n! \times p!}$$

### 8.2.2 Partie 2

On suppose que la grille est une grille  $n \times p$ . Il va s'agir maintenant de compter tous les chemins qui vont sur chacun des points du bord supérieur et du bord droit, c'est à dire aux points de coordonnées  $(x, p)$ ,  $x \in \{0, \dots, n\}$  et  $(n, y)$ ,  $y \in \{0, \dots, p - 1\}$ . En effet, si  $y = p$  on compte une deuxième fois les chemins qui atteignent le point  $(n, p)$ .

Donc :

$$\sum_{x=0}^n \binom{x+p}{x} + \sum_{y=0}^{p-1} \binom{y+n}{y} = \sum_{x=0}^n \binom{x+p}{p} + \sum_{y=0}^{p-1} \binom{y+n}{n}$$

Bien entendu, le nombre de chemins pour revenir à l'origine est le même, c'est à dire que à chaque chemin conduisant à un point on a autant de chemins ramenant à l'origine, si bien que si le nombre de chemins conduisant au point  $X$  est  $x$ , il y aura  $x^2$  chemins de  $A$  à  $A$  après rebond.

Prenons un exemple en utilisant le quadrillage de la figure 8.2.  $A$  a pour coordonnées  $(0,0)$  et  $B$   $(6,3)$ . On remarque que l'on ne peut pas atteindre le point  $B$  avec cette nouvelle règle, puisque pour l'atteindre il faudrait venir des points de coordonnées  $(6, 2)$  ou  $(5, 3)$  qui auraient inversé le cheminement.

$(0,0) \rightarrow (0,3)$	$\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$	$(0,0) \rightarrow (6,0)$	$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$
$(0,0) \rightarrow (1,3)$	$\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$	$(0,0) \rightarrow (6,1)$	$\binom{7}{1} = \binom{6}{7} = 7$
$(0,0) \rightarrow (2,3)$	$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$	$(0,0) \rightarrow (6,2)$	$\binom{8}{2} = \binom{8}{6} = 28$
$(0,0) \rightarrow (3,3)$	$\binom{6}{3} = \binom{6}{3} = 20$		
$(0,0) \rightarrow (4,3)$	$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$		
$(0,0) \rightarrow (5,3)$	$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$		
	=126		=36

Le nombre de chemins qui partent de  $A$  vers les points de rebond est 162 et le nombre de chemins qui rebondissent sur un côté et reviennent en  $A$  est donc de  $1^2 + 4^2 + 10^2 + 20^2 + 35^2 + 56^2 + 1^2 + 7^2 + 28^2 = 5712$ .

### 8.2.3 Une remarque

On sait que les combinaisons sont les coefficients des  $a^j b^k$  avec  $j + k = n$  dans le développement de  $(a + b)^n$ . On sait aussi que ces coefficients sont donnés dans le triangle de Pascal.

1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1



Si on regarde les combinaisons qui dénombrent les chemins entre le point  $A$  et le côté horizontal (d'ordonnée 3), ces combinaisons apparaissent sur la diagonale ou la colonne en rouge et en vert sur le triangle de Pascal. En particulier, la somme représentée verticalement en rouge peut s'écrire dans toute sa généralité :

$$\sum_{x=0}^n \binom{x+p}{p}$$

Mais on sait (ou on redémontre<sup>1</sup>) que  $\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k}$

Par conséquent

$$\sum_{x=0}^n \binom{x+p}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}$$

En effet, avec la convention que  $\binom{p+1}{p} = 0$  on écrit les termes de la somme :

$$\sum_{x=0}^n \binom{x+p}{p} = \sum_{x=0}^n \binom{x+p+1}{p+1} - \binom{x+p}{p+1}$$

Les termes de cette somme s'annulent deux à deux et il reste le seul dernier terme  $\binom{n+p+1}{p+1}$ . Cette question n'était pas posée mais est intéressante à résoudre, en particulier pour se rappeler la formule de la somme des colonnes du triangle de Pascal.

Finalement dans une grille  $n \times p$  le nombre de chemins qui vont rebondir sur un des côtés, nord ou est, est :

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{n-1} \binom{x+p}{p} + \sum_{y=0}^{p-1} \binom{y+n}{n} \\ = \binom{n+p}{p+1} + \binom{n+p}{n+1} \end{aligned}$$

Et on retrouve le résultat de l'exemple de la grille 8.2, où  $n = 6$  et  $p = 3$  :

$$\frac{9!}{4! \times 5!} + \frac{9!}{7!2!} = 162$$

### 8.2.4 Finalement

Le nombre de chemins qui vont revenir au point  $A$  est donc :

$$\sum_{x=0}^n \binom{x+p}{p}^2 + \sum_{y=0}^{p-1} \binom{y+n}{n}^2$$

### 8.2.5 Partie 3

Si nous nous plaçons maintenant dans un cube  $m \times n \times p$ , les résultats vont être construits en utilisant les mêmes arguments mais en rajoutant une dimension. Ainsi, dans l'exemple de l'énoncé (Figure 8.3) pour atteindre le point de coordonnées  $(4, 3, 2)$ , il y aura :

$$\frac{9!}{4!3!2!}$$

---

1.  $\binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k} = \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-1-k+1)!} + \frac{(p-1)!}{k!(p-1-k)!} = \frac{k(p-1)!+(p-k)(p-1)!}{k!(p-k)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{p}{k}$

Et d'une manière générale, pour atteindre le point de coordonnées  $(m, n, p)$  :

$$\frac{(m + n + p)!}{m!n!p!} \text{ chemins}$$

S'il y a rebond, il s'agira alors de calculer la somme des carrés du nombre de chemins atteignant le plafond (points de la grille d'ordonnée  $n$ ), le mur est (points de la grille d'abscisses  $n$ ) et le mur nord (points de la grille de côte (ou de profondeur)  $p$ ). On obtient alors :

$$\sum_{x=0}^m \sum_{y=0}^n \left( \frac{(x + y + p)!}{x!y!p!} \right)^2 + \sum_{x=0}^m \sum_{z=0}^p \left( \frac{(x + n + z)!}{x!n!z!} \right)^2 + \sum_{y=0}^m \sum_{z=0}^p \left( \frac{(m + y + z)!}{m!y!z!} \right)^2 - 2 \left( \frac{(m + n + p)!}{m!n!p!} \right)^2$$

### 8.3 Le travail des élèves

Cet énoncé peut sembler peu ouvert puisque le dénombrement de chemins dans une grille est un problème classique mais, rappelons nous que les élèves concernés sont des élèves de troisième et seconde. Le problème est abordable pour eux à condition de commencer par faire des expériences avec des grilles aux dimensions raisonnables, puis de constater des régularités qui peuvent éventuellement être généralisées. Et c'est bien cette position qui a été majoritairement adoptée par les classes qui ont participé à la résolution de ce problème et la définition d'une combinaison est soit sortie des réflexions des élèves, soit apporter par l'enseignant dans un moment particulièrement propice. La réponse proposée par une classe de seconde montre bien cette créativité en action alors que les élèves proposent une solution du nombre de chemin dans la grille  $6 \times 3$  joignant les points diamétralement opposés :

Nous avons trouvé au total 84 chemins possibles si on ne fait que des pas vers le nord ou vers l'est.

Notre démarche :

En construisant sur la figure plusieurs chemins, on constate qu'il faut toujours 9 pas au total ( 3 vers le nord et 6 vers l'est)

Il suffit donc de chercher le nombre de façons de placer les trois pas vers le nord parmi les 9 pas, puisque de toutes façons , les autres pas seront des pas vers l'est ; C'est comme si on avait des nombres de 3 chiffres

Par exemple si on écrit : 1 5 6 : on fait le 1er , le 5ème et le 6ème pas vers le nord ( et donc les 2ème, 3ème, 4ème, 7ème, 8ème et 9ème pas vers l'est)

On a écrit toutes ces possibilités sous forme de nombres de 3 chiffres

123	124	125	126	127	128	129	134	135	136
137	138	139	145	146	147	148	149	156	157
158	159	167	168	169	178	179	189	234	235
236	237	238	239	245	246	247	248	249	256
257	258	259	267	268	269	278	279	289	345
346	347	348	349	356	357	358	359	367	368
369	378	379	389	456	457	458	459	467	468
469	478	479	489	567	568	569	578	579	589
678	679	689	789						

La figure 8.4, partie de la réponse de classes de seconde, montre bien ces expériences réalisées, et la démarche conduisant à des résultats plus formalisés.

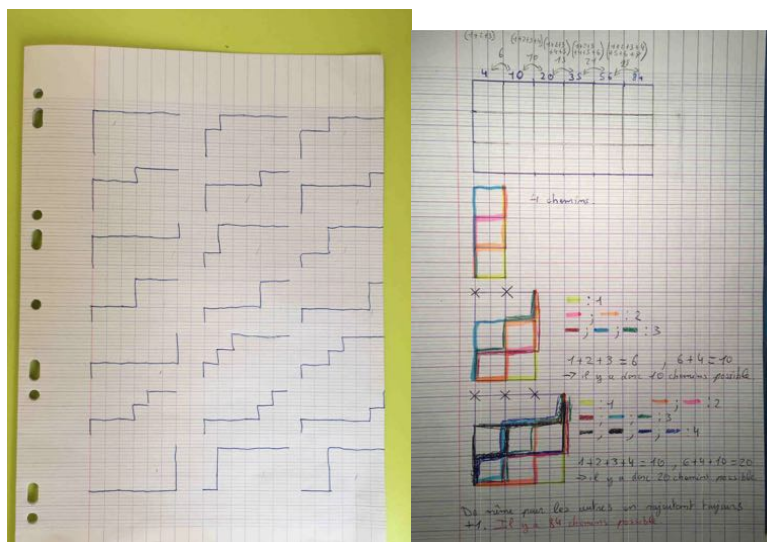


FIGURE 8.4 – Représentations des chemins dans des grilles par deux classes de seconde

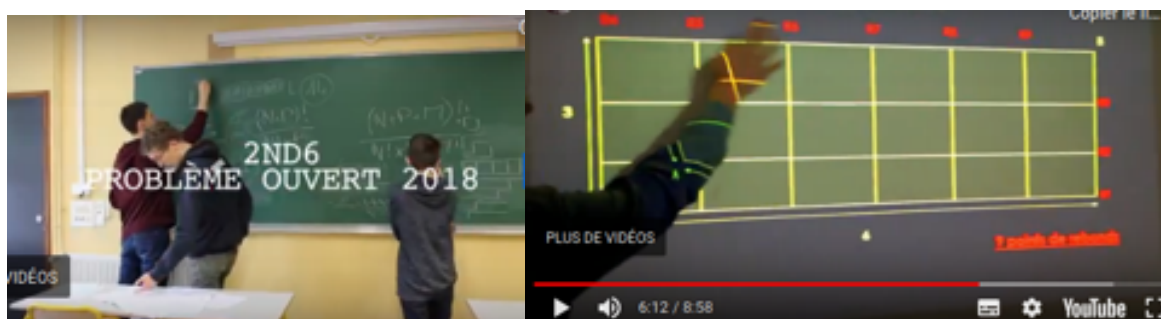


FIGURE 8.5 – Extraits de vidéos envoyées par les élèves

Des vidéos très explicites ont également été envoyées avec des élèves expliquant les résultats trouvés par la classe avec beaucoup de rigueur, comme en témoignent ces deux photos extraites des vidéos (Fig. 8.5)

## 8.4 Utiliser le problème en classe

### 8.4.1 À l'école primaire

Sans bien sûr qu'il ne soit fait référence aux combinaisons, le problème est intéressant pour la nécessité de compter tous les chemins possibles et donc de décrire exhaustivement une situation qui peut rapidement devenir complexe. En commençant par des « petites » grilles, l'expérimentation et la recherche d'exhaustivité peuvent être des objectifs de ce problème dans les classes de cycle 3.

Mais, outre le dénombrement des différents chemins, l'idée du parcours sur une grille et le codage possible est intéressant dès la maternelle où le programme stipule que « l'expérience de l'espace porte sur l'acquisition de connaissances liées aux déplacements, aux distances et aux repères spatiaux élaborés par les enfants au cours de leur activité »<sup>2</sup>. Ainsi, parcourir un quadrillage peut occuper une place importante dans ces activités d'orientation tout au long de l'école primaire. Comment coder les déplacements ? Comment prévoir une trajectoire ?

2. B.O. spécial n°2 du 26 mars 2015



FIGURE 8.6 – Une Beebot

Les petits robots *BeeBot* (Figure 8.6) peuvent être d'excellents outils pour faire travailler les déplacements sur une grille. Le robot BeeBot se programme en prévoyant ses déplacements sur une grille. Cette petite abeille peut avancer, reculer, tourner à droite ou à gauche d'un quart de tour, par une simple pression sur les boutons qui ornent son dos. On programme son déplacement en appuyant autant de fois que nécessaire sur les flèches de direction puis en appuyant sur GO, la BeeBot effectue le trajet programmé.

A la MMI (Maison des Mathématiques et de l'Informatique) quand je recevais des classes de l'école élémentaire, j'avais l'habitude de proposer des activités utilisant les BeeBots. Basiquement, je demandais aux élèves de programmer la BeeBot pour qu'elle atteigne la case du trésor en évitant les obstacles (Figure 8.7). Bien sûr, plusieurs chemins sont possibles et la question suivante était de trouver aussi le chemin le plus court. Dans l'exemple de la figure 8.7, il aurait fallu programmer la BeeBot de la manière suivante :

↑↑↑↶↑↑↑↶↶↶↑↶↑↶↑

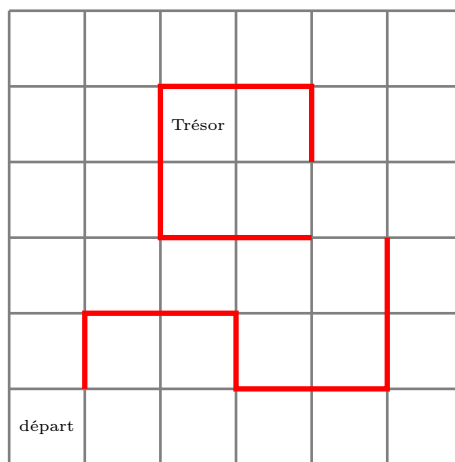
Prévoir la trajectoire sans toucher le tapis est souvent une situation difficile pour les élèves qui très souvent perde l'orientation droite-gauche quand le robot n'est plus dans la même position qu'eux.

Cristina [Sabena, 2017] aborde la relation délicate entre l'espace tel qu'il est vécu dans l'expérience quotidienne et l'espace en tant que notion mathématique, et adopte une perspective multimodale de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Une étude expérimentale a été menée dans une école maternelle. L'analyse qualitative des données des enregistrements vidéo constitue la toile de fond dans laquelle le développement spatial des enfants est discuté.

### 8.4.2 Au collègue

Tout comme à l'école primaire, les connaissances mathématiques ne sont pas disponibles *a priori* chez les élèves de collège, mais là encore, mener l'expérience, donner des arguments pour prouver que tous les chemins ont été comptés, faire des représentations de la situation, tenter des généralisations des résultats sont autant d'objectifs qui peuvent être assignés à ce problème. De la même façon qu'à l'école primaire, l'utilisation des BeeBots permet de consolider chez les élèves leur construction de l'espace et de le mettre en regard de l'espace mathématique. Ce peut être aussi l'occasion de parler de parallélisme en programmation en proposant le défi suivant : Quatre BeeBots sont disposées sur les quatre côtés du tapis ; elles doivent rejoindre le côté opposé dans la case de la BeeBot d'en face ; elles doivent partir en même temps et arriver en même temps. Comment programmer les quatre BeeBots ? (Voir figure 8.9

Proposer comme défi à plusieurs équipes de quatre enfants, ce problème a donné lieu à de nombreux carambolages et embouteillages sur le tapis ! Mais aussi il a donné lieu à des solutions créatives, comme celle montrée sur la figure 8.8. Les nombres sur la grille indiquent le nombre



— : murs

FIGURE 8.7 – Un déplacement à programmer

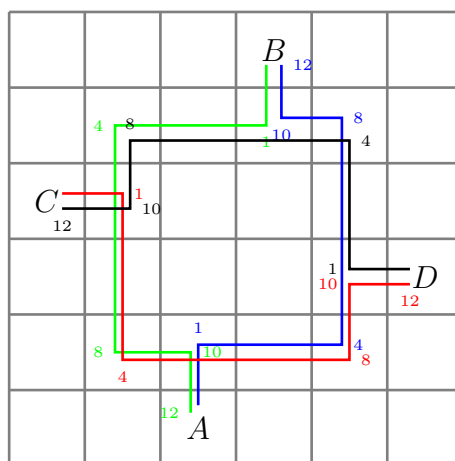


FIGURE 8.8 – Trajectoire des quatre BeeBots

de mouvements de la BeeBot lorsqu'elle s'arrête sur la case, en sachant qu'un mouvement peut être « avancer », « reculer », « Tourner à droite », « Tourner à gauche », « Faire une pause ». On voit alors qu'il n'y aura pas de carambolage (les trajectoires se croisent en des temps différents) et que toutes les BeeBots arriveront après 12 mouvements.

Une équipe d'élèves de sixième avaient imaginé une toute autre stratégie : les deux BeeBots *A* et *B* partaient tout droit et s'arrêtaient sur la case voisine de leur destination en s'étant placés dans la direction de la cible. Pendant ce temps *C* et *D* faisaient autant de pauses (en l'occurrence 6) ; puis *C* et *D* suivaient la même stratégie pendant que *A* et *B* étaient en pause. Enfin, les quatre BeeBots avançaient d'une case ! Solution un tout petit peu plus longue que celle illustrée sur la figure 8.8 (13 mouvements au lieu de 12) mais très sécurisée !

Utiliser les BeeBots dans ces défis donne bien sûr un côté ludique et les cris de joie des enfants lorsque le défi est relevé montrent sans conteste la dévolution du problème. Cependant, il est possible d'utiliser l'émulateur de BeeBot (<https://beebot.terrapinlogo.com/>) ou même de faire jouer la scène en vrai par des élèves-robots, à condition bien sûr qu'ils exécutent les ordres donnés par les programmeurs et rien que ces ordres !



