

5. LA SITUATION RELATIVE AUX ANGLES DE DEMI-DROITES

L'angle trouve sa justification dans le macro - espace, là où la mesure des longueurs est rendue plus difficile, et parfois même impossible.

Dans l'espace sensible, on fait souvent allusion implicitement aux angles solides, et aux angles dièdres. Pour ces derniers, par le choix convenable d'un plan de section, on se ramène souvent à un problème plan et, par conséquent, à un angle de demi-droites.

Rares sont les situations où cette tâche de sélection d'un plan de coupe est à la portée d'élèves de 6ème : c'est la raison pour laquelle, lorsqu'un professeur leur donne un problème dans l'espace sensible, c'est lui qui prend en charge ce travail de modélisation. Et l'élève se voit alors confronté à un problème dans le micro - espace de la feuille de papier. Dans cet espace privilégié par l'enseignement, il est possible d'enfermer un angle dans un triangle ; la reproduction de ce dernier, à l'aide de longueurs (grâce aux reports ou aux mesures) permet de contourner la rencontre avec l'angle.

Il s'agit donc de trouver une situation permettant de "faire sortir" un angle des nombreux triangles dans lesquels on peut l'enfermer. Nous avons fait le choix de travailler dans un espace sensible où l'utilisation de l'angle s'avère pertinente, tout en laissant à l'élève une part de modélisation de la situation. Pour cela, il nous a fallu **trouver une situation ni trop simple, ni trop complexe, qui mette en défaut l'utilisation de longueurs.**

Nous avons choisi le thème des angles de visée, dans un contexte utilisant une lunette de visée rudimentaire, que nous appelons "boîte de visée", situé dans le méso-espace (espace allant de 0,5 à 50 fois la taille du sujet). Une première situation, se déroulant dans l'espace de la cour de récréation, a été expérimentée dans une classe à la fin de l'année scolaire 1998/1999 : la dévolution du problème s'est avérée difficile. Nous avons décidé de la

modifier en la situant dans l'espace formé par la réunion de deux tables de classe. Plus modestement, on vise la sortie de la feuille de papier, un changement de taille, sans pour autant affronter les difficultés de modélisation d'une situation se déroulant dans le macro – espace. (La cour et les tables de classe relèvent toutes les deux du méso-espace).

Les objectifs de cette première situation sont les suivants :

- Mettre en défaut la mesure de longueur pour résoudre un problème de l'espace sensible ;
- Faire apparaître l'angle comme déterminé par deux demi-droites ;
- Faire percevoir que les côtés de l'angle ne sont pas des segments.

5.1. Présentation globale de la situation “Angles de visée”

Description matérielle :

La séance se déroule entièrement dans la salle de classe, et le matériel suivant est à prévoir :

- une boîte de visée par groupe de quatre élèves (voir annexe 2) ;
- des tables sur lesquelles on peut écrire ;
- des feutres (à condition que les tracés soient facilement effaçables) ;
- des tasseaux en bois d'une longueur comprise entre 1,50 m et 2 m ;
- quelques allumettes en bois et du matériel (scotch, ou pâte à fixer) pour les coller sur le bord des tables ;
- des feuilles de papier blanc (format 21 × 29,7) de faible grammage ;
- du papier calque.

Précisons que les rapporteurs et les règles graduées ne sont pas autorisés, afin d'éviter tout recours aux mesures de grandeurs.

Déroulement :

La situation se déroule sur deux séances.

La première a pour but de présenter le problème aux élèves, de le leur faire chercher en travail par groupes, et enfin de procéder à une présentation collective des solutions trouvées, ainsi qu'à leur validation.

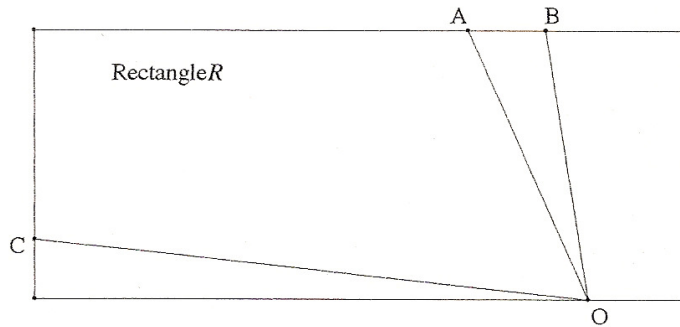
La deuxième est consacrée au rappel des solutions correctes et à l'institutionnalisation de la notion d'angle de demi-droites.