FIGURE 8.9 – La « course » à quatre

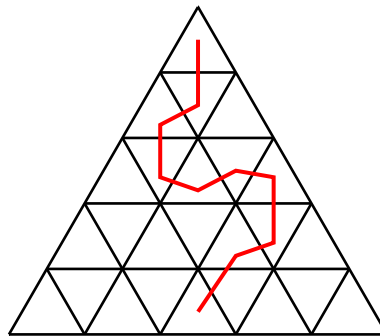


FIGURE 8.10 – Un chemin dans un triangle de côté 5

### 8.4.3 Au lycée

C'est bien sûr un problème qui peut être utilisé dans une présentation des probabilités et des questions supplémentaires peuvent être abordées ; par exemple :

Dans une grille  $6 \times 8$ , quelle est la probabilité qu'un chemin à l'aller ou au retour passe par le point de coordonnées  $(1,1)$  (ou  $(a, b)$  pour généraliser).

Ce qui amènera à compter tous les chemins et parmi ceux-là, tous les chemins qui passent par le point considéré. D'une façon générale, le dénombrement des chemins peut être mis en lien avec les concepts de combinatoire, combinaisons, arrangements, permutations, etc. dans une perspective d'une définition « géométrique » de la probabilité d'un événement en lien avec une expérience aléatoire.

Ce peut être aussi l'occasion de parler de différents types de chemins dans une grille et par exemple compter dans une grille  $n \times n$  les chemins qui vont de  $(0,0)$  à  $(n, n)$  en restant au dessus de la diagonales (nombres de Schröder), ou bien les chemins dans un triangle équilatéral de côté de longueur  $n$  qui vont du carreau au sommet au carreau central de la ligne du bas en traversant les carreaux par un côté adjacent, sans jamais remonter d'une ligne de triangles et en ne repassant pas deux fois sur le même carreau (Figure 8.10).

Ce problème peut aussi donner l'occasion de programmer le nombre de chemins. L'intérêt de la programmation est d'obliger à décrire la situation de manière précise et exhaustive ce qui relie très fortement la découverte de l'algorithme et le dénombrement cherché. Par exemple dans le problème dans le triangle, la question de savoir comment caractériser un chemin est primordial. Or il suffit de regarder quand un chemin change de ligne, ou plus exactement quel est l'ordre du triangle où ça se passe. Par exemple dans la figure 8.10, si on compte les triangles où ce franchissement est possible depuis la gauche, le chemin peut être décrit

comme  $(1, 1, 3, 3)$  et le nombre de chemins possibles est donc le nombre de quadruplet pris dans  $\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ , c'est donc  $1 \times 2 \times 3 \times 4 = (5 - 1)!$ . Et d'une façon générale, ce nombre de chemins vaut  $(n - 1)!$ .





## Chapitre 9

# Sangaku

Les *sangaku* sont des tablettes mathématiques qui sont généralement accrochés dans des sanctuaires shinto ou bouddhistes au Japon. L'originalité de ces tablettes repose sur le fait que les contenus sont mathématiques. C'est une pratique ancienne qui semble remonter au moins au XVII<sup>e</sup> siècle dans une période particulièrement féconde pour la recherche mathématique au Japon avec les noms des grands mathématiciens Seki Takakazu ou Takebe Katahiro. Seki Takakazu (1640-1708) est la figure emblématique du « wasan », tradition mathématique japonaise, qui s'oppose au terme « Josan » décrivant les mathématiques occidentales. On ne connaît pas grand chose de la vie de Seki Takakazu et notamment en ce qui concerne son éducation. Comment en est-il venu à étudier les mathématiques ? L'histoire ne nous le dit pas, mais il reste de sa part des écrits d'une très grande érudition, s'appuyant sur la tradition mathématique japonaise. Ses travaux portent majoritairement sur un développement de l'algèbre, s'appuyant sur une reformulation de problèmes classiques et leur résolution par des méthodes algébriques. Dans son ouvrage *Kaifukudai no hō* (1683 ; « Méthode pour résoudre les problèmes cachés »), il a décrit certaines propriétés importantes liées aux méthodes de calculs. Il s'est aussi intéressé à la détermination des racines des équations polynomiales. Takebe Katahiro, qui a été un élève de Seki Takakazu distingue dans son ouvrage *Tetsujutsu sankei* deux façons de résoudre un problème mathématique : une recherche fondée sur le calcul impliquant une approche inductive, fondée sur la manipulation des données pour trouver une loi générale et une approche raisonnée qui implique l'utilisation de règles et de procédures comme par exemple en algèbre. Il montre alors la complémentarité des deux approches, notamment en étudiant les sommes de séries infinies et en posant les bases de l'analyse au Japon.

C'est donc dans ce contexte que les *sangaku* apparaissent. Les historiens s'accordent à leur donner au moins trois fonctions : faire connaître les jeunes talents de mathématiciens, proposer des défis et communiquer son savoir, et enfin une fonction publicitaire permettant de faire connaître les écoles et signaler aux voyageurs la présence dans une ville ou un village d'un maître de mathématiques. C'est ainsi par exemple que le mathématicien Yamaguchi Kazu recrutait, au cours de ses voyages, de jeunes talents qui eux-mêmes disséminaient à travers les *sangaku* les connaissances de son école mathématique.

Un exemple de *sangaku* est montré sur la figure 9.1<sup>1</sup>. Même si on ne lit pas le japonais, on comprend bien les questions qui peuvent se poser dans cette configuration géométrique, comme par exemple, quels sont les rayons des cercles en fonction de l'angle ? Quel est l'angle joignant les centres des cercles de même rayon ? Etc. Ainsi, juste à partir du dessin, un monde s'ouvre de questions, d'investigation, de belles mathématiques. C'est exactement dans cette situation que j'ai voulu mettre les élèves. Que peut-on dire ? Quelles mathématiques peut-on créer ? Laisser libre cours à son imagination et se poser soi-même les problèmes que l'on voudrait résoudre,

---

1. Merci à Chantal Causse qui me l'a ramené d'un de ses voyages au Japon



FIGURE 9.1 – Un exemple de sangaku

c'est aussi une façon de renouer avec cette tradition des sangakus.

Cette année encore le site s'est progressivement rempli de propositions, de conjectures et de démonstrations, les classes pouvant répondre aux autres classes, lancer des défis, bref, revenir aux fonctions des sangakus !

## 9.1 L'énoncé du problème

$ABCD$  est un carré de côté 1.  $E$  est un point de  $[AD]$  (ou de  $(AD)$ ).

Les cercles sont inscrits dans les triangles  $ABE$ ,  $BEC$  et  $ECD$ .

Quelles questions pouvez vous poser ? Quelles conjectures pouvez vous émettre ?

Éventuellement est-ce que vous pouvez répondre aux questions ? Prouver ou réfuter les conjectures ?

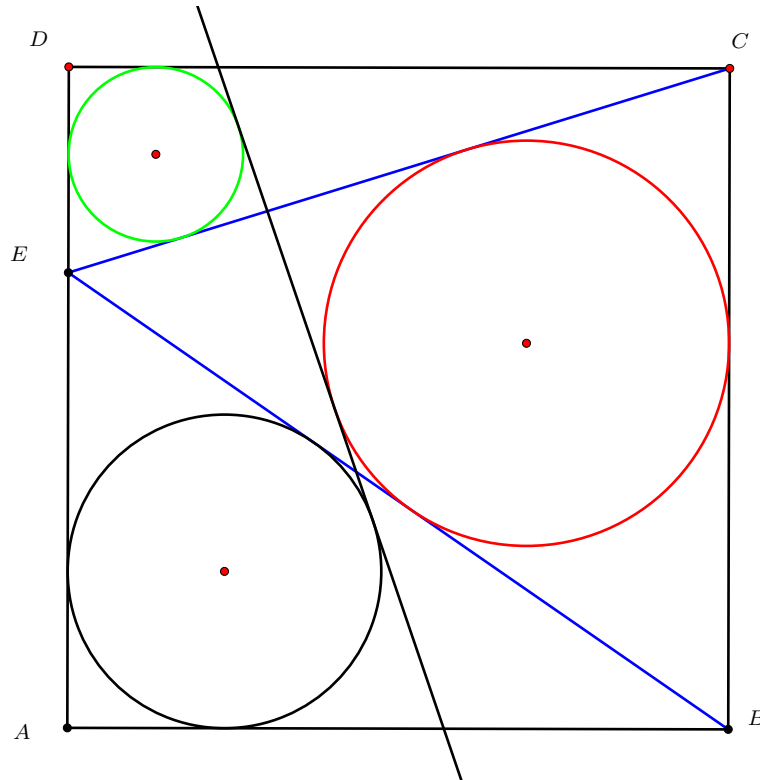


FIGURE 9.2 – Dessin de départ

## 9.2 Quelques premières questions

1. Quels sont les rayons des trois cercles ?
2. Quelles sont les aires des trois triangles  $ABC$ ,  $BCE$  et  $CED$  ?
3. Est-ce qu'il est possible que les trois disques aient la même aire ?
4. Est-ce qu'il est possible que deux des trois disques aient la même aire ?
5. Quelle est l'aire des disques ?
6. Est-ce que le triangle  $O_1O_2O_3$  peut être équilatéral ? Si oui, pour quelle(s) position(s) de  $E$  ?
7. Quelle est l'aire de  $O_1O_2O_3$  ?
8. Est-ce qu'une droite tangente à deux cercles est tangente au troisième ?
9. Quels sont les lieux de  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  ?
10. Quelle(s) courbe(s) enveloppe la tangente commune lorsque  $E$  parcourt le segment  $[AD]$  ?
11. Quelle(s) homothétie(s) transforme(nt) les cercles ?
12. ...

## 9.3 Et quelques premières réponses

J'appelle  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  les trois centres des cercles inscrits des triangles  $ABE$ ,  $BCE$  et  $CDE$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  les rayons de ces cercles.

Dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$  je note  $d_E$  la distance  $AE$ .

### 9.3.1 Quelques remarques

#### Remarque 1

L'aire du triangle  $BCE$  vaut  $\frac{1}{2}$  quelque soit la position de  $E$ .

En effet :

$$A(BCE) = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{1}{2}$$

#### Remarque 2

Le problème peut se réduire aux position de  $E$  entre  $-\infty$  et  $\frac{1}{2}$  par symétrie.

#### Remarque 3

Lorsque  $E$  est en  $A$ ,  $r_1 = 0$  et  $r_2 = r_3$ .

#### Remarque 4

Lorsque  $E$  est au milieu de  $[AD]$ ,  $r_1 = r_3$ .

En effet dans ces conditions,  $ABE$  et  $CDE$  sont symétriques par rapport à la droite parallèle à  $(AB)$  passant par  $E$  et ont donc deux cercles inscrits de même rayon.

**Remarque 5**

Lorsque  $E$  est au milieu de  $[AD]$ ,  $r_2 = \frac{1}{3}$ .

En effet dans ces conditions, le triangle  $BCE$  est isocèle et le centre du cercle inscrit est confondu avec le centre de gravité qui se trouve au  $\frac{2}{3}$  de la médiane. Donc  $r_2 = \frac{1}{3}$

**9.3.2 Calcul des rayons**

L'aire d'un triangle dont le rayon du cercle inscrit est  $r$  et le demi-périmètre  $p$  est donné par la formule :

$$A = p \times r$$

En effet, en triangulant le triangle comme indiqué sur la figure 9.3 l'aire du triangle apparaît comme le produit du demi-périmètre par le rayon du cercle inscrit.

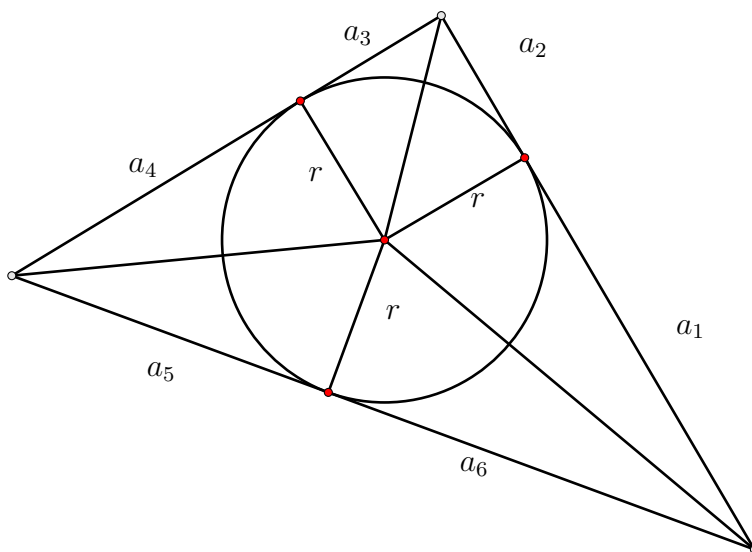


FIGURE 9.3 –  $A = \frac{r \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)}{2}$

Ainsi, si  $E \in [AD]$  :

$$A(ABE) = \frac{d_E}{2}$$

$$A(CDE) = \frac{1 - d_E}{2}$$

Si  $E \in ]-\infty, A]$

$$A(ABE) = \frac{d_E}{2} \text{ rien ne change}$$

$$A(CDE) = \frac{1 + d_E}{2}$$

Et dans les deux cas :

$$A(BCE) = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$r_1 \times \frac{1 + d_E + \sqrt{1 + d_E^2}}{2} = \frac{d_E}{2}$$

$$r_1 = \frac{d_E}{1 + d_E + \sqrt{1 + d_E^2}}$$

$$r_2 \times \frac{\sqrt{1 + d_E^2} + 1 + \sqrt{1 + (1 \pm d_E)^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$r_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + d_E^2} + 1 + \sqrt{1 + (1 \pm d_E)^2}}$$

$$r_3 \times \frac{1 \pm d_E + 1 + \sqrt{1 + (1 \pm d_E)^2}}{2} = \frac{1 \pm d_E}{2}$$

$$r_3 = \frac{1 \pm d_E}{1 \pm d_E + 1 + \sqrt{1 + (1 \pm d_E)^2}}$$

On peut représenter les trois rayons en fonction de la position du point  $E$  sur  $[AD]$  :

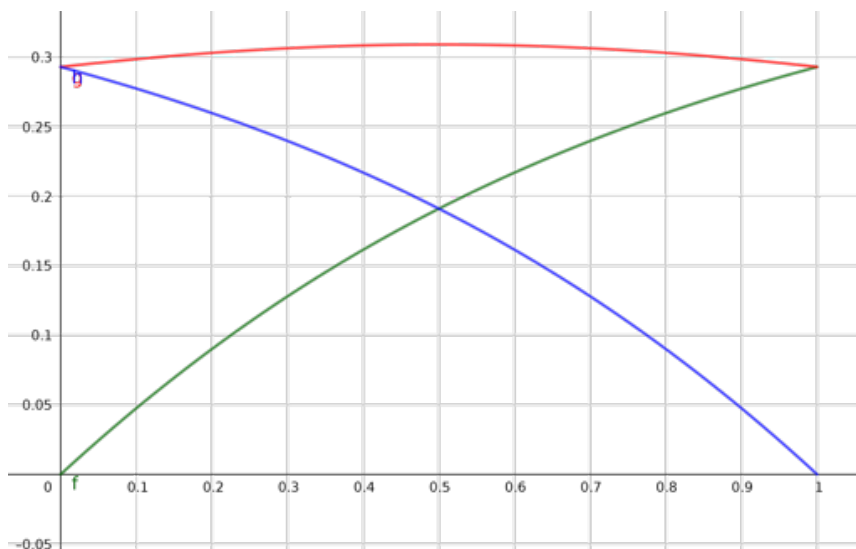


FIGURE 9.4 – Les trois rayons en fonction de la distance  $AD$

On peut voir en particulier que le rayon  $r_2$  est toujours plus grand que  $r_1$  ( $r_3$ ) sauf lorsque  $E$  est en  $A$  (ou en  $D$ ). On peut aussi voir la symétrie déjà remarquée dans le paragraphe 9.3.1 (remarque 2) et l'égalité des deux rayons  $r_1$  et  $r_3$  lorsque  $E$  est au milieu de  $[AD]$  (remarque 4).

### 9.3.3 Tangentes

La droite  $(EB)$  est tangente aux deux cercles  $C_1$  et  $C_2$ . Si on appelle  $A_1$  et  $A_2$  les points de tangence, le centre de l'homothétie qui transforme  $C_1$  en  $C_2$  est donc sur la droite  $(EB)$ . Il est par ailleurs sur la droite  $(O_1O_2)$  puisque l'homothétie transformera le centre d'un cercle dans le cercle de l'autre.

Le centre est donc le point d'intersection de ces deux droites (notons le  $X_{12}$ ). La deuxième tangente (croisée) passe donc par ce point.

De la même façon, la tangente à  $C_2$  et  $C_3$  passe par le point d'intersection de  $(EC)$  et  $(O_2O_3)$  que nous noterons  $X_{23}$ .

Je voudrais maintenant démontré que la droite  $(X_{12}X_{23})$  est la tangente commune aux trois cercles.

En composant les deux homothéties qui transforment  $C_1$  en  $C_2$  puis  $C_2$  en  $C_3$  on obtient soit une translation lorsque le produit des rapports vaut 1 (c'est le cas où  $E$  se trouve au milieu de  $[AD]$ ) soit une homothétie dont le centre appartient à  $(X_{12}X_{23})$  (la droite des deux centres des homothéties). Cette homothétie transforme  $A_1$  en  $A_3$ ; donc la droite  $(X_{12}X_{23})$  est la tangente commune aux trois cercles.

### 9.3.4 Lieux

Supposons que  $E$  se déplace sur  $(AD)$ . Dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$   $|y_E| = d_E$ .

$O_1$  a pour coordonnées :  $(|r_1|, r_1)$ .

Donc le lieu est porté par les deux demies droites bissectrices des secteurs angulaires premier et quatrième quadrant.

Par ailleurs, lorsque  $y_E$  tend vers  $+\infty$ ,  $r_1 = \frac{y_E}{1+y_E+\sqrt{1+y_E^2}}$  tend vers  $\frac{1}{2}$ .

et lorsque  $y_E$  tend vers  $-\infty$ ,  $r_1 = \frac{-y_E}{1-y_E+\sqrt{1+y_E^2}}$  tend aussi vers  $\frac{1}{2}$ .

Finalement, le lieu de  $O_1$  est la réunion des deux segments portés par les bissectrices du premier et quatrième quadrant et limités par les deux points de coordonnées  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

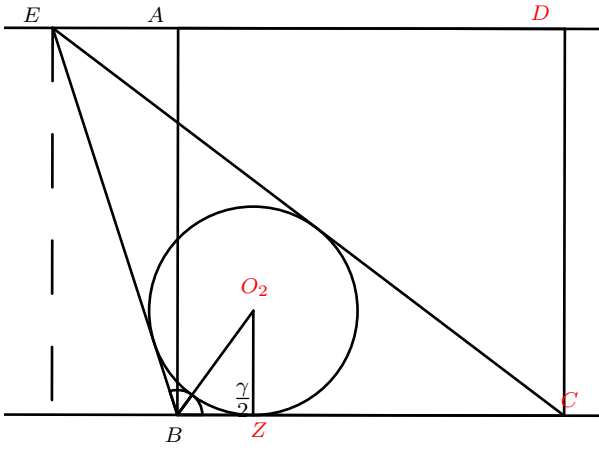
Par symétrie on trouve le lieu de  $O_3$ .

La question du lieu de  $O_2$  est plus délicate. Il s'agit de déterminer dans un premier temps les coordonnées de  $O_2$  dans un repère. Il paraît opportun d'utiliser le repère  $(B, \vec{BC}, \vec{BA})$  dans lequel l'ordonnée de  $O_2$  vaut  $r_2$ . Quelle est son abscisse ?

J'appelle  $\gamma$  l'angle  $\widehat{EBC}$ .

Je vais calculer en parallèle l'abscisse de  $O_2$  lorsque  $E$  est à l'extérieur ou à l'intérieur de  $[AD]$ . Je m'appuie sur les résultats trouvées dans le paragraphe 9.3.2 et sur la formule :

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

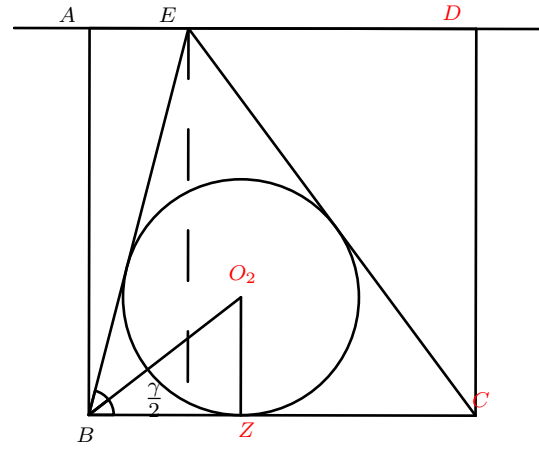


$$\frac{1}{x_E} = \tan(\pi - \gamma) = -\tan \gamma$$

$$\frac{r_2}{x_{O_2}} = \tan \frac{\gamma}{2}$$

$$x_{O_2} = \frac{1}{\sqrt{1+d_E^2} + 1 + \sqrt{1+(1+d_E)^2}} \times \frac{\frac{\sqrt{1+d_E^2}-d_E}{\sqrt{1+d_E^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+d_E^2}}}$$

$$x_{O_2} = \frac{\sqrt{1+d_E^2}-d_E}{1 + \sqrt{1+d_E^2} + \sqrt{1+(1+d_E)^2}}$$



$$\frac{1}{x_E} = \tan \gamma$$

$$\frac{r_2}{x_{O_2}} = \tan \frac{\gamma}{2}$$

$$x_{O_2} = \frac{1}{\sqrt{1+d_E^2} + 1 + \sqrt{1+(1-d_E)^2}} \times \frac{\frac{\sqrt{1+d_E^2}+d_E}{\sqrt{1+d_E^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+d_E^2}}}$$

$$x_{O_2} = \frac{\sqrt{1+d_E^2}+d_E}{1 + \sqrt{1+d_E^2} + \sqrt{1+(1-d_E)^2}}$$

On a donc la définition du lieu sous la forme d'une courbe paramétrée :

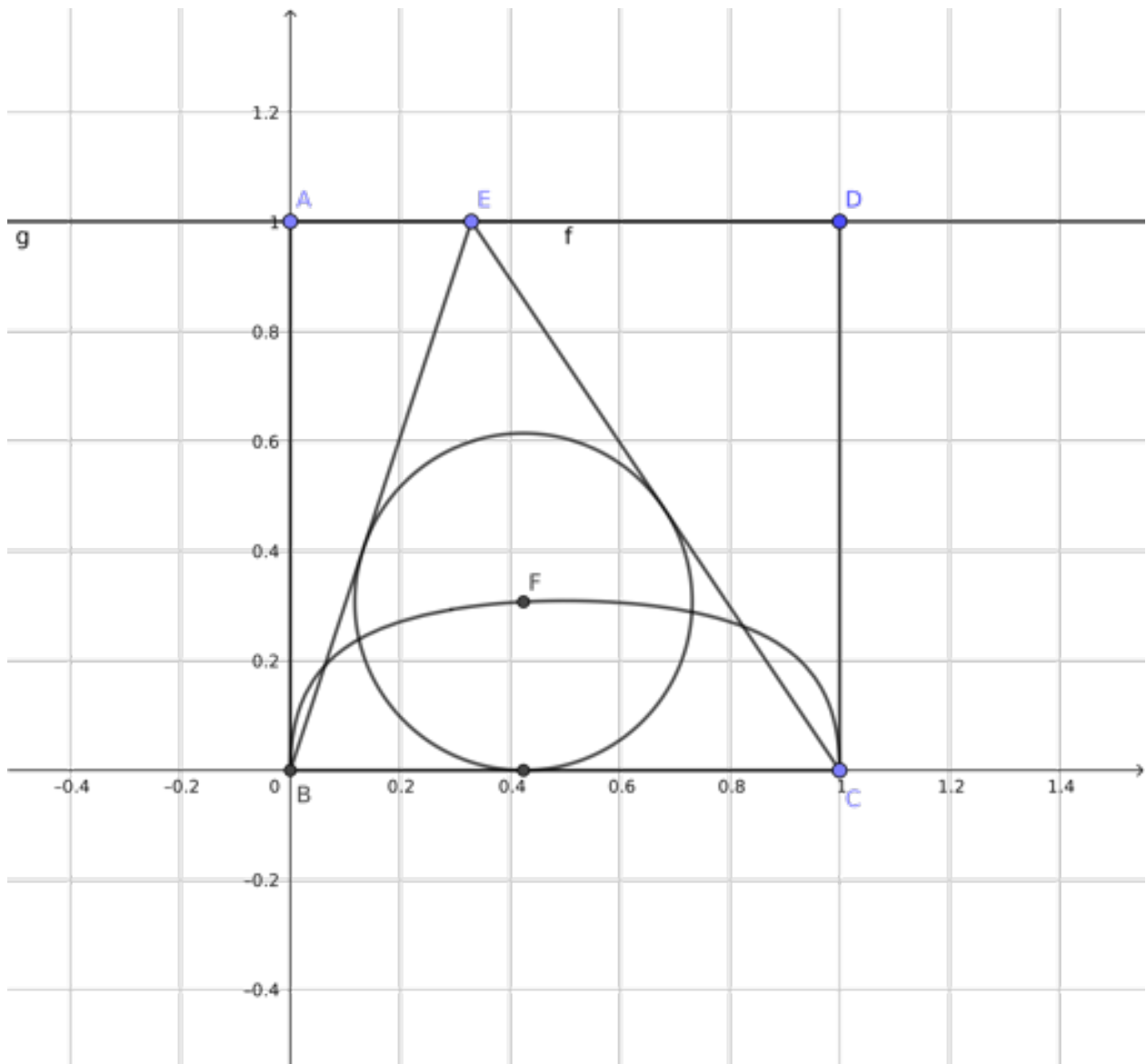
$$\begin{cases} x_{O_2} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{1+\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+(1-t)^2}} & 0 \leq t < +\infty \\ x_{O_2} = \frac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+(1+t)^2}} & -\infty < t < 0 \\ y_{O_2} = \frac{1}{1+\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+(1-t)^2}} & 0 \leq t < +\infty \\ y_{O_2} = \frac{1}{1+\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+(1+t)^2}} & -\infty < t < 0 \end{cases}$$

Ce qui donne la représentation de la figure 9.5

### 9.3.5 Aires

L'aire du triangle  $O_1O_2O_3$  peut être représenté comme sur la figure 9.6. Le calcul est un peu fastidieux et peu intéressant. La seule chose intéressante est le fait qu'on peut penser que l'aire du triangle est constante lorsque  $E$  est en dehors de  $[AD]$  alors qu'il varie légèrement.



FIGURE 9.5 – Lieu du point  $O_2$ 

## 9.4 Prolongement

On peut maintenant construire un point  $F$  sur  $[BC]$  (Resp. sur  $(BC)$ ); les cercles sont encore inscrits. Y'a-t-il des positions de  $E$  et  $F$  de telle sorte que le quadrilatère des centres des cercles circonscrits soient un rectangle ? un parallélogramme ? un carré ?

## 9.5 Le travail des élèves

Une des difficultés du travail collaboratif provient du fait que les classes les plus fécondes et rapides publient très vite tous les résultats faciles et que, de ce fait, les autres classes se sentent frustrés et n'envoient pas des réponses déjà publiées. C'est pourquoi, cette année, j'ai attendu d'avoir un certain nombre de réponses avant de les publier sur le site. J'ai également commenté et posé de petites questions pour relancer les recherches comme on peut le voir sur la figure 9.8 où mes commentaires apparaissent en rouge. Ainsi toutes les classes ont pu participer aux

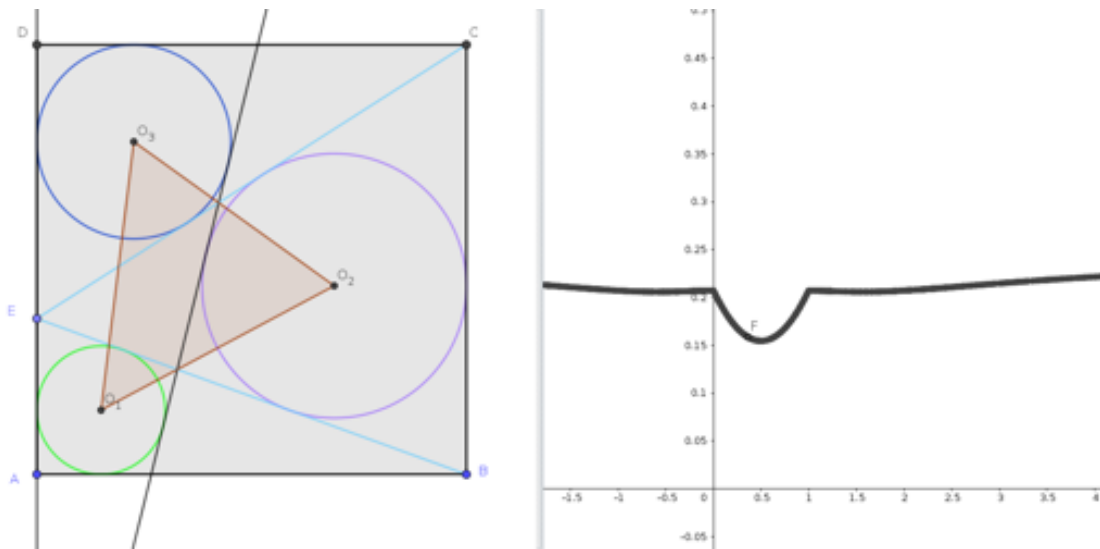


FIGURE 9.6 – Evolution de l’aire de  $O_1O_2O_3$  en fonction de la position de  $E$

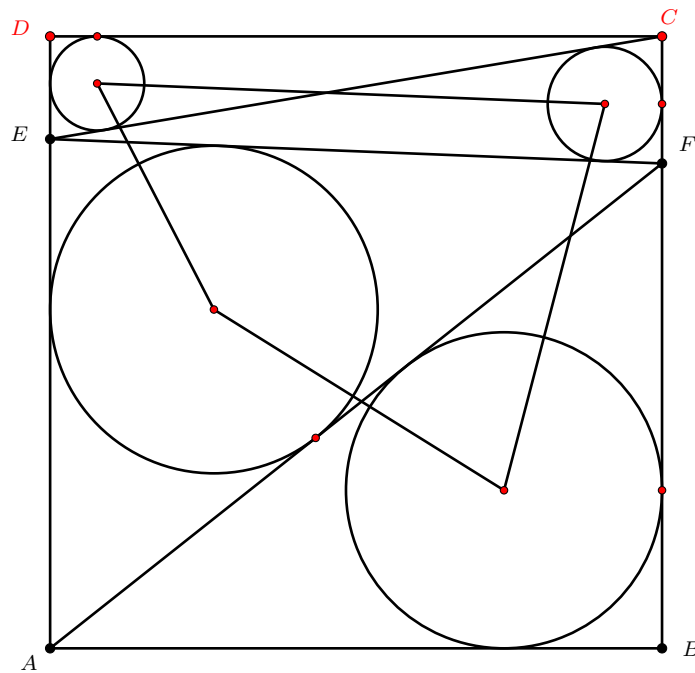


FIGURE 9.7 – Avec un point  $F$  sur  $[BC]$

recherches en proposant parfois des « petits » résultats mais qui avaient l’avantage de montrer l’implication de ces classes. Mais aussi, les réponses à mes commentaires ne tardèrent pas à augmenter la compréhension de la figure géométrique et à aller toujours plus avant dans les démonstrations ou les conjectures. C’est ainsi un véritable dialogue mathématique qui s’est instauré (voir Figure 9.9). De très nombreuses conjectures et de très beaux résultats sont sortis de cette recherche du problème ouvert et les photos ou vidéos envoyées par les classes témoignent encore une fois de l’engouement et du travail réalisé en classe et en dehors de la classe. Les tableaux noirs bien remplis témoignent des essais engagés et des résultats que les élèves ont explorés (Figure 9.10).



## Un point sur les recherches à la mi-février : les nouveaux défis

**Il est temps de faire un point sur la recherche du problème ouvert 2019.**

[Voir l'ensemble des réponses proposées jusqu'au 16 février 2019](#)

D'après vos recherches, il se dégage deux grandes directions de recherche :

### Les trois cercles, leurs centres, leurs aires

1. Le disque de centre O2 est le plus grand quand E est entre A et D.
2. Le disque de centre O1 est le plus grand quand E est au dessus de D
3. Le disque de centre O3 est le plus grand quand E est en dessous de A.
4. Les 3 disques ne sont jamais égaux.
5. Le triangle O1O2O3 ne peut pas être équilatéral.
6. Le triangle O1O2O3 peut-il être rectangle ?
7. L'aire du triangle O1O2O3 est-elle constante ? Si non, quelle est l'aire minimale et l'aire maximale ?
8. Même question avec le périmètre.
9. Quelle est l'aire maximale de chaque disque ?
10. Où placer E pour que l'aire du triangle O1O2O3 soit égale à l'aire d'un des 3 disques. Existe-t-il plusieurs solutions ?
11. ...

**Enfin, est-ce qu'il est possible de trouver les aires des trois disques en fonction de la position de E sur (AD) ?**

**Juste une petite indication : le rayon r du cercle inscrit d'un triangle d'aire A et de périmètre P est :  $r = \frac{2A}{P}$ . Saurez vous le démontrer ? Comment vous servir de ce résultat pour répondre à la première question ?**

### La droite "noire"

On note (T) la droite qui semble tangente aux trois cercles.

1. On se place dans un repère orthonormal tel que A(0;0) et D(1;0). On suppose que E est sur (AD) et que E a pour abscisse e.

FIGURE 9.8 – Le site du rallye et les commentaires

7. Lorsque E est le milieu de [AD], l'aire du triangle CEB est égale à la somme des aires des triangles AEB et DEC.

**Et si E n'est pas le milieu de [AD] ?**

La classe de 2nde 8 du lycée Claude Lebois apporte une preuve générale :

Nous avons prouvé que quel que soit la position du point E sur la droite AD, l'aire du triangle BCE est toujours égale à 0.5. En effet:  
 $Aire(BCE) = BC \cdot OE / 2 = 1 \cdot 1 / 2 = 0.5$

Cette démonstration a également été trouvée par la Seconde 4 du lycée Bichat de Nantua

Un résultat supplémentaire :

Nous avons ensuite prouvé que quel que soit la position du point E sous le carré, la différence entre l'aire du triangle CDE et l'aire du triangle ABE est toujours égale à 0.5.