Les paragraphes suivants donnent une description de chacune de ces séances.

5.2. Première séance de la situation “Angles de visée”

1er temps : présentation collective du problème

Un point O est matérialisé sur le bord d'une longueur d'un rectangle R . Un point A est repéré sur l'autre longueur, à l'aide d'une allumette placée verticalement. En posant en O le viseur de la “boîte de visée”, le professeur vise et fait coïncider l'arête gauche de la face évidée de la boîte avec l'allumette placée en A . Une seconde allumette est placée en B , point qui coïncide alors avec l'arête droite de la face évidée.



Problème :

« Si, en posant en O le viseur de la boîte, et qu'en visant, l'arête gauche coïncide avec l'allumette placée en C , peut-on prévoir, sans utiliser la boîte de visée, en quel point D de la largeur serait située l'allumette coïncidant avec l'arête droite ? ».

Le professeur attend que soit proposé le report à partir de C d'une longueur égale à AB . C' est la seule proposition qui, à ce moment de l'activité, sera prise en considération.

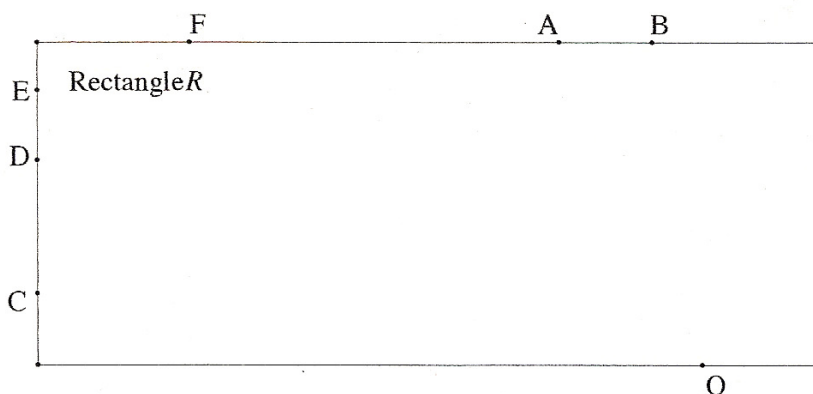
Cette proposition est expérimentée, et invalidée à l'aide de la boîte de visée : cette dernière permet de placer le point D qui convient, et le professeur fait constater qu'il est différent du point obtenu par les élèves en reportant la longueur AB à partir de C .

Il est essentiel que cette procédure ait été mise en défaut pour que les élèves acceptent de s'engager dans la recherche d'une autre procédure, travail qui leur sera demandé dans le deuxième temps.

Deuxième temps : par groupes autour de grandes tables accolées

Les élèves sont placés par groupes de quatre autour de tables (à deux places) accolées dans le sens de la longueur (ou de la largeur), sur lesquelles le professeur a placé une gommette indiquant la position du point O et deux allumettes indiquant celles des points A et C .

- D'abord, afin de se familiariser avec l'emploi du matériel, ils sont invités à utiliser la boîte de visée mise à la disposition du groupe pour placer les points B et D définis précédemment.
- Ensuite, le professeur vient placer sur les rectangles R de chacun des groupes un point E comme l'indique le schéma ci-dessous (en revanche le professeur ne dit rien au sujet du point F dont les élèves auront à anticiper la position, placé ici sur le schéma seulement à l'intention du lecteur) :



puis donne à chaque groupe la consigne suivante :

« Si, en posant en O le viseur de la boîte, et qu'en visant, l'arête gauche coïncide avec l'allumette placée en E , comment s'y prendre, sans faire de visée avec la boîte, pour déterminer en quel point F du bord serait située l'allumette coïncidant avec l'arête droite ? ».