En effet :

FIGURE 9.9 – Une correspondance mathématique entre les classes

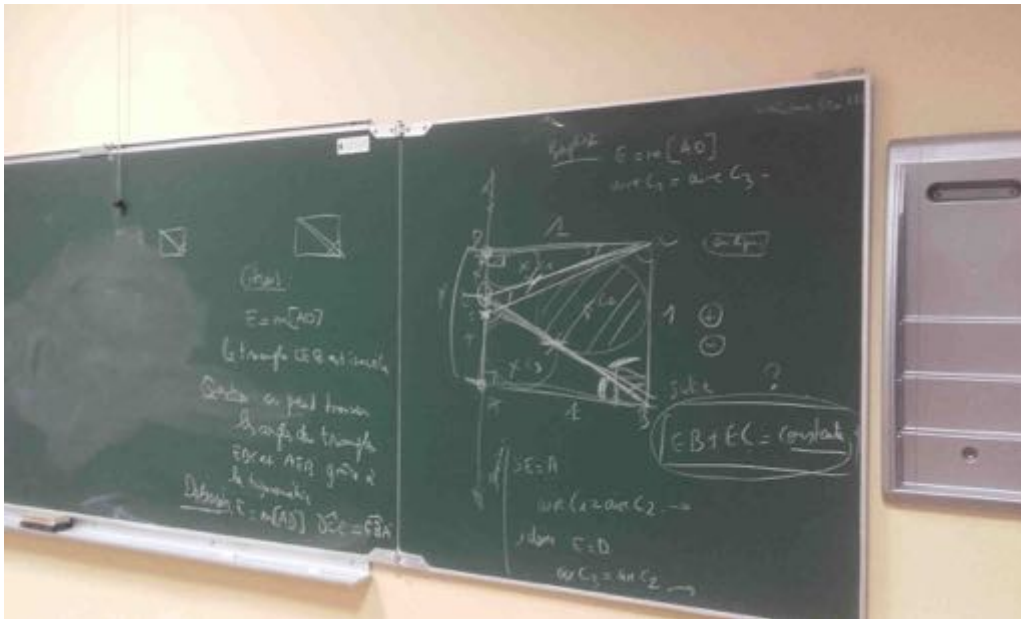


FIGURE 9.10 – Un tableau pendant les recherches

## 9.6 Utiliser le problème en classe

Il n'est bien sûr pas question de montrer comment utiliser un problème de géométrie dans le cours de la classe de mathématiques! En revanche, ce qui est peut-être plus intéressant à développer est l'idée initiale de ce problème ouvert : laisser les élèves se poser des questions à partir d'une situation mathématique.

Les arguments qui supportent cette idée peuvent être trouvés dans le mouvement de pensée du *problem posing* initié par Paulo [Freire, 2000]; laissons le présenter la philosophie du *problem posing* :

La méthode de *problem posing* ne dichotomise pas l'activité du professeur-élève : elle n'est pas « cognitive » à un moment donné et « narrative » à un autre. Elle est toujours « cognitive », qu'il s'agisse de préparer un projet ou d'engager un dialogue avec les élèves. Il ne considère pas les objets cognitifs comme sa propriété privée, mais comme l'objet de réflexion de lui-même et des élèves. De cette façon, l'éducateur qui pose des problèmes reformule constamment ses réflexions dans la réflexion des élèves. Les élèves - qui ne sont plus des auditeurs dociles - sont désormais des co-enquêteurs critiques en dialogue avec l'enseignant. L'enseignant présente le matériel aux élèves<sup>2</sup> pour qu'ils l'examinent, et reconsidère ses considérations antérieures à mesure que les élèves expriment les leurs. Le rôle de l'éducateur qui pose des problèmes est de créer, avec les élèves, les conditions dans lesquelles la connaissance au niveau de la *doxa* est remplacée par la vraie connaissance, au niveau des *logos*, alors que l'éducation bancaire anesthésie et inhibe le pouvoir créatif, l'éducation de poser des problèmes implique un dévoilement constant de la réalité. La première tente de maintenir la submersion de la conscience ; cette dernière s'efforce de faire émerger la conscience et l'intervention critique dans la réalité. (pages 80-81)

En mathématiques, ce courant de pensée est complémentaire du courant de « problem solving » et a été largement étudié, par exemple dans [Singer *et al.*, 2015]. Donnons à ce propos des situations proposées dans ce livre :

2. Traduit par nous

### 9.6.1 À l'école primaire ou au collège

Rufus a réussi à entrer dans la maison des Bradley l'après-midi. Il a mâché quatre des chaussures d'Amy, trois de ses jouets et six de sa chaussette. Il a également mâché cinq des chaussures de Brad, sept de ses jouets et deux de ses chaussettes. Mme Smith a fait cuire deux douzaines de biscuits. Rufus s'est enfui avec douze biscuits. Il en a enterré huit avant que Mme Smith ne le découvre.

Anne a 34 billes, Billy en a 27 et Chris 23. Ecris et résouds autant de problèmes que tu peux qui utilisent ces informations.

### 9.6.2 Au collège ou au lycée

On a ces règles de calculs :

1.  $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2.  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3.  $(a^n)^m = a^{nm}$
4.  $a^0 = 1$
5.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ecrire des problèmes utilisant :

- les règles 1 et 2
- les règles 1 et 3
- les règles 1 et 4
- les règles 1, 2 et 5
- les règles 2 et 4
- les règles 1, 2 et 3

			1		
			3	5	
		7	9	11	
	13	15	17	19	
21	23	25	27	29	

et ainsi de suite. Je veux me servir de cette base pour interroger mes élèves de lycée ; Aidez moi à écrire ces problèmes.

Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \ln x - e^{-x}$ . Quelles questions peuvent se poser à partir de cette fonction ?

(Ici, on peut bien sûr choisir pour  $f$  une fonction particulière en fonction de ce que l'on souhaiterait voir travailler !)

D'une façon générale, laisser les élèves poser des problèmes développe des compétences de créativité mais aussi de renforcement des connaissances mathématiques mais il peut aussi changer le point de vue des élèves vis-à-vis des mathématiques elles-mêmes en offrant un moyen de connecter les mathématiques aux intérêts propres des élèves. Il s'agit ainsi d'une fenêtre à travers laquelle on peut apercevoir la pensée des élèves en explorant à la fois leurs connaissances et leur créativité.



# Chapitre 10

## Un billard fermé

Les problèmes de billard sont célèbres en mathématiques. On peut les définir comme un système dynamique dans lequel une particule « rebondit » sur les bords d'une surface. Ainsi le billard mathématique est la donnée d'une table  $T$  qui peut ne pas être rectangulaire et d'une boule qui se déplace, sans frottement, et rebondit sur les bords suivant la loi de la réflexion, c'est à dire, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion (Voir la figure 10.1). La question qui se pose est de déterminer la trajectoire de la boule, considérée comme un point, en supposant qu'une fois lancée, elle continue son chemin indéfiniment. On peut par exemple se poser la question de savoir si, un point du billard étant donné, la boule passera par ce point. L'exemple du billard rectangulaire montre que la réponse n'est pas si simple !

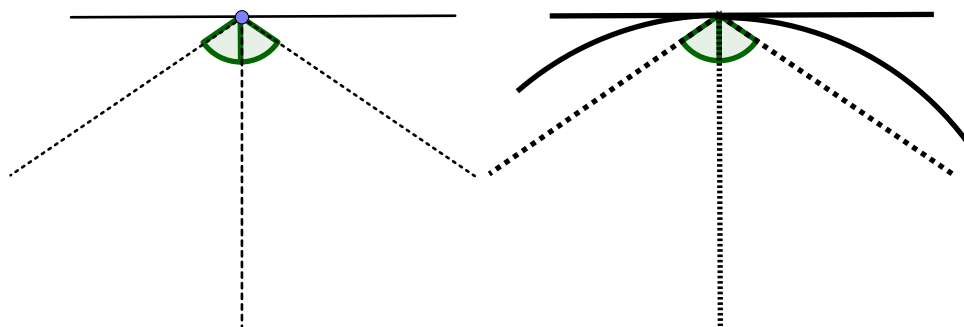


FIGURE 10.1 – Des rebonds sur des billards...

La question se pose de savoir si cette trajectoire se ferme, et d'une façon plus générale, quelles conditions initiales doivent être remplies pour qu'une trajectoire se ferme.

En « dépliant » le rectangle (dont on suppose qu'il a pour mesure  $a \times b$ , (ici  $10 \times 5$ ) c'est à dire en le reproduisant à l'infini dans le plan, il faudrait que la droite définie par le point d'origine (sur la figure 10.8, le point de coordonnées (1,3)) et la pente de la trajectoire (ici 2) passe par un point « de départ » dans une des répliques du rectangle. C'est à dire par un point qui serait l'image du point de départ par une translation de vecteur  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

Ainsi si  $(D_1(x_0, y_0))$  est le point de départ,  $p$  la pente de la trajectoire, alors la trajectoire se fermera si et seulement si il existe deux entiers  $h$  et  $k$  tels que  $y_0 + hb = p(x_0 + ka - x_0) + y_0$  soit encore si et seulement si :

$$p = \frac{hb}{ka}$$

Ainsi, dans notre exemple, la trajectoire se fermera puisque :

$$\begin{aligned} D_1(1, 3) \\ p = 2 \end{aligned}$$

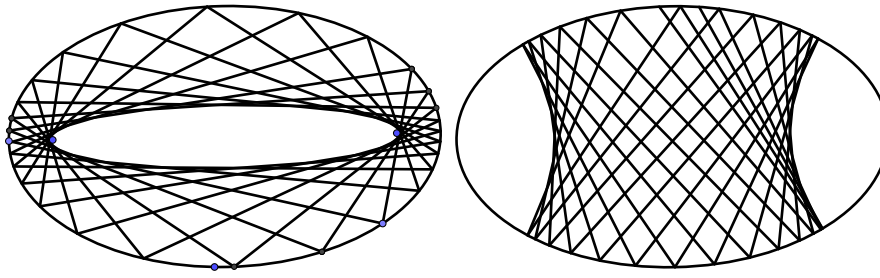


FIGURE 10.2 – Des trajectoires dans un billard elliptique

trajectoire : droite d'équation  $y = 2x + 1$

$3 + 10h = 2(1 + 5k) + 1$  soit  $h = k$ ; si  $h = k = 0$  c'est le point  $D_1$ , si  $h = k = 1$ , c'est le point  $D_2(11, 23)$ .

Remarque : si la pente n'est pas le produit de  $\frac{b}{a}$  par un nombre rationnel, alors la trajectoire ne se terminera pas et sera dense dans le rectangle. C'est le cas si on choisit, par exemple une pente égale à  $\sqrt{2}$ .

On peut aussi jouer avec d'autres tables, comme par exemple le billard elliptique de la figure 10.2

Avec un billard elliptique, les expériences montrent qu'il y a toujours une zone de l'ellipse qui n'est pas atteinte. On peut constater que lorsque le premier segment de la trajectoire ne traverse pas le grand axe de l'ellipse (segment reliant les foyers) alors elle ne le traverse plus jamais. Et que si ce premier segment traverse le grand axe, alors tous les autres segments le traverseront. Voir à ce propos une étude plus complète sur le site DREAM<sup>1</sup>.

Mais aussi, pour des classes de collège ou de lycée, on peut partir de cette idée pour proposer des problèmes dont le domaine visé sera plutôt l'arithmétique. C'est le cas de cette situation, largement étudiée par l'équipe DREAM<sup>2</sup> :

On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c'est-à-dire qu'il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).

Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d'envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage.

Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s'il arrive sur un des 4 sommets.

Existe-t-il un moyen de déterminer à l'avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction de ses dimensions ?

Encore une fois, une présentation complète peut être téléchargée sur le site de l'équipe<sup>3</sup>.

Mais c'est encore un autre problème qui a été le dixième problème ouvert du rallye mathématique de l'Académie de Lyon. Cette fois, on ne s'intéresse qu'à un circuit fermé de la boule de billard, mais dans des billards de formes différentes !

1. <https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/3764233>

2. <http://dreamaths.univ-lyon1.fr>

3. [https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap\\_website/1324/32045](https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/1324/32045)



## 10.1 Énoncé

Dans une pièce polygonale obscure, j'utilise un pointeur laser qui se reflète sur les murs de telle sorte que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion. Autrement dit, si le rayon arrive sur le mur avec un angle de  $\alpha$  degré, il en repart avec le même angle comme indiqué sur la figure 10.3.

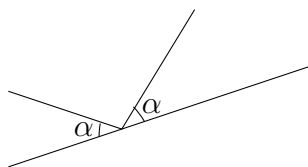


FIGURE 10.3 – Reffet du laser sur le mur

Dans un premier temps, nous considérerons que les polygones sont réguliers. Ainsi, le triangle sera équilatéral, le quadrilatère, un carré, le pentagone, un pentagone régulier, etc.

On suppose d'abord que la pièce est de forme triangulaire ; c'est à dire, comme nous venons de le voir, un triangle équilatéral. On place la source du laser sur un des côtés et on vise un autre côté.

La figure 10.4 montre une trajectoire qui revient à son point de départ (une trajectoire fermée), et une autre qui n'est pas fermée.

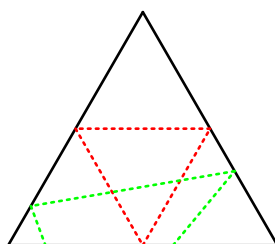


FIGURE 10.4 – Une trajectoire fermée et une trajectoire qui ne l'est pas

**Nous nous intéressons dans ce problème uniquement aux trajectoires fermées, c'est-à-dire aux trajectoires qui partent d'un point d'un côté, qui rebondissent sur tous les autres côtés, et qui reviennent à leur point de départ.**

### Des questions que l'on peut se poser

Existe-t-il d'autres trajectoires fermées dans le triangle équilatéral ? Si non, pourquoi n'y en a-t-il pas d'autres que celle montrée sur la figure 10.4 et qui joint les milieux des côtés du triangle ? Si oui, construisez en une autre ! A quelle(s) condition(s) un trajet de lumière sera fermé ?

Mais en fait, ces questions peuvent se poser de la même manière si la pièce est un carré (un quadrilatère régulier), ou un pentagone régulier, ou un hexagone régulier, ou ... et d'une façon générale dans un polygone régulier à  $n$  côtés.

Et si maintenant, les polygones n'étaient pas réguliers ?

Explorez ce problème, répondez aux questions, proposez des conjectures, des démonstrations, des constructions, posez vous (et posez nous) d'autres question, bref, faites des mathématiques !

## 10.2 Un peu de mathématiques

### 10.3 Dans le triangle

Une idée est de « dupliquer » le triangle pour rendre le trajet de lumière linéaire comme indiqué sur la figure 10.5. Une condition nécessaire et suffisante pour que la trajectoire se ferme est que la distance  $B'D'$  soit égale à la distance  $BD$ .

On peut remarquer que le rayon va rebondir sur les trois côtés si et seulement si la demi-droite  $[DR_1)$  coupe le côté  $[A'B']$ . Et par conséquent, quelque soit la position du point de départ, il existe une trajectoire fermée et une seule.

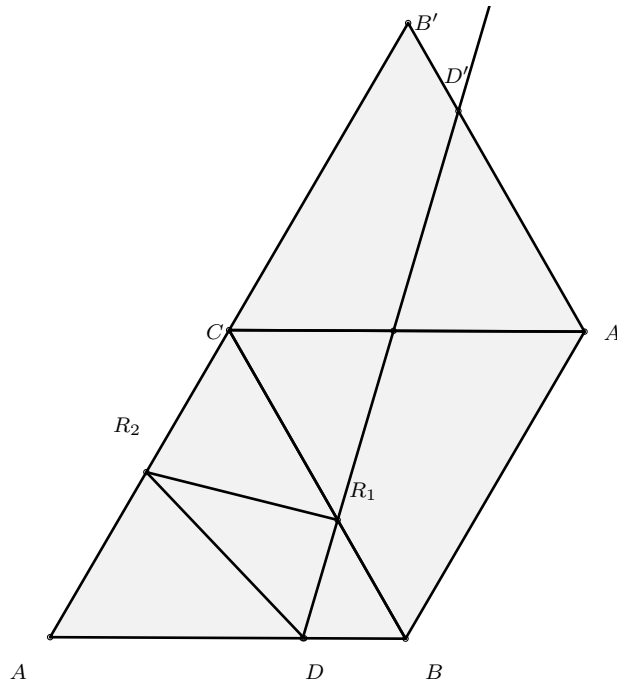


FIGURE 10.5 – Une trajectoire fermée

### 10.4 Dans le carré

On peut utiliser une stratégie identique (voir figure 10.6) qui amène à un même résultat : quelque soit le point D de départ, il existe un point  $R_1$  sur  $[BC]$  tel que la trajectoire se ferme. On peut se poser la question de savoir si le premier rebond se fait sur le côté  $[DC]$ , existe-t'il une trajectoire fermée? Il faudrait pour se faire que la trajectoire après avoir atteint le côté  $[CD]$  atteigne  $[BC]$  (resp.  $[DA]$ ), puis  $[DA]$  (resp.  $[BC]$ ). Supposons que l'angle aigu de départ avec le côté soit  $\alpha_0$ . On peut supposer aussi sans perdre d'information que le rebond se fera sur  $[CD]$ , puis  $[BC]$ . On a :

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

Comme les angles sont alternes internes, le rebond sur le côté  $[CD]$  se fait aussi suivant un angle  $\alpha_0$  (Voir figure 10.7). donc la lumière arrive sur le côté  $[BC]$  sous un angle de  $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$ . Mais alors, le trajet repart sous le même angle qui est alors compris entre 0 et  $\frac{\pi}{4}$  ; ce qui suffit pour montrer qu'il ne pourra pas atteindre le côté  $[DA]$ .

Ainsi, il n'y a pas de trajectoire fermée si le premier rebond se fait sur le côté opposé au côté de départ.

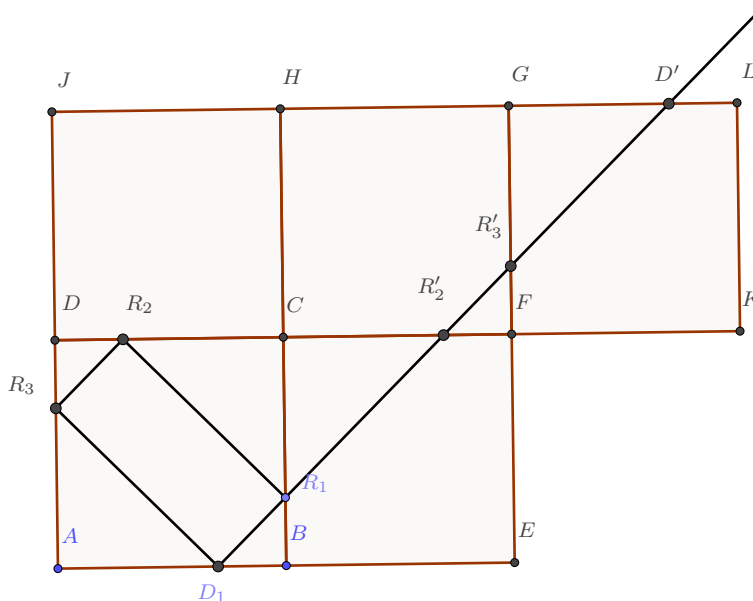


FIGURE 10.6 – Une trajectoire fermée dans le carré

## 10.5 Dans le pentagone régulier

On peut, là encore utiliser le dépliage du pentagone pour démontrer que, étant donné un point  $L$  de départ sur un côté, il existe toujours un point  $M$  sur un côté adjacent tel que le trajet de lumière suivra  $[MN]$  et se fermera. Il suffit pour le construire de considérer le point  $W$  du pentagone  $IRSTU$  tel que  $SW = LB$ . La figure 10.8 montre un tel trajet de lumière.

### 10.5.1 Une remarque générale sur les angles

Supposons un polygone régulier à  $n$  côtés. L'angle au centre mesure  $\frac{2\pi}{n}$  et l'angle de deux côtés consécutifs mesure  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ . Je considère les angles d'incidence et de réflexion d'un trajet fermé,

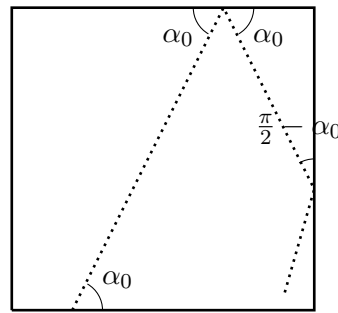


FIGURE 10.7 – Rebond sur le côté opposé

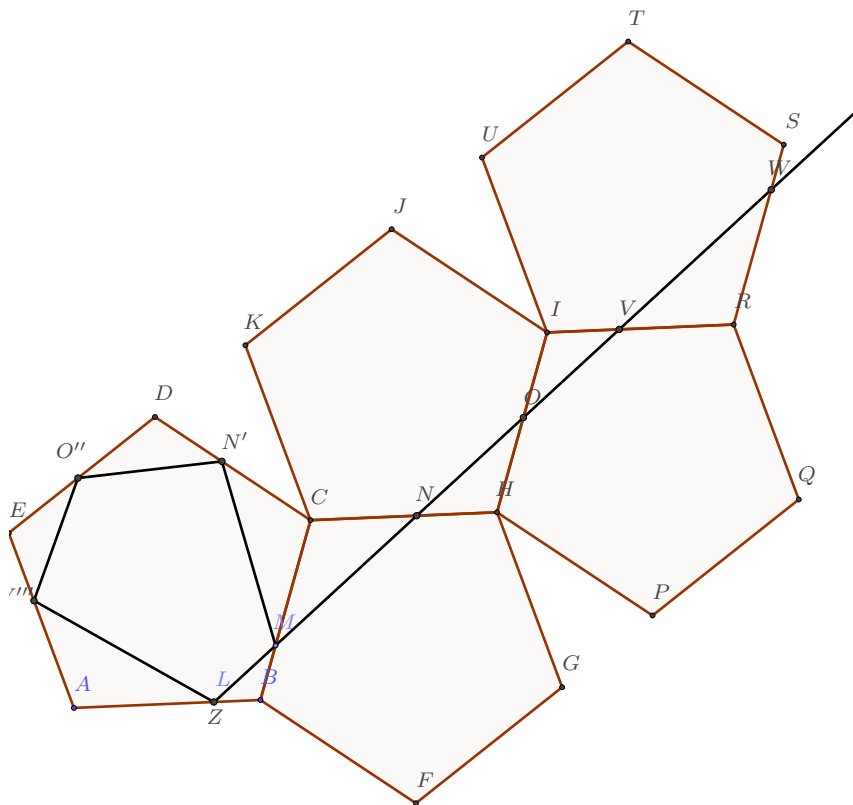


FIGURE 10.8 – Un chemin fermé dans le pentagone

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2\pi}{n} \\ \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{2\pi}{n} \\ \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{2\pi}{n} \\ \dots \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = \frac{2\pi}{n} \end{array} \right.$$

Il en résulte que si  $n$  est impair :

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = \alpha \text{ et } \alpha_2 = \alpha_4 = \dots = \alpha_{n-1} = \frac{2\pi}{n} - \alpha$$

Le dernier triangle a donc comme angle à la base  $\alpha$ ,  $\frac{(n-2)\pi}{n}$  et  $\frac{2\pi}{n} - \alpha$ .

Si  $n$  est pair :

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-1} = \alpha \text{ et } \alpha_2 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = \frac{2\pi}{n} - \alpha$$

Le dernier triangle a donc comme angle à la base  $\frac{2\pi}{n} - \alpha$ ,  $\frac{(n-2)\pi}{n}$  et  $\alpha$ .

Dans un polygone convexe à  $n$  côtés, la somme des angles intérieurs vaut  $(n - 2)\pi$ .

En résumé :

	Cas général : polygone à $n$ côtés	Exemple du Pentagone	Exemple de l'Hexagone
Somme des angles intérieurs	$(n - 2)\pi$	$3\pi$	$4\pi$
Angle au centre	$\frac{2\pi}{n}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$
Angle intérieur	$\frac{(n - 2)\pi}{n}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$

Supposons donc que l'angle initial de la trajectoire avec le côté soit  $\alpha$  et que la trajectoire se ferme en rebondissant sur les côtés successifs du polygone. Les calculs précédents montrent que les rebonds se font selon deux angles alternativement :  $\alpha$  et  $\frac{2\pi}{n} - \alpha$ .

Mesurons alors les angles intérieurs du polygone trajectoire :

Si l'angle d'incidence vaut  $\alpha$ , l'angle de réflexion aussi et l'angle entre deux côtés successifs de la trajectoire mesure  $\pi - 2\alpha$ . Si l'angle d'incidence vaut  $\frac{2\pi}{n} - \alpha$ , l'angle de réflexion aussi et l'angle entre deux côtés successifs de la trajectoire mesure  $\pi - 2\left(\frac{2\pi}{n} - \alpha\right) = \frac{(n-4)\pi}{n} - 2\alpha$ .

Il faut considérer le dernier sommet : la trajectoire se ferme, donc pour obtenir la mesure du dernier angle, on considère le triangle dont le côté rejoint le point de départ.

Si  $n = 2k + 1$  est impair, le dernier rebond est impair et se fait donc selon l'angle  $\alpha$ . et si  $n = 2k$  est pair le dernier rebond se fait selon l'angle  $\frac{2\pi}{n} - \alpha$  (Figure 10.9). Il est intéressant de noter que la trajectoire se ferme et continuerait suivant le même trajet lorsque le polygone a un nombre pair de côtés, en revanche, la trajectoire continue suivant le même trajet dans un polygone ayant un nombre impair de côtés si et seulement si  $\alpha = \frac{2\pi}{n} - \alpha$  c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ . Dans ce cas, chacun des triangles de sommets les sommets du polygone régulier sont isocèles, ce qui signifie que les points de rebonds se situent aux centres des côtés du polygone.

Supposons maintenant que le polygone régulier possède  $n$  côtés de longueur 1 et que le point de départ se trouve à une distance  $a_1$  de l'origine du premier côté. Autrement dit, dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AY})$  orthonormé, le point de départ a comme coordonnées  $(a_1, 0)$ . On suppose que la trajectoire part de ce point avec un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontal.

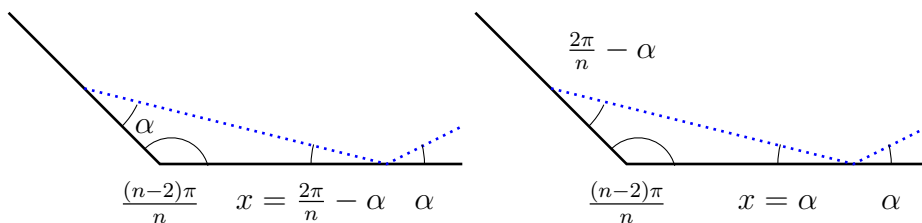


FIGURE 10.9 – Le dernier triangle du polygone trajectoire ; cas impair, cas pair

On cherche  $a_2$  qui est la distance d  $B$  au deuxième rebond. Un peu de trigonométrie du triangle rectangle nous amène à :

$$a_2 = (1 - a_1) \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1}$$

en posant  $\alpha_1 = \frac{2\pi}{n} - \alpha$ .

En continuant les calculs on obtient :

$$a_3 = (1 - a_2) \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha}$$

et d'une façon générale :

$$\begin{cases} a_{2p} = (1 - a_{2p-1}) \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} \\ a_{2p+1} = (1 - a_{2p}) \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} \end{cases}$$

En résolvant cette récurrence, on obtient :

$$\begin{cases} a_{2p} = (p - a_1) \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} - p + 1 \\ a_{2p+1} = p \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} - p + a_1 \end{cases}$$

Si  $n = 2k + 1$  est impair alors la relation existante entre  $a_1$  et  $\alpha$  se trouve en écrivant que  $a_{2k+2} = a_1$  ce qui donne :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} = \frac{a_1 + k}{k + 1 - a_1}$$

Si  $n = 2k$  est pair, il s'agit alors d'écrire que  $a_{2k+1} = a_1$  ce qui conduit à la relation :

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha$$

Ce qui montre que la direction est fixe quelque soit le point de départ et fait un angle de  $\frac{\pi}{n}$

### 10.5.2 Un peu de géométrie analytique

Considérons une droite  $d$  d'équation  $ux + vy + w = 0$  (qui représentera la direction du trajet de lumière) qui coupe une droite  $c$  d'équation  $ax + by + c = 0$  (qui représentera le mur de la pièce). Soit  $I(x_0, y_0)$  le point d'intersection de ces deux droites.

On en déduit que  $w = -ux_0 - vy_0$  et que  $c = -ax_0 - by_0$ .

La droite perpendiculaire à  $c$  passant par  $I$  ( $p$ ) a pour équation :

$$p : -bx + ay + bx_0 - ay_0 = 0$$

La droite symétrique de  $d$  par rapport à  $p$ , c'est-à-dire la droite qui porte le rebond, a alors pour équation :

$$u \left( x + 2b \frac{-b(x - x_0) + a(y - y_0)}{a^2 + b^2} \right) + v \left( y - 2a \frac{-b(x - x_0) + a(y - y_0)}{a^2 + b^2} \right) - ux_0 - vy_0 = 0$$

Par exemple, dans le carré, on considère le repère orthonormé  $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ . Choisissons un point de départ  $D_1$  de coordonnées  $(d_1, 0)$  et faisons rebondir le trajet de lumière en un point  $R_1$  du côté  $[BC]$  de coordonnée  $(1, r_1)$ .

La question est de donner une condition sur  $r_1$  pour que le trajet revienne au point  $D_1$ .

Premier rebond

La droite  $d = (D_1R_1)$  a pour équation :

$$-r_1x + (1 - d_1)y + r_1d_1 = 0$$

La droite  $c = (BC)$  a pour équation :

$$y = 1$$

La droite qui porte le premier rebond a donc comme équation :

$$r_1x + (1 - d_1)y - 2r_1 + r_1d_1 = 0$$

Cette droite coupe la droite  $(CD)$  en un point  $R_2$  de coordonnées  $\left( \frac{2r_1 + d_1(1 - r_1) - 1}{r_1}, 1 \right)$ .

Deuxième rebond

La droite  $d = (R_1R_2)$  a donc comme équation :

$$r_1x + (1 - d_1)y - 2r_1 + r_1d_1 = 0$$

La droite  $c = (CD)$  a pour équation :  $y = 1$ .

La droite qui porte le deuxième rebond a donc pour équation :

$$-r_1x + (1 - d_1)y + 2d_1 + 2r_1 - r_1d_1 - 2 = 0$$

Elle coupe la droite  $(AD)$  en  $R_3$  de coordonnées  $\left( 0, \frac{-2d_1 - 2r_1 + r_1d_1 + 2}{1 - d_1} \right)$

Troisième rebond

La droite  $d = (R_2R_3)$  a donc pour équation :

$$-r_1x + (1 - d_1)y + 2d_1 + 2r_1 - r_1d_1 - 2 = 0$$

La droite  $c = (AD)$  a pour équation  $x = 0$ .

La droite qui porte le troisième rebond a donc pour équation :

$$-r_1x - (1 - d_1)y - 2d_1 - 2r_1 + r_1d_1 + 2 = 0$$

Elle coupe la droite  $(AB)$  au point  $R_4$  de coordonnées  $\left( \frac{-2d_1 - 2r_1 + r_1d_1 + 2}{r_1}, 0 \right)$ .

Ce point est confondu avec  $D_1$  si et seulement si :

$$r_1 = 1 - d_1$$

En ce qui concerne le triangle équilatéral, on peut également se placer dans un repère orthonormé  $(A, \vec{AB}, \vec{AY})$ . Dans ces conditions, les points ont pour coordonnées (pour des raisons de facilité des calculs on prendra comme point de départ un point du côté  $[AC]$ ) :

$$\begin{cases} A & (0, 0) \\ B & (1, 0) \\ C & \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ D_1 & (d_1, \sqrt{3}d_1) \\ R_1 & (r_1, 0) \end{cases}$$

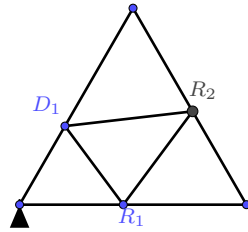


FIGURE 10.10 – Un chemin fermé avec  $d_1 = 0,2$  et  $r_1 = \frac{16}{35}$

Et la droite  $(R_1D_1)$  a pour équation :

$$\sqrt{3}d_1x + (r_1 - d_1)y - \sqrt{3}r_1d_1 = 0$$

La droite qui porte le premier rebond est alors :

$$-\sqrt{3}d_1x + (r_1 - d_1)y + \sqrt{3}r_1d_1 = 0$$

La droite qui porte le second rebond est :

$$\left(-\sqrt{3}d_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_1\right)x - \left(d_1 + \frac{1}{2}r_1\right)y + \frac{\sqrt{3}}{2}(-r_1 + 4d_1 - 2r_1d_1) = 0$$

Cette droite coupe le côté initial en un point d'abscisse :

$$x = \frac{-r_1 + 4d_1 - 2r_1d_1}{4d_1}$$

Et, le trajet est fermé si cette valeur est égale à  $d_1$ . En résolvant l'équation, il vient :

$$r_1 = \frac{4d_1(1 - d_1)}{1 + 2d_1}$$

Par exemple, supposons le point de départ au point de coordonnées  $(0, 2; \sqrt{3} \times 0, 2)$ , le point d'arrivée aura pour abscisse :

$$\frac{-r_1 + 0,8 - 0,4r_1}{0,8}$$

et il suffit de donner à  $r_1$  la valeur  $\frac{16}{35}$  pour que le chemin se ferme, comme illustré sur la figure 10.10.

Une rapide étude montre que la fonction  $x \rightarrow \frac{4x(1-x)}{1+2x}$  prend des valeurs dans  $[0; \approx 0,366]$  lorsque  $x \in [0, 1]$ . Ce qui confirme encore que quelque soit la position de  $D_1$  sur un côté, il existe une et une seule trajectoire fermée.

### Pentagone, hexagone, et géométrie analytique

**Pentagone** Faire les calculs en utilisant la même méthode est assez compliqué. C'est cependant faisable en utilisant un logiciel de calcul formel. Cependant, on peut modifier le raisonnement en considérant le dépliement du polygone et trouver la position du point  $R_1$  pour que point  $R_5$  dans le pentagone ou  $R_6$  dans l'hexagone soit à la distance d'un sommet du polygone égale à celle du point de départ à un sommet du polygone de départ.



Par exemple pour le pentagone (Voir fig.10.8) Le point  $W$  doit être tel que  $SW = BL$ ,  $L$  étant le point de départ du trajet de lumière.

Dans un repère  $(B, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé avec le côté de l'hexagone égal à 1, la droite  $(RS)$  a pour équation :

$$y = \tan \frac{2\pi}{5}(x - 2)$$

Le point  $S$  a pour coordonnées  $(2 + 3 \cos \frac{2\pi}{5}, 3 \sin \frac{2\pi}{5})$

Le trajet se ferme si et seulement si  $SW = BL = d$ , en supposant que  $L$  a pour abscisse  $-d$ .

On a donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} SW^2 &= d^2 \\ y_w &= \tan \frac{2\pi}{5}(x_w - 2) \end{cases}$$

On trouve :

$$x_w = \frac{d(\sqrt{5} + 1) - 7\sqrt{5} - 15}{8}(\sqrt{5} - 3), \quad y_w = \tan \frac{2\pi}{5}(x_w - 2)$$

La pente de la droite  $(LW)$  est donc :

$$\frac{\tan \frac{2\pi}{5}(x_w - 2)}{x_w + d} = \frac{(d - 3)(\sqrt{2(\sqrt{5} + 5)})}{d(\sqrt{5} - 5) - 3\sqrt{5} - 5} = a$$

Donc la droite  $(LW)$  a pour équation  $y = a(x + d)$  et elle coupe le côté  $[BC]$  au point  $R_1$  de coordonnées :

$$R_1 : \left( \frac{-ad}{a - \tan \frac{2\pi}{5}}, \tan \frac{2\pi}{5} \frac{-ad}{a - \tan \frac{2\pi}{5}} \right)$$

Ce qui, tous calculs faits, donne :

$$R_1 : \left( \frac{-d(d - 3)(\sqrt{5} - 1)}{4(d + 2)}, \frac{-d(d - 3)\sqrt{2(\sqrt{5} + 5)}}{4(d + 2)} \right)$$

On peut vérifier, que lorsque  $d = 1/2$  alors  $R_1$  a pour coordonnées

$$\left( \frac{\sqrt{5} - 1}{8}, \frac{\sqrt{2(\sqrt{5} + 5)}}{8} \right)$$

qui sont les coordonnées du milieu du côté  $[BC]$ . **Hexagone** Dans un repère  $(B, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé avec le côté de l'hexagone égal à 1, la droite  $C'K'$  (voir figure 10.11) a pour équation

$$y = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Le trajet se ferme si et seulement si la distance  $AD_1 = A'M_2$ .