Ensuite, s'adressant à l'ensemble des groupes, il précise les "règles du jeu", et en particulier le matériel que les élèves peuvent utiliser :

- le matériel habituel de géométrie ;
- les feuilles de papier blanc de faible grammage ;
- le papier calque ;
- les tasseaux de bois (un par groupe) ;
- des feutres pour tracer sur les tables (ou sur le papier qui les recouvre).

Il rappelle qu'il est interdit de viser avec la boîte, mais qu'ils peuvent l'utiliser pour prendre à son sujet les informations qu'ils veulent. Il annonce qu'elle servira plus tard pour voir si les méthodes trouvées sont bonnes ou mauvaises.

Un temps de recherche leur est ensuite laissé (10 minutes, pas davantage).

On ne leur demande pas de fournir une description écrite de leur méthode. Mais, chaque groupe est prévenu du fait qu'il devra déléguer un de ses membres pour venir expliquer à tout le monde, sur la table centrale, la méthode qu'il a trouvée.

Éventuelle mise en commun intermédiaire

Si besoin est, et en particulier dans le cas où aucun groupe ne produirait de réponse, le professeur veillera à organiser un moment de mise en commun, en invitant les groupes à :

- faire part des méthodes qu'ils sont essayées ;
- pointer ce qui n'a pas fonctionné ;
- pointer ce dont on est sûr (y compris les réponses fausses).

Ensuite, il fera une nouvelle dévolution du problème, en leur demandant ce qui est connu et que l'on peut utiliser (O , les points A et B , C et D obtenus à l'aide de la boîte de visée, le point E , et la boîte elle-même), question qu'il pourra formuler autrement, par exemple : "Où peut-on aller chercher des informations ?", en veillant à ce que la réponse attendue soit produite par les élèves : en utilisant le matériel autorisé, on peut tirer de l'information des

points déjà placés (A , B , C et D) ou de la boîte.

Troisième temps : présentation des productions et validation

Présentation des productions

Il serait souhaitable que ce troisième temps puisse avoir lieu dans la foulée des deux précédents, d'où la nécessité de ne pas passer trop de temps sur les deux premiers.

Le rapporteur de chaque groupe vient montrer sa méthode, à l'aide du matériel disponible sur la table centrale, et la commenter en même temps qu'il la met en œuvre. La position du point F obtenu par chacun des groupes est matérialisée.

Pour chacun d'eux, le professeur note sur une affiche le nom des objets géométriques sollicités en se limitant au vocabulaire effectivement employé par les élèves :

- segments de même longueur (mis en jeu dans les reports) ;
- arcs de cercle ayant pour rayon certaines longueurs ;
- angles “égaux” ou “superposables” (mis en jeu dans les reports d'angles).

Après qu'un groupe a présenté sa méthode, ceux qui ont employé la même ou une méthode voisine sont invités à n'en présenter que les différences, afin de gagner du temps.

Phase de validation

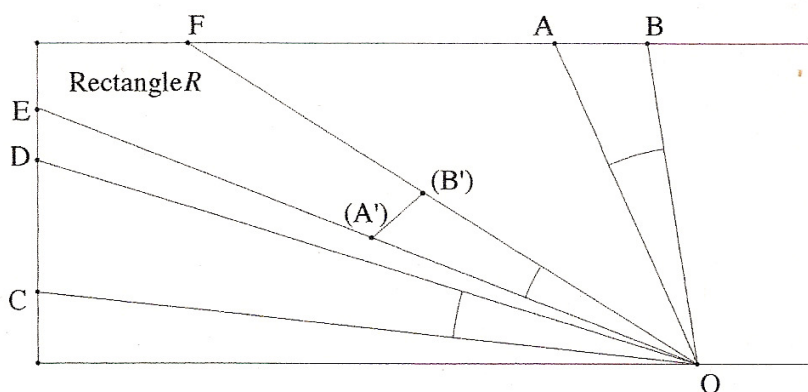
Il s'agit d'une validation matérielle, utilisant la boîte de visée. Elle permettra de déclarer comme acceptables des points “voisins” du point attendu, compte tenu de l'imprécision de certaines manipulations.

5.2. Deuxième séance de la situation “Angles de visée”

Premier temps : rappels des procédés corrects validés en séance 1

Deuxième temps : institutionnalisation

Le professeur aura préparé, entre les deux séances, un transparent à rétroprojeter reproduisant les tracés réalisés sur le rectangle R pour chacun des procédés évoqués durant le premier temps, en utilisant une couleur par procédé. La rétroprojection sera faite de façon à ce que les tailles des images obtenues soient voisines des tailles réelles.



En ce qui concerne la boîte de visée, le professeur pourra reproduire sur un autre transparent le(s) gabarit(s) utilisé(s) (cf. schéma ci-dessous), ou directement positionner la boîte de visée au tableau à l'endroit où l'angle de visée doit être reporté. Les points G et H utiles pour indiquer l'angle de visée seront placés, selon le cas, sur le transparent ou directement au tableau :



Les tracés effectués sur le rectangle font apparaître quatre exemplaires d'un même objet géométrique, qui sont tous égaux (ou superposables) à l'un d'entre eux, ici à celui qui apparaît dans la boîte de visée. On les appelle des angles. Pour mieux les identifier sur les figures, on les marque à l'aide d'un arc de cercle centré en leur sommet, le codage des angles étant réalisé à main levée plutôt qu'au compas, conformément aux habitudes.

Le professeur pourra signaler que, pour pouvoir parler de ces angles, dans les pays anglo-saxons, on utilise les notations (ou écritures) suivantes :

$$\angle AOB, \angle COD, \angle EOF, \angle GOH,$$

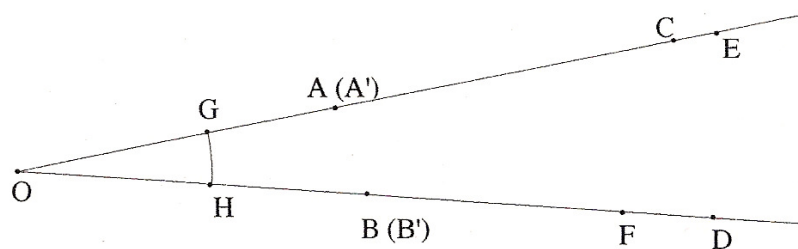
le symbole \angle évoquant de manière assez suggestive un angle, et qu'en France, on préfère le symbole du chapeau que l'on écrit au-dessus des lettres désignant les points (symbole figurant un angle ... obtus), et il donnera les notations de ces mêmes angles avec ce symbole.

La situation devrait permettre la formulation par les élèves de l'idée selon laquelle l'égalité de deux angles n'a rien à voir avec les longueurs de leurs côtés respectifs. Si cela ne se produit pas, le professeur pourra superposer l'angle GOH à chacun des angles AOB , COD et EOF .

Puis, à partir de photocopies "papier" du transparent utilisé précédemment, il demandera à quelques élèves de découper les parties du rectangle délimitées respectivement par les (triplets de) points A, O, B ; E, O, F ; A', O, B' ; C, O, D . (Il évitera de parler de triangles, car la partie délimitée par les points E, O et F est un quadrilatère).

Ensuite, ayant préparé un transparent sur lequel est reproduit l'angle GOH , il superposera successivement sur l'angle GOH les angles AOB , COD et EOF , en marquant à chaque fois

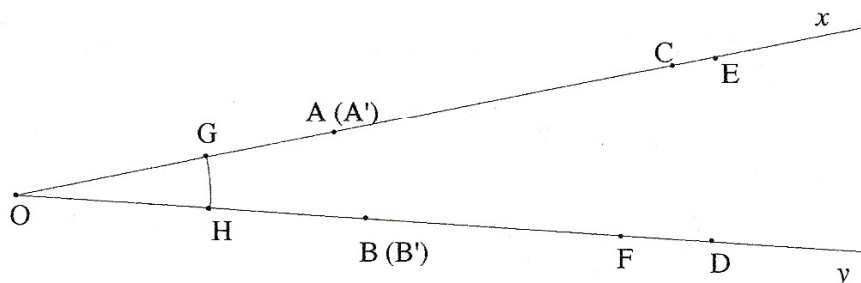
l'emplacement des points A, B, C, D, E, F : l'alignement des points G, A, C et E d'une part, des points H, B, D et F d'autre part apparaîtra, comme l'indique le schéma ci-dessous (qui est cohérent avec ceux qui précèdent du point de vue des longueurs de côtés) :



cé qui permettra de bien mettre l'accent sur "l'ouverture entre les deux côtés", dont veut rendre compte la notion d'angle, qui est ici la même pour chacun d'eux, alors qu'il n'en est pas de même pour les longueurs de côtés.