Supposons que  $AD_1 = d$ , alors  $D_1$  a comme coordonnées  $(d - 1, 0)$  et  $M_2 : (\frac{3}{2} + 2 + d, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ .

La droite  $(D_1M_2)$  a donc pour pente :

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{7}{2} + d - d + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

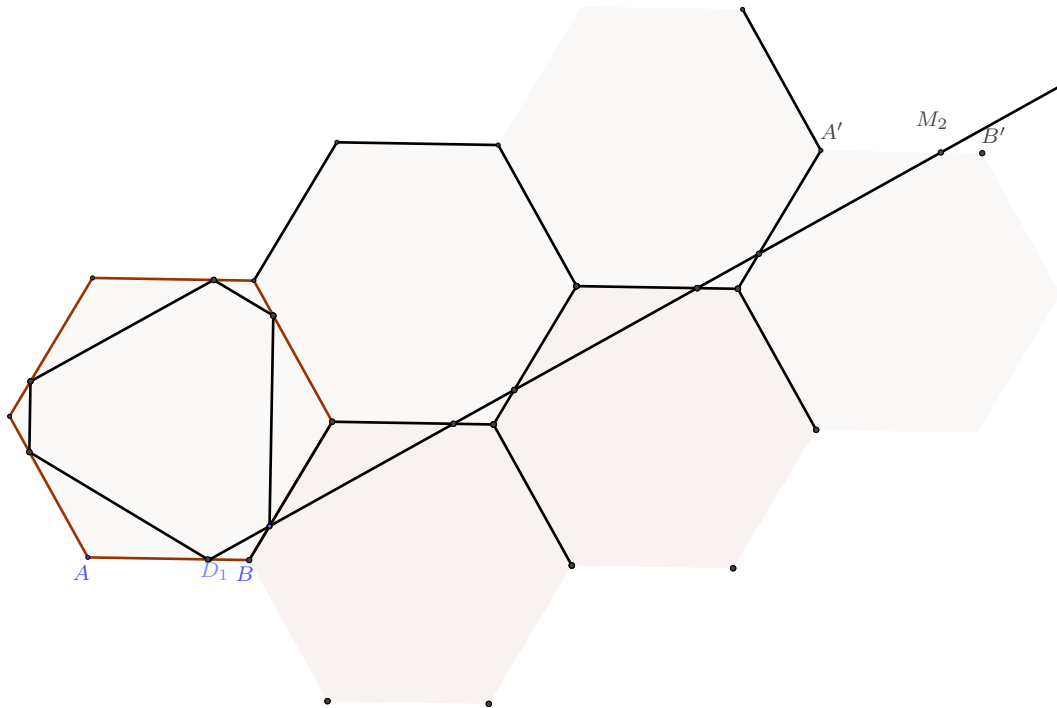


FIGURE 10.11 – Un trajet fermé dans l’hexagone

Résultat : la pente de la droite ne dépend pas de  $d$ , et ce trajet est parallèle à la petite diagonale de l’hexagone ( $[AC]$ ). Les coordonnées de  $R_1$  sont alors les solutions du système d’équation :

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1 - d) \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$

Soit :

$$R_1 : \left( \frac{1 - d}{2}, \sqrt{3} \frac{1 - d}{2} \right)$$

## 10.6 Généralisation

### 10.6.1 Le cas des polygones ayant un nombre pair de côtés

#### Résultats

Remarque : ce résultat dans l’hexagone est aussi vrai dans le carré. Dans ce cas, la pente d’un trajet fermé est 1, quelque soit le point de départ.

**Résultat** : on peut généraliser ce résultat à tout polygone ayant un nombre pair de côtés.

Preuve Si le polygone de départ possède  $2n$  côtés, le « dépliement » impliquera  $2n$  polygones et le point d’arrivée correspondant au dernier rebond sur le côté initial sera porté par un segment parallèle au côté  $[AB]$  (voir démonstration utilisant la composition de transformations en fin

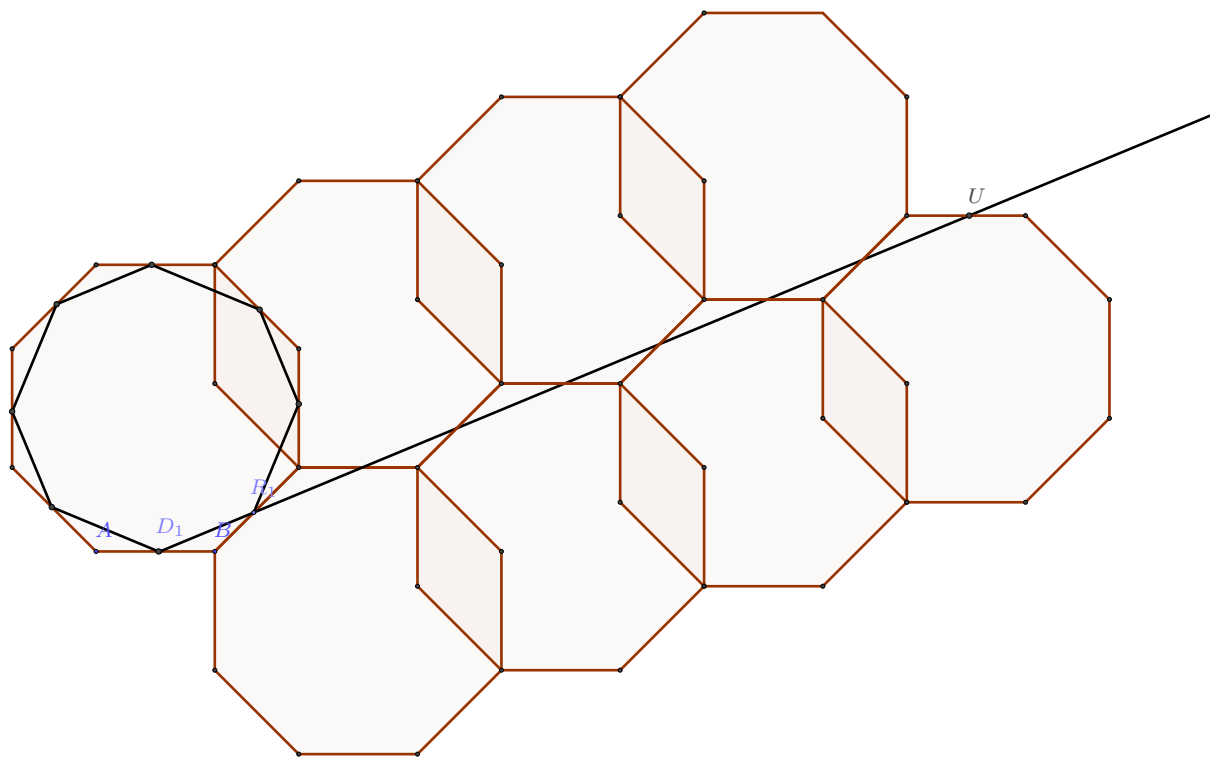


FIGURE 10.12 – Le cas de l’octogone

de paragraphe), comme on le voit, par exemple sur la figure 10.12. La pente de la droite sera alors dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AY})$  orthonormé :

$$\frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{n \cos \frac{\pi}{n} + n + d - d} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} + 1}$$

Qui correspond à la pente de la « petite » diagonale  $[AC]$ .

**En utilisant des transformations** On peut aussi utiliser les transformations du plan pour déterminer la position du segment portant le dernier point (appelé  $R_{n-1}$  en utilisant les mêmes notations : départ  $D_1$  puis points d’intersections avec les côtés successifs,  $R_1 \dots R_{n-1}$ ).

Si  $n$  est pair,  $n = 2k$ , on va utiliser  $n - 1$  symétries dont les axes sont portés par des vecteurs directeurs de deux côtés consécutifs du polygone. Par conséquent, l’angle de ces deux axes vaut  $\frac{n-2}{n}\pi$ . Comme on va composer  $n - 1$  symétries, on peut regrouper ces symétries par 2, et on aura alors  $k - 1$  rotations d’angle  $2 \times \frac{n-2}{n}\pi$  qu’il s’agira alors de composer avec une symétrie dont l’axe sera dirigé par le vecteur  $\vec{BC}$ , c’est à dire faisant un angle de  $\frac{n-2}{n}\pi$  avec  $\vec{BA}$ . Dans ces conditions, la composition des rotations avec la symétrie donnera une symétrie dont l’axe sera dirigé par le vecteur  $\vec{BC}$ . Écrit autrement : Le vecteur  $\vec{AB}$  va être transformé en  $\vec{A'B'}$  tel que :

$$\begin{aligned} S_{\vec{BC}} \circ S_{n-2} \circ \dots \circ S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 \\ = S_{\vec{BC}} \circ r_{\frac{2(n-2)\pi}{n}} \circ \dots \circ r_{\frac{2(n-2)\pi}{n}} \\ S_{\vec{BC}} \circ r_{2(k-1)\frac{2(k-1)\pi}{2k}} = S_{\vec{BC}} \circ r_{\frac{2\pi}{k}} = S_{\vec{BC}} \circ r_{\frac{4\pi}{n}} \end{aligned}$$

Par conséquent le point  $R - n - 1$  sera sur un segment de même direction et sens que  $[AB]$ , ce qui permet de retrouver le résultat précédent.

### 10.6.2 Le cas des polygones ayant un nombre impair de côtés

**Résultats** En ce qui concerne les polygones ayant un nombre impair de côtés  $(2n + 1)$ , le dernier polygone « déplié » est tourné de  $\frac{2\pi}{2n+1}$  et translaté suivant un vecteur de composantes  $\begin{pmatrix} n + 1 + n \cos \frac{2\pi}{2n+1} \\ n \sin \frac{2\pi}{2n+1} \end{pmatrix}$ . Voir la démonstration dans la section suivante.

Par conséquent le trajet se fermera si et seulement si le point d'intersection avec le côté correspondant de l'image par la composition de la rotation et de la translation sera positionné comme le point de départ du trajet lumineux. Autrement dit, si on se place dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AY})$  orthonormé, l'image de  $B$  sera donné par le calcul :

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{2n+1} & -\sin \frac{2\pi}{2n+1} \\ \sin \frac{2\pi}{2n+1} & \cos \frac{2\pi}{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n + 1 + n \cos \frac{2\pi}{2n+1} \\ n \sin \frac{2\pi}{2n+1} \end{pmatrix}$$

Soit

$$B' : \left( (n + 1) \cos \frac{2\pi}{2n + 1}, (n + 1) \sin \frac{2\pi}{2n + 1} \right)$$

Le trajet sera fermé si et seulement si le point  $R_{2n+1}$  sera l'image par cette composition de transformation du point de départ  $D$  du rayon lumineux, de coordonnées  $(d, 0)$  avec  $d \in ]0, 1[$ .

$$R_{2n+1} : \left( d \cos \frac{2\pi}{2n + 1} + n + 1 + n \cos \frac{2\pi}{2n + 1}, d \sin \frac{2\pi}{2n + 1} + n \sin \frac{2\pi}{2n + 1} \right)$$

La pente de la droite  $(D_1R_{2n+1})$  est donc :

$$p = \frac{\sin \frac{2\pi}{2n+1} (d + n)}{\cos \frac{2\pi}{2n+1} (d + n) + n + 1 - d}$$

Et cette droite coupe le segment  $[BC]$  (le côté suivant du polygone) en  $R_1$  de coordonnées :

$$R_1 : \left( \frac{pd - \tan \frac{2\pi}{2n+1}}{p - \tan \frac{2\pi}{2n+1}}, \tan \frac{2\pi}{2n + 1} \frac{p(d - 1)}{p - \tan \frac{2\pi}{2n+1}} \right)$$

**En utilisant les compositions de transformations** Dans le cas où  $n$  est impair,  $n = 2k + 1$ . On utilise ainsi  $2k$  symétries. Deux symétries consécutives ont des axes dont les angles mesurent  $\frac{(n-2)\pi}{n}$ . Donc la composition de ces réflexions sera une rotation d'angle  $k \times 2\frac{(n-2)\pi}{n}$ . Mais :

$$k \times 2\frac{(n - 2)\pi}{n} = (2k - 2)\pi + \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}[2\pi]$$

Par conséquent, le vecteur  $\vec{AB}$  sera transformé dans le vecteur  $\vec{A'B'} = \vec{BC}$  ce qui démontre le résultat utilisé dans le paragraphe précédent.

### 10.6.3 Trajets « croisés »

Supposons qu'au lieu de rebondir en premier sur un côté adjacent au côté de départ, le rayon se dirige vers le  $h^{\text{eme}}$  côté.

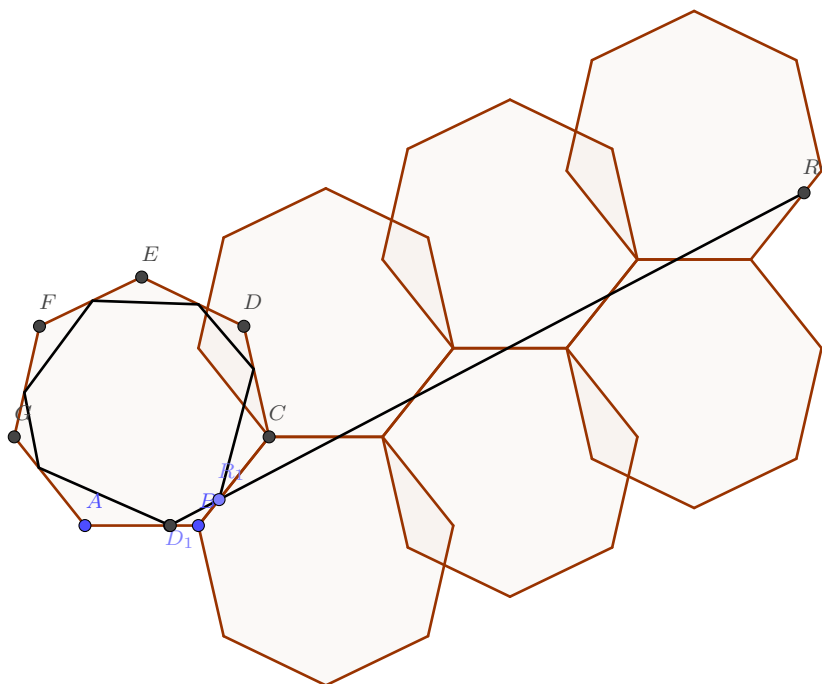


FIGURE 10.13 – Illustration sur l’heptagone régulier

On a vu que dans le carré, la trajectoire ne peut pas se fermer, mais en revanche, dans le pentagone régulier, par exemple en partant du milieu d’un côté, elle se referme en dessinant un pentagone étoilé. Si le point de départ est un point quelconque sur le premier côté, existe-t-il une trajectoire ? Et d’une façon générale, existe-t-il une trajectoire fermée dans un polygone régulier à  $n$  côtés lorsque le trajet commence par un segment  $[D_1R_1]$  avec  $D_1 \in C_1$  et  $R_1 \in C_h$  (en tournant dans le sens trigonométrique, par exemple).

Est-il possible d’avoir une trajectoire « régulière », c’est-à-dire rebondissant sur les côtés,  $h, 2h, 3h,$  etc. jusqu’à  $nh$  correspondant au côté 0 initial.

C’est possible lorsque  $h$  est premier avec  $n$ . Par exemple, si  $n = 5, 2$  engendrent  $Z/5Z$  et la trajectoire pourra être représentée par :  $C_0 \rightsquigarrow C_2 \rightsquigarrow C_4 \rightsquigarrow C_1 \rightsquigarrow C_3 \rightsquigarrow C_0$  (comme illustré sur la figure 10.14).

Notons également, comme dans les trajets convexes que dans ce cas, les angles d’incidence prennent deux valeurs,  $\alpha$ , angle de départ et  $\beta$ . Si le trajet se fait sur les côtés  $0, 2, 4, \dots$ , la relation entre les angles s’écrit :

$$\alpha + \beta = \frac{4\pi}{n}$$

### Le cas du pentagone

Soit un pentagone régulier  $ABCDE$  ; en prolongeant les côtés on obtient un pentagone étoilé régulier dont on peut supposer que le côté mesure 1. On cherche alors une relation entre l’angle  $\alpha$  de départ du trajet et la position du point de départ sur le côté  $[AB]$ . On utilise les notations de la figure 10.14 ainsi que les relations :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

où  $A, B$  et  $C$  représentent les mesures des angles et  $a, b$  et  $cc$  les longueurs des côtés du triangle. On considère successivement, les relations dans les triangles  $R_1R_2E', R_2R_3B', R_3R_4D', R_4R_5A'$  et  $R_5R_1C'$  pour trouver une relation entre  $\alpha$  et  $R_1E'$  avec  $\beta = \frac{4\pi}{5} - \alpha$ .