La transition avec les demi-droites peut se justifier en s'appuyant sur cette idée d'indépendance de l'angle par rapport à la longueur de ses côtés : une bonne manière de l'exploiter, *en théorie du moins*, consiste à faire que ces côtés aient une longueur infinie, c'est-à-dire à remplacer les segments d'origine commune O par deux demi-droites. Cet aspect théorique reste assez facile à admettre lorsqu'on parle justement d'angle de visée, car l'on peut regarder aussi loin que l'on veut... à l'infini ...

Le schéma ci-dessous permet d'expliquer qu'au lieu de parler de l'un des quatre angles AOB, COD, EOF et GOH , on peut tout aussi bien parler de l'angle des deux demi-droites Ox et Oy , angle que l'on pourrait noter $\angle xOy$, mais que l'on notera xOy "avec un chapeau", conformément aux conventions usuelles en France.



Cinquième temps : réinvestissement / entraînement

Le professeur proposera aux élèves des exercices des deux types suivants :

1. Reconnaître des angles égaux :

- à l'œil ;
- puis avec un instrument (gabarit, papier calque).

2. Tracer à main levée, puis à l'aide d'instruments (gabarit, papier calque) un angle égal à un angle donné, d'abord sans aucune contrainte, puis en imposant le sommet de l'angle et enfin, un côté de l'angle.

6. CONCLUSION : RETOUR SUR LES HYPOTHESES DE LA RECHERCHE

Résumons à l'aide d'un tableau les démarches adoptées dans les deux situations exposées dans les paragraphes 4. et 5.

Situation "Cercle"	Situation "Angles de demi-droites"
Étude d'un même problème (construction d'un triangle équilatéral) dans plusieurs milieux successifs, auxquels sont attachés des modes de validation (élèves) différents	Étude d'un problème dans un milieu privilégié (changement d'espace : on sort de la feuille de papier)
Prise de recul par rapport à ces différents milieux : rédaction d'une procédure qui convient indépendamment du milieu, ce qui conduit à l'évocation de l'objet cercle.	dont la solution nécessite l'objet "angle de demi-droites", quelle que soit la procédure matérielle de résolution choisie.
À partir d'un autre problème, mise en place de la propriété caractéristique de l'objet "cercle".	Validation matérielle.
Retour sur le problème de construction initial : justification de la procédure (indépendante du milieu) formulée précédemment, convoquant les énoncés caractérisant le cercle.	Le professeur met en évidence que l'objet "angle" est commun à toutes les stratégies de résolution, et justifie le choix de demi-droites comme "côtés".

Notre hypothèse initiale de recherche consistait à créer le besoin de géométrie théorique en organisant l'étude de problèmes de construction dans une succession de différents milieux, et en recherchant une justification des techniques de construction qui soit indépendante du milieu.

En ce qui concerne la situation "Cercle", l'expérimentation a montré que cette hypothèse est nécessaire pour assurer une distinction claire entre la géométrie perceptive et instrumentée pratiquée à l'école primaire et la géométrie théorique introduite au début du collège, mais qu'elle n'est pas suffisante. En effet, l'activité 2, qui n'était pas prévue dans la progression au début de notre recherche, a dû y être introduite pour que le retour à la constructibilité du triangle équilatéral (activité 3) puisse fonctionner dans les classes avec une participation réelle des élèves. Sans l'activité 2, le seul effet bénéfique du changement de milieu (et il n'est pas négligeable !) a été d'installer le vocabulaire mathématique (usage du mot "cercle" sans obligatoirement faire référence à un instrument matériel). En revanche, le fait de devoir faire