Dans le triangle  $R_1R_2E'$  :

$$R_1E' = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} R_2E' \tag{10.1}$$

Dans le triangle  $R_2R_3B'$  :

$$R_2B' = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} R_3B'$$

donc

$$R_2E' = 1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} R_3B' \tag{10.2}$$

(1) et (2) donnent :

$$R_1E' = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - R_3B' \tag{10.3}$$

Dans le triangle  $R_3R_4D'$  :

$$R_3D' = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} R_4D'$$

Donc :

$$R_3B' = 1 - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} R_4D' \tag{10.4}$$

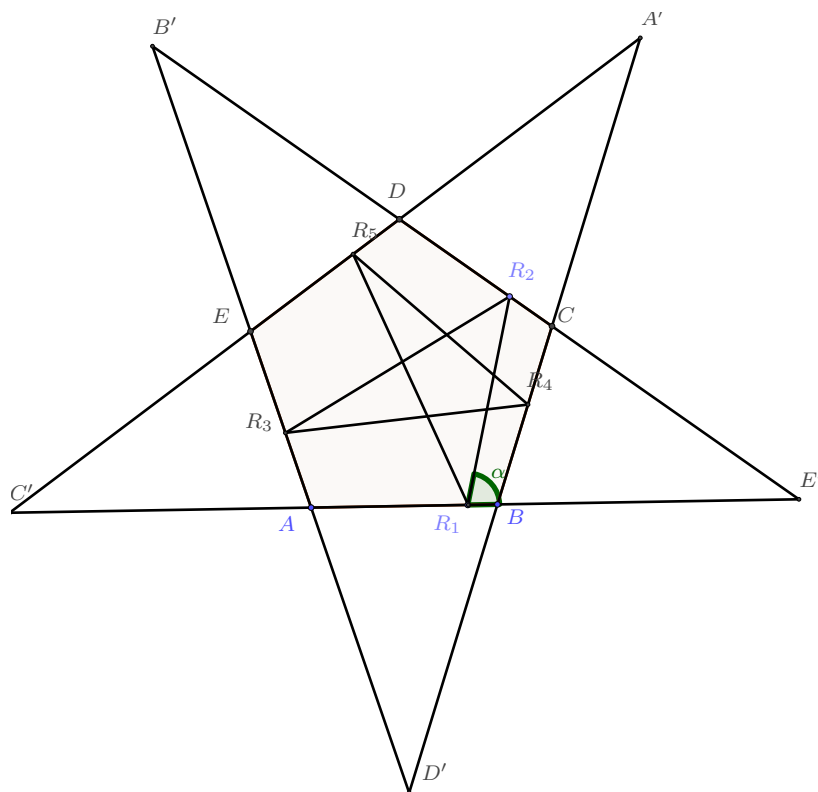


FIGURE 10.14 – Un trajet étoilé dans le pentagone

(3) et (4) donnent :

$$R_1E' = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - 1 + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} R_4D' \tag{10.5}$$

Dans le triangle  $R_4R_5A'$  :

$$R_4A' = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} R_5A'$$

Donc

$$R_4D' = 1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} R_5A' \tag{10.6}$$

(5) et (6) donnent :

$$R_1E' = 2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - 1 - R_5A' \tag{10.7}$$

Dans le triangle  $R_5R_1C'$  :

$$R_5C' = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} R_1C'$$

Le chemin se ferme si et seulement si  $R_1C' = 1 - R_1E'$  ce qui amène en utilisant (7) et (8) à la relation :

$$R_1E' \left( 1 + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) = 3 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - 2 \tag{10.8}$$

En posant  $R_1E' = d$  et  $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = t$  la relation s'écrit simplement :

$$d = \frac{3t - 2}{1 + t} \tag{10.9}$$

Par exemple, si le point de départ est le milieu du segment  $[AB]$ ,  $d = \frac{1}{2}$  et  $t = 1$  ce qui donne  $\alpha = \beta = \frac{2\pi}{5}$

### Cas de l'octogone au pas de 3

La remarque liminaire montre qu'un trajet de lumière peut être fermé en rebondissant sur chacun des côtés seulement si  $n$  (nombre de côtés du polygone régulier) et  $p$  (saut) sont premiers entre eux. Par exemple, pour  $n = 8$ ,  $p$  peut être égal à 3 (ou 5 ce qui à symétrie prêt, revient au même). Examinons alors, le cas  $n = 8$  et  $p = 3$  (Figure 10.15; En reprenant des calculs analogues utilisant les relations métriques du triangle successivement dans les triangles  $R_1R_2G'$ ,  $R_2R_3B'$ ,  $R_3R_4E'$ ,  $R_4R_5H'$ ,  $R_5R_6C'$ ,  $R_6R_7F'$ ,  $R_7R_8A'$  et  $R_8R_1D'$ , il vient la relation :

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

Donc, quelque soit la position du point de départ  $R_1$  sur  $[AB]$ , les deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  doivent avoir même mesure. Dans le pentagone,  $R_1BCDR_2$ , la somme des angles vaut  $3\pi$  et par conséquent

$$\alpha + \beta + \frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = 3\pi$$

Soit :

$$\alpha = \frac{3\pi}{8}$$

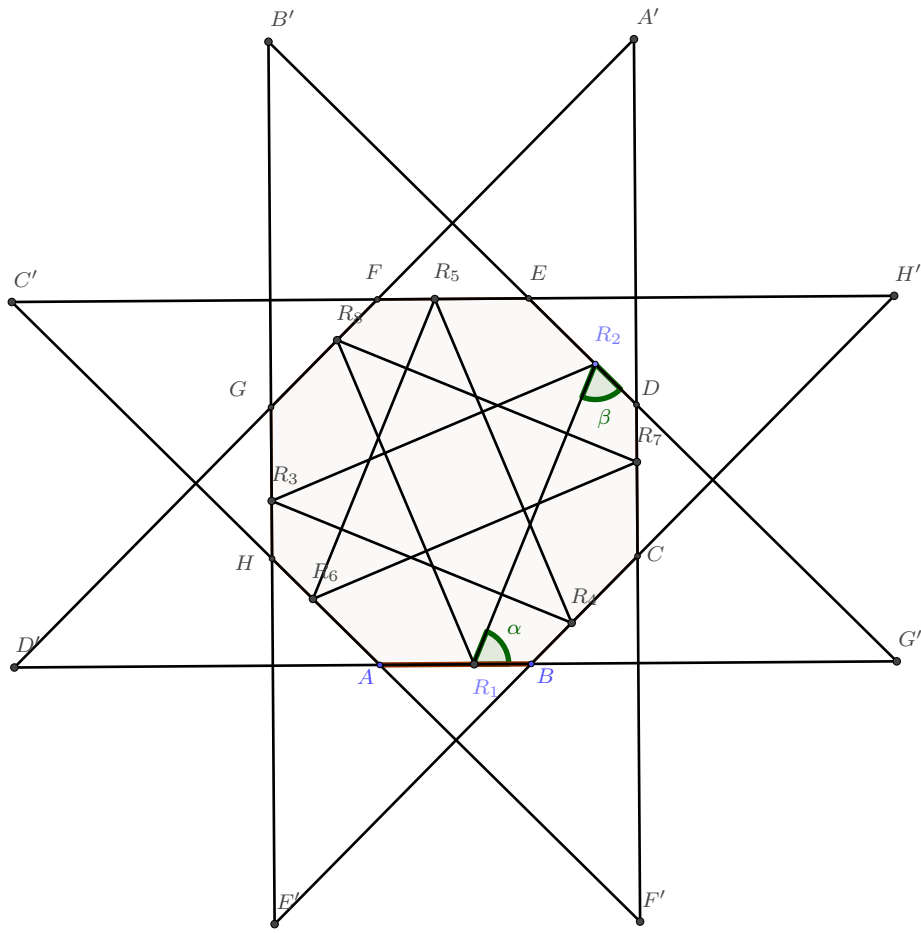


FIGURE 10.15 – L’octogone au pas de 3



### Cas général

#### Résultat

Si  $n = 2k$  et le pas est  $p$  (premier avec  $n$ ) alors  $\sin \alpha = \sin \beta = \frac{p\pi}{n}$ .

Si  $n = 2k + 1$  et le pas est  $p$  (premier avec  $n$ ) alors

$$d = \frac{(k + 1)t - k}{1 - t} \text{ avec } d = A_1R_1 \text{ et } t = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Dans ce cas,  $\sin \alpha + \sin \beta = 2\frac{p\pi}{n}$

#### 10.6.4 Le cas du triangle quelconque

Le trajet dans un triangle quelconque  $ABC$ , d'angle  $(\widehat{CA, CB}) = \alpha$  correspond au dépliement de tel sorte que l'image de  $D$  par la rotation d'angle  $2\alpha$  et de centre  $C$  soit un point  $R_3$  tel que :

$$A'R_3 = AD, \text{ avec } A' = r_{C, 2\alpha}(A)$$

En effet, si le rayon coupe le côté  $[BC]$  en  $R_1$  (voir figure 10.16) puis rebondit sur le côté  $[CA]$  en  $F$  puis rebondit sur le côté  $[AB]$  en  $D$ , la rectification du trajet utilise d'abord la symétrie d'axe  $(CB)$  puis la composition des symétries  $S_{(CB)} \circ S_{(CA)}$  qui est ainsi la rotation de centre  $C$  et d'angle  $2 \times \alpha$ .

On a ainsi une construction d'un trajet fermé quelque soit la position de départ  $D$  sur  $[AB]$  :

- Construire l'image de  $ABC$  par la rotation d'angle  $2 \times (\widehat{CA, CB})$  et de centre  $C$ .
- Tracer le point  $R_3$  du segment  $[A'B']$  tel que  $A'R_3 = AD$
- Tracer le segment  $[DR_3]$  qui coupe  $[CA']$  en  $R_2$ .
- Tracer le symétrique  $F$  de  $R_2$  par rapport à la droite  $(CB)$ .
- le trajet est  $DR_1FD$ .

#### 10.6.5 Cas du quadrilatère quelconque

On utilise une technique identique, mais cette fois on considère l'image du quadrilatère  $ABCD$  initial par la composition de la rotation de centre  $C$  et d'angle  $2 \times (\widehat{CB, CD})$  et de la symétrie d'axe  $(A'D')$ ,  $A'$  et  $D'$  étant les images de  $A$  et  $D$  par la même rotation. On en déduit, étant donné un point  $D_1$  de départ le trajet de lumière par la construction suivante :

- Construire l'image de  $ABCD$  par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $2 \times (\widehat{CB, CD})$ .
- Construire le symétrique de cette image par la symétrie d'axe  $(A'D')$ .
- Construire le point  $R_4$  tel que  $A'R_4 = AD_1$ .
- $R_1$  et  $R_2$  et  $R_3$  sont les points d'intersection de  $(D_1R_4)$  avec  $[BC]$ ,  $[CD']$  et  $[A'D']$ .
- $F$  et  $G$  sont les images de  $R_2$  et  $R_3$  par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $-2 \times (\widehat{CB, CD})$
- le trajet fermé est  $D_1R_1FGD_1$ . (Voir figure 10.17)

### 10.7 Le travail des élèves

Beaucoup de recherches ont été faites en utilisant un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra, en général). Ce qui est en effet une excellente idée! Par exemple, la seconde 503 du lycée

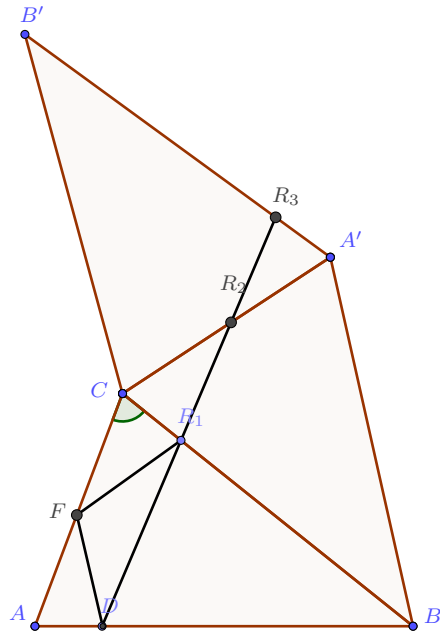


FIGURE 10.16 – Le cas du triangle quelconque

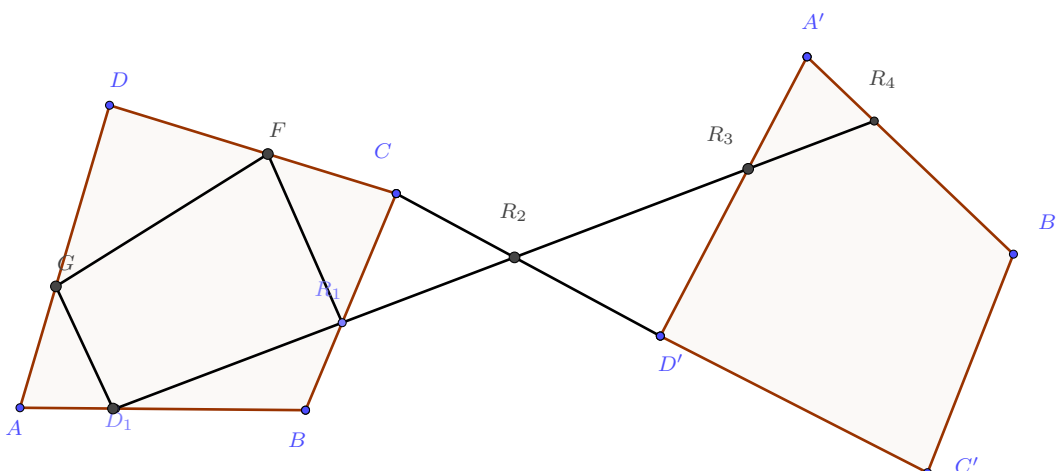


FIGURE 10.17 – Le cas du quadrilatère quelconque

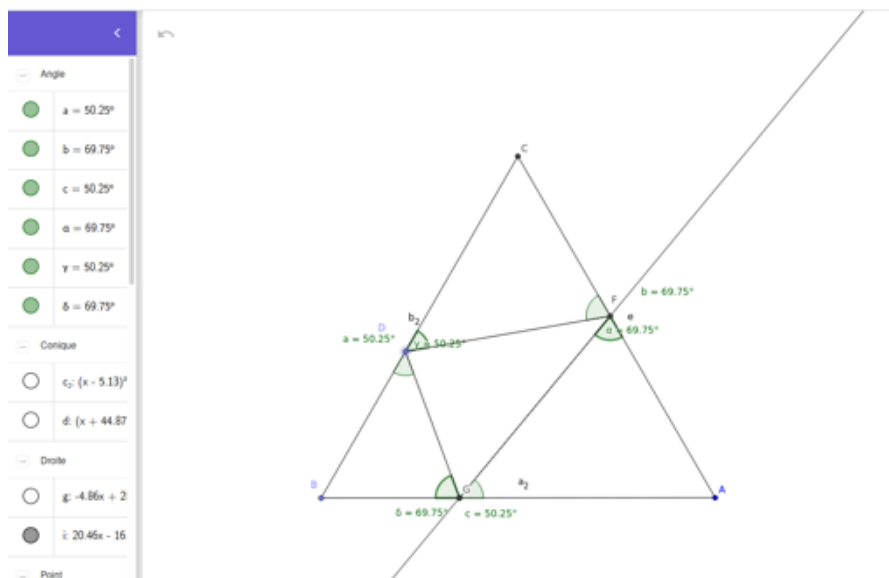


FIGURE 10.18 – Constructions dans le triangle avec GeoGebra

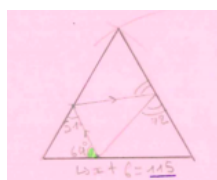


FIGURE 10.19 – Constructions dans le triangle à la main

du Parc a proposé une figure pour explorer le triangle équilatéral, tout comme la troisième 2 du collège de la Verpillere ou la classe de 3emeB du Collège du Pilat, Bourg Argental ; c'est aussi le cas de la seconde verte de Saint Thomas d'Aquin à Oullins. Des classes conjecturent qu'il existe d'autres trajectoires que celle passant par les milieux des côtés. En revanche, j'ai vu souvent écrit qu'il n'en existe pas. Ce qui semble en contradiction avec les figures GeoGebra ou celles faites sur papier (cf. celles de la 3C du collège Jean Zay)! Une question à résoudre : montrer que quelque soit le point de départ sur un côté d'un polygone régulier, il existe un angle qui permet de fermer la trajectoire. Commencer par le triangle équilatéral!

C'est ainsi que la page des réponses commençait ! En effet, le dialogue entamée l'année précédente semblait fructueux et intéressant pour relancer les recherches. Et cette année encore les réponses proposées ont montré s'il fallait encore le montrer ! la créativité des élèves tant sur la forme (vidéos, photos, textes, diaporamas, programmes,...) que sur le fond comme le montrent les études très complètes d'un cas (le triangle équilatéral, par exemple dans ce fichier GeoGebra 10.18 ou illustré par des figures faites à la main, fig.10.19) ou le carré comme le montre ces planches de figures proposées par la classe de 3èmeA du collège Louise de Savoie de Pont d'Ain (Figure 10.20).

## 10.8 Utiliser le problème en classe

Comme on l'a déjà vu dans le paragraphe précédent, le problème peut être utilisé avec l'énoncé du problème ouvert dans une perspective de *Problem Posing* telle que nous l'avons déjà expliquée dans le chapitre précédent. A partir de la situation mathématiques, les élèves peuvent imaginer les questions qu'ils pourraient se poser et essayer de résoudre.

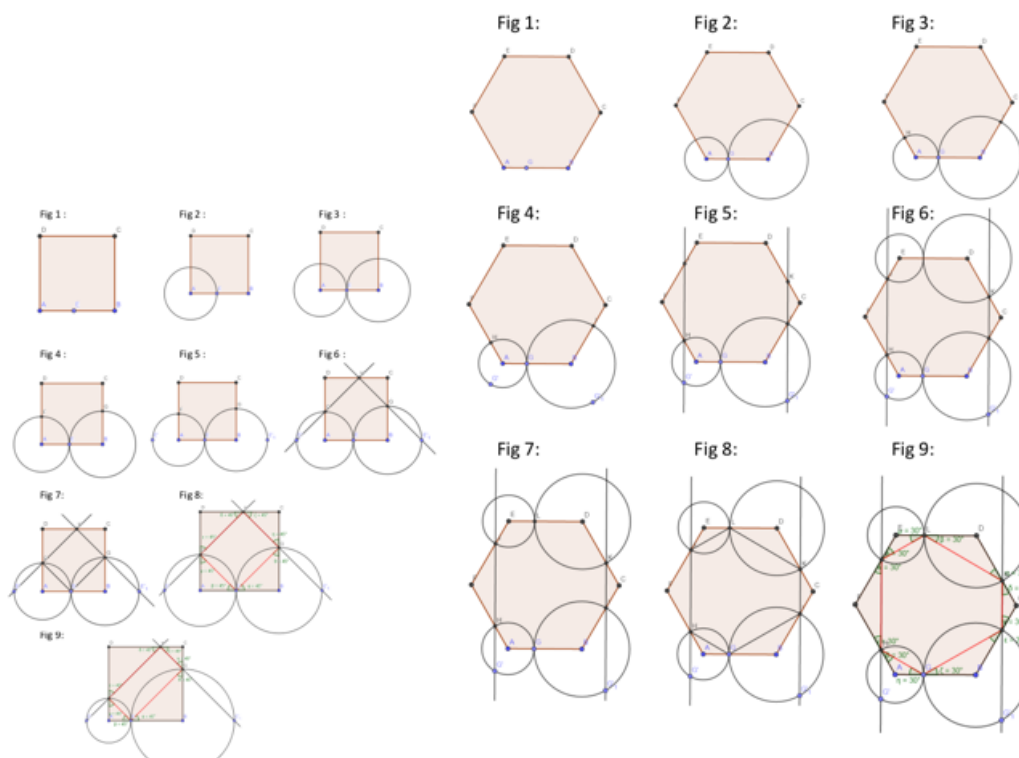


FIGURE 10.20 – Constructions dans le carré et l’hexagone régulier

De même, dans l’introduction de ce chapitre nous avons fait référence à d’autres problèmes de billards qui peuvent être utilisés en classe, comme par exemple :

1. On considère un billard de forme rectangulaire qui est quadrillé de façon régulière (c’est-à-dire qu’il a un nombre entier de lignes et un nombre entier de colonnes).  
 Aux 4 sommets du billard il y a une ouverture qui permet d’envoyer un rayon lumineux le long des diagonales du quadrillage.  
 Le rayon lumineux « rebondit » sur les côtés du rectangle et ne peut sortir du billard que s’il arrive sur un des 4 sommets.  
 Existe-t-il un moyen de déterminer à l’avance le nombre de carreaux traversés par le rayon lumineux dans le billard en fonction de ses dimensions ?  
 Encore une fois, une présentation complète peut être téléchargée sur le site de l’équipe<sup>4</sup>.
2. Une boule de billard suit la diagonale d’un billard rectangulaire de dimension  $n \times m$  quadrillé. Combien de carreaux de côté 1 la boule va t’elle traverser ?

4. [https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap\\_website/1324/32045](https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/1324/32045)

# Conclusion

Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit.  
(Bachelard, 1967)

A l'issue de ces dix premières années, le bilan de l'épreuve du problème ouvert dans le Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon est, à mon sens, positif. De nombreuses classes et de nombreux élèves se sont mobilisés pour prendre du temps pour faire des mathématiques gratuitement, pour le plaisir de la recherche. Les dix problèmes ont embrassé un champ large de l'activité mathématique, de la combinatoire à la théorie des nombres en passant par la géométrie et l'algèbre. J'espère que tous les élèves qui ont participé à cette épreuve ont ressenti le même plaisir que moi à chercher et à fabriquer ces énoncés.

Le contrat de ce Rallye n'est pas celui de la classe, mais je suis persuadé que les élèves ont appris des mathématiques en se confrontant à ces problèmes. Faire chercher des problèmes de mathématiques aux élèves relève à la fois d'une réflexion didactique et d'une réflexion épistémologique. A travers ces différents énoncés, les élèves ont été confrontés aux trois éléments qui sont au cœur de l'activité du mathématicien : manipuler des objets abstraits, manipuler un langage formel et manipuler la logique des raisonnements hypothético-déductif des mathématiques. Les manipulations d'objets mathématiques passent par des phases d'appropriation des concepts à travers des expériences engageant la réalité de faits empiriques dans la construction d'objets abstraits. Les mathématiques se situent alors au croisement de l'expérience phénoménale et du monde des idées. C'est parce qu'un dessin ou une représentation sémiotique d'un objet mathématique nous dévoile des propriétés que nous pouvons abstraire la propriété sur l'objet lui-même. L'exemple du problème qui déchire (page 71) montre bien ce passage de l'expérience concrète sur un objet matériel vers le concept de division euclidienne. C'est à travers la réflexion sur l'expérience concrète que les objets mathématiques abstraits se mettent en place et provoque la manipulation de l'abstrait. Quand des élèves cessent de découper du papier pour organiser les réponses en écrivant sur une feuille, comme c'est bien illustré sur la figure 6.2, page 77, l'objet de l'expérience et la manipulation passe du tangible à l'abstraction des nombres et de leurs propriétés. Les expériences continuent mais dans un nouvel espace abstrait dans lequel les nombres et leurs propriétés remplacent le papier déchiré. Et c'est alors la manipulation du langage particulier des mathématiques qui se met en place pour construire et le raisonnement en mettant en œuvre la systématisation du formalisme mathématique pour déduire à travers des calculs et des raisonnements les résultats recherchés. La manipulation des symboles, essentielle dans toute démarche mathématique, participe ainsi à la compréhension de l'objet manipulé dans un rapport dialectique dont l'importance en terme didactique est souvent minimisé, notamment en laissant penser qu'un objet est intimement lié à une de ses représentations. C'est ainsi en multipliant les représentations d'un objet et la formalisation liée à cette représentation que le sens de l'objet se construit à travers le formalisme mathématique. Les

exemples des grilles diaboliques (page 81) ou des chemins sur un quadrillage (page 93) sont de bonnes illustrations de ces idées ; en effet, les énoncés ne sont pas a priori dans le domaine de connaissances des élèves et les représentations qu'ils en donnent conduisent à la formalisation des concepts sous-jacents utilisant notamment les règles de la logique qui sont alors manipulées pour finaliser les raisonnements et communiquer les résultats. La distinction indispensable entre la recherche du problème et sa communication soulève la question de la validation où se jouent les mises en relation entre les résultats de l'expérience et les connaissances des protagonistes. Mais chaque problème peut être analysé à l'aune de ces manipulations, ce qui, à mon sens, justifie largement le travail réalisé. Les questions didactiques liées aux apprentissages effectifs des élèves dans des situations de recherche de problème sont cruciales et les hypothèses que l'équipe DREAM cherche à confirmer stipulent que au delà des compétences à chercher un problème, l'activité que les élèves déploient participe à la consolidation de leurs connaissances mathématiques et au développement de leur conscience mathématique. L'espoir que cette expérience d'épreuve de problème ouvert dans le rallye mathématique se prolonge dans la classe ordinaire demeure également une motivation à proposer chaque année ces jolis problèmes !

Et l'aventure n'est pas terminée ! Rendez-vous au problème ouvert 11 en 2021 !

# Bibliographie

- [Aldon, 1995] ALDON, G. (1995). Une voiture à la dérive. *Repères-IREM*, 21:27–44.
- [Aldon et al., 1996] ALDON, G., FEURLY-RAYNAUD, J. et TISSERON, C., éditeurs (1996). *Développer la recherche scientifique à travers l'étude de situations mathématiques*. IREM de Lyon.
- [Aldon et al., 2017] ALDON, G., FRONT, M. et GARDES, M.-L. (2017). Entre élaboration et usage, comment poser la question de la cohérence des ressources? *Education & Didactique*, 11 :3:9–30.
- [Aldon et Garreau, 2017] ALDON, G. et GARREAU, O. (2017). Un dispositif de recherche de problèmes de mathématiques au cycle 3. *Repères IREM*, (108):26–40.
- [Aldon et Rabatel, 2015] ALDON, G. et RABATEL, J.-P. (2015). Caprico : Calculatrices en primaire et en collège. *In Actes de la XLIIe COPIRELEM*.
- [Appel et Haken, 1977] APPEL, K. et HAKEN, W. (1977). Every planar map is four colorable. part i : Discharging. *Illinois J. Math.*, 21(3):429–490.
- [Arsac et al., 1991] ARSAC, G., GERMAIN, G. et MANTE, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.
- [Arsac et Mante, 2007] ARSAC, G. et MANTE, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren CRDP de Lyon.
- [Bouteloup, 1991] BOUTELOUP, J. (1991). *Carrés magiques, carrés latins et eulériens : histoire, théorie, pratique*. Éditions du Choix.
- [Brousseau, 1986] BROUSSEAU, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1.
- [Buisson, 1929] BUISSON, F. (1929). *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*. Hachette, Paris, <http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson><http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/>.
- [Deléglise et al., 2008] DELÉGLISE, M., NICOLAS, J.-L. et ZIMMERMANN, P. (2008). Landau's function for one million billions. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 20:625–671.
- [Descaves, 2011] DESCAVES, A. (2011). *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. Paris, Hachette.
- [Descombes, 2000] DESCOMBES, R. (2000). *Les carés magiques*. Vuibert.
- [Dewey, 1938] DEWEY, J. (1938). Experience and education. *The Educational Forum*, 50(3): 241–252.
- [Dubner et al., 2002] DUBNER, FORBES, LYGEROS, MIZONY, NELSON et ZIMMERMANN (2002). Ten consecutive primes in arithmetic progression. *Math. Comp.*, 71 :239(239):1323–1328.

- [Erdős *et al.*, 1998] ERDÖS, P., NICOLAS, J.-L. et SÁRKÖZY, A. (1998). On large values of the divisor function. *The Ramanujan Journal*, 2:225–245.
- [Freire, 2000] FREIRE, P. (1970/2000). *Pedagogy of the oppressed*. Continuum, New York, London. Translated by Bergman Ramos.
- [Freudenthal, 1973] FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel, Dordrecht, The Netherlands.
- [Front, 2015] FRONT, M. (2015). *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan*. phdthesis, Université Lyon1.
- [Gardes, 2013] GARDES, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. phdthesis, Université Lyon 1.
- [Gardes et Mizony, 2012] GARDES, M.-L. et MIZONY, M. (2012). La conjecture d'erdős-straus : expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM*, (87):59–78.
- [Gowers et Nielsen, 2009] GOWERS, T. et NIELSEN, M. (2009). Massively collaborative mathematics. *Nature*, 461:879–881.
- [Hume, 1946] HUME, D. (1946). *Treatise of human nature*. Selby-Bigge, Clarendon-Press Oxford.
- [Irving, 1973] IRVING, R. W. (1973). An extension of schur's theorem on sum-free partitions. *Acta Arith.*, 25:55–64.
- [Joseph *et al.*, 2003] JOSEPH, A., MELKINOV, A. et RENTSCHLER, R. (2003). *Studies in Memory of Issai Schur*. Springer.
- [Kuhn, 1962] KUHN, T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago University Press.
- [Langevin, 1950] LANGEVIN, P. (1950). *La pensée et l'action, textes recueillis par Paul Labérenne, préfaces de Frédéric Joliot-Curie et Georges Cogniot*. Paris, Les Éditeurs Français Réunis.
- [Petersen, 1879] PETERSEN, J. (1879). *Methods and theories for the solution of problems of geometrical construction*. Copenhagen : A. F. Høst and Son.
- [Polya, 1945] POLYA, G. (1945). *How to solve it ?* New Jersey Princeton Universit.
- [Polymath, 2010] POLYMATH, D. H. J. (2010). Density hales-jewett and moser numbers. *ArXiv :1002.0374*.
- [Rouse-Ball, 1914] ROUSE-BALL, W. W. (1914). *Mathematical recreations and essays*. MacMillan and Co., London.
- [Sabena, 2017] SABENA, C. (2017). *Mathematics and Technology : A C.I.E.A.E.M. Sourcebook*, chapitre Early Child Spatial Development : A Teaching Experiment with Programmable Robots, pages 13–30. Springer International Publishing, Cham.
- [Schoenfeld, 1994] SCHOENFELD, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *The Journal of Mathematical Behavior*, 13.1:55–80.
- [Singer *et al.*, 2015] SINGER, F. M., ELLERTON, N. F. et CAI, J., éditeurs (2015). *Mathematical problem posing : From research to effective practice*. Springer.
- [Sweller *et al.*, 2011] SWELLER, J., CLARK, R. E. et KIRSCHNER, P. A. (2011). Teaching general problem solving does not lead to mathematical skills or knowledge. *Notices of the American Mathematical Society*, 57:1303–1304.



- [Taneja, 2015] TANEJA, I. J. (2015). Single digit representations of natural numbers. *arXiv :1502.03501 [math.HO]*.
- [Tisseron et Aldon, 1998] TISSERON, C. et ALDON, G. (1998). Des situations pour mettre en oeuvre une démarche scientifique. *In Actes du deuxième colloque international Recherche et formation des enseignants*. IUFM de Grenoble.
- [Tisseron et al., 1996] TISSERON, C., FEURLY-REYNAUD, J. et PONTILLE, M.-C. (1996). Et pourtant, ils trouvent ! *Repères*, 24:11–24.
- [Voltolini, 2017] VOLTOLINI, A. (2017). *Duo d'artefacts numérique et matériel pour l'apprentissage de la géométrie au cycle3*. Thèse de doctorat, Université de Lyon.



# Table des figures

1	$\Pi = 2?$ . . . . .	10
2	Trois écritures d'un même nombre. . . . .	11
3	Un cercle, objet sensible, objet mathématique, représentation. . . . .	11
1.1	Le logo de la feuille à problèmes . . . . .	14
1.2	Un arbre de choix . . . . .	22
2.1	L'énoncé tel que donné dans le livre de Petersen . . . . .	26
2.2	Les points qui partagent $[A, B]$ dans le rapport $\frac{3}{2}$ . . . . .	26
2.3	Des exemples de polygones . . . . .	27
2.4	Polygones réguliers et cercles inscrits . . . . .	28
2.5	Pour suivre les raisonnements du paragraphe suivant . . . . .	29
2.6	Bissectrice . . . . .	31
2.7	Les diagonales du petit polygone concourent . . . . .	32
2.8	Représentation graphique de l'aire d'un triangle extérieur, cas du triangle . . . . .	32
2.9	Représentation graphique de l'aire d'un triangle extérieur, cas du carré . . . . .	33
2.10	Représentation graphique de l'aire d'un triangle extérieur pour $n$ de 3 à 10. . . . .	33
2.11	Théorème de Pascal . . . . .	34
2.12	Les six points sur une même conique . . . . .	35
2.13	Un fichier GeoGebra accompagnant les résultats trouvés . . . . .	36
2.14	Un résultat proposé par une classe de seconde . . . . .	37
2.15	Un calcul d'aire . . . . .	38
3.1	L'image du problème . . . . .	41
3.2	Des résultats avec les chiffres de l'année 2020 . . . . .	50
4.1	Une image d'un film envoyé par une classe . . . . .	52
4.2	Le site pour tester le problème . . . . .	52
4.3	Avec 2 boîtes (en notant 0 lorsque la boîte est vide) . . . . .	53
4.4	$2^n$ dans $n$ boîtes . . . . .	57
4.5	Les nombres représentés par des buchettes . . . . .	58
5.1	La calculatrice TI Primaire Plus . . . . .	62
5.2	Des captures de vidéos de troisième et de seconde . . . . .	67
5.3	Une pause nécessaire dans les recherches! . . . . .	67
5.4	Les résultats de Laurie . . . . .	68
5.5	Une règle issue d'une longue série d'expériences . . . . .	68
5.6	Une intervention auprès des élèves . . . . .	69
6.1	Un programme écrit en C . . . . .	76
6.2	Un élève en pleine expérience . . . . .	77

7.1	La tortue géante de Lo Shu . . . . .	81
7.2	Melencolia de Dürer . . . . .	82
7.3	Une construction du carré de Dürer . . . . .	82
7.4	Une grille gagnante, une grille perdante . . . . .	83
7.5	Une grille $4 \times 4$ gagnante . . . . .	84
7.6	Un exemple de grille paire gagnante . . . . .	88
7.7	Le passage d'une grille gagnante à une autre . . . . .	88
7.8	Les premières réponses . . . . .	89
7.9	Un programme proposé par une classe . . . . .	90
7.10	Une réponse sous forme de narration de recherche . . . . .	91
8.1	Un exemple de coloration de $K_6$ avec un triangle monocolore . . . . .	94
8.2	la grille de départ . . . . .	94
8.3	Une grille $4 \times 3 \times 2$ . . . . .	95
8.4	Représentations des chemins dans des grilles par deux classes de seconde . . . . .	99
8.5	Extraits de vidéos envoyées par les élèves . . . . .	99
8.6	Une Beebot . . . . .	100
8.7	Un déplacement à programmer . . . . .	101
8.8	Trajectoire des quatre BeeBots . . . . .	101
8.9	La « course » à quatre . . . . .	102
8.10	Un chemin dans un triangle de côté 5 . . . . .	102
9.1	Un exemple de sangaku . . . . .	106
9.2	Dessin de départ . . . . .	107
9.3	$A = \frac{r \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)}{2}$ . . . . .	109
9.4	Les trois rayons en fonction de la distance $AD$ . . . . .	110
9.5	Lieu du point $O_2$ . . . . .	113
9.6	Evolution de l'aire de $O_1O_2O_3$ en fonction de la position de $E$ . . . . .	114
9.7	Avec un point $F$ sur $[BC]$ . . . . .	114
9.8	Le site du rallye et les commentaires . . . . .	115
9.9	Une correspondance mathématique entre les classes . . . . .	115
9.10	Un tableau pendant les recherches . . . . .	116
10.1	Des rebonds sur des billards... . . . .	119
10.2	Des trajectoires dans un billard elliptique . . . . .	120
10.3	Reflét du laser sur le mur . . . . .	121
10.4	Une trajectoire fermée et une trajectoire qui ne l'est pas . . . . .	121
10.5	Une trajectoire fermée . . . . .	122
10.6	Une trajectoire fermée dans le carré . . . . .	123
10.7	Rebond sur le côté opposé . . . . .	124
10.8	Un chemin fermé dans le pentagone . . . . .	124
10.9	Le dernier triangle du polygone trajectoire; cas impair, cas pair . . . . .	126
10.10	Un chemin fermé avec $d_1 = 0, 2$ et $r_1 = \frac{16}{35}$ . . . . .	128
10.11	Un trajet fermé dans l'hexagone . . . . .	130
10.12	Le cas de l'octogone . . . . .	131
10.13	Illustration sur l'heptagone régulier . . . . .	133
10.14	Un trajet étoilé dans le pentagone . . . . .	134
10.15	L'octogone au pas de 3 . . . . .	136
10.16	Le cas du triangle quelconque . . . . .	138
10.17	Le cas du quadrilatère quelconque . . . . .	138

---

10.18	Constructions dans le triangle avec GeoGebra . . . . .	139
10.19	Constructions dans le triangle à la main . . . . .	139
10.20	Constructions dans le carré et l'hexagone régulier . . . . .	140