PAVAGE DU PLAN PAR DES QUADRILATÈRES

Marc PICOT
IREM de Lille

Celui qui exprime une opinion se compromet
G. Polya

Donner aux élèves la conviction qu'une émonstration est nécessaire n'est pas une ince affaire. La certitude du vrai est une uête permanente. Pour le professeur, la émonstration apporte cette certitude. Iais qu'en est-il pour les élèves ? L'intime onviction leur suffit. Comment les amener surpasser cette intime conviction ?

J'ai eu la chance de lire quelques travaux e N. Rouche, et j'ai un faible pour son aricle : "Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?" (Actes du colloque e la commission épistémologie à Besançon n 1989). On trouve dans cet article un clairage qui décrit assez simplement comnent l'apprenti mathématicien progresse à ravers le difficile apprentissage de la dénonstration.

Je renvoie donc le lecteur à cet article. En résumé, l'apprentissage du raisonnement passe par trois étapes, trois niveaux de raisonnement.

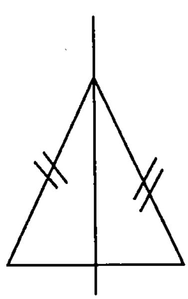
1) L'intelligence des situations, qui permet de résoudre un problème sans recours au raisonnement ; le problème est résolu par une ou des actions concrètes immédiates.
2) La pensée discursive. Les actes ne suffisent plus ; la résolution du problème nécessite un discours justificatif, avec des mots, des symboles, des relations. C'est par exemple le cas pour une situation qu'on veut reproductible, ou qui pourra être étendue à une classe de problèmes.
3) Le raisonnement hypothéti-

co-déductif, qui serait le produit fini de la pensée.

Le premier point est une situation qui amènera l'élève à raisonner. Devant un problème, la situation lui semblera souvent évidente. Son intuition lui suffira. Pourquoi une situation relève-t-elle de l'évidence ? N. Rouche propose deux règles pour accepter une proposition comme évidente (intuition sûre) :

a) on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier.
b) la pensée peut s'engager sans accroc dans l'imagination de tous les cas possibles.

Il donne l'exemple de la médiatrice (droite perpendiculaire à un segment en son milieu) : la médiatrice est le lieu des points situés à égale distance des extrémités du segment. Le dessin permet l'acception de l'évidence.



Pour les élèves, toutes leurs intuitions sont sûres : "ça se voit sur la figure" "les droites sont *forcément* perpendiculaires". L'élève se laisse porter par le cas particulier de son dessin, et il n'est pas prêt à envisager tous les cas possibles. Engager les élèves à formuler leurs intuitions, c'est les engager dans le raisonnement ; puis fair apparaître que ces intuitions sont hasar deuses, c'est les inviter à la nécessaire dé monstration. Cette démonstration qui le entraînera dans la deuxième étape : le dis cours. Dans un premier temps, les exigen ces du discours doivent rester modestes.

Il semble qu'au Collège ces première étapes de l'apprentissage ne soient pas su fisamment développées. On passe trop vit à une exigence de formulation et de réda tion, sous quelque forme que ce soit. Pou apprendre à démontrer, il faut d'abord ap prendre qu'il faut démontrer. Et pour cela il faut inviter les élèves à s'engager dan leurs intuitions, qu'elles soient hasardeu ses ou non.

L'activité suivante a été proposée à de élèves de cinquième et de quatrième ave des niveaux d'exigence différents :

Peut-on paver le plan avec des quadril tères ? (1)

Pour les élèves, le problème est vite rés lu : "il n'y a qu'à prendre des carrés, ou de rectangles". Pour beaucoup d'élèves, le pr blème est donc terminé, puisqu'on a répo du à la question posée. Il faudra donc fai rebondir le problème ; en proposant de quadrilatères quelconques, la plupart pe sent que la réponse est en général négativ Le but de cette activité est de faire app raître, en confrontant les points de vue c chacun, que l'intuition, parfois sûre, ne su fit pas.

(1) Notons que si on pose la question à des adulte les réponses sont très diverses, même chez l matheux.

PROBLÈME :

"Peut-on paver le plan avec n'importe quel quadrilatère ?"

Principes de l'activité :

1) Manipuler :

A partir de manipulations (ici on manipulera des quadrilatères découpés dans du carton ou du papier fort), l'élève se forge une conviction ; il arrivera à remplir une surface avec une dizaine de plaques superposables. Deux questions se posent alors : "Est-ce que ça marchera avec une autre forme ? "Est-ce que mon voisin, qui a une forme différente de la mienne, y arrivera aussi bien que moi ?" Peut-on être sûr que nos manipulations n'induisent pas d'erreurs ?

Par la manipulation, tous les élèves rentrent, plus ou moins rapidement et avec plus ou moins de bonheur, dans la problématique.

2) Analyser, idéaliser :

Les élèves trouvent comment disposer les quadrilatères pour recouvrir le plan, ou, plus simplement, leur feuille. Mais le discours se résume souvent à "je prends une forme et je la mets comme çà, et je recommence". Dans un premier temps, le discours n'est qu'oral, avec toutes les imprécisions de langage des élèves. La synthèse les amènera à relier les objets manipulés à des objets mathématiques, les phrases prendront forme. La manipulation est fondamentale. Beaucoup d'élèves au début du Collège ont une vision globale de la figure manipulée : ils voient les quadrilatères comme des plaques, des blocs. C'est la démarche mathématique qui va les amener à analyser, à regarder le quadrilatère par ses sommets ou ses côtés.

Cette étape met en relief la nécessité de préciser des concepts supposés "simples", tels : quadrilatère, sommet, côté, diagonale, ou plus "sophistiqués", tels : parallélogramme, symétrie centrale.

3) Démontrer, valider :

La démonstration n'est pas ici un moyen d'établir le vrai. La classe est certaine du vrai. Nous allons donc, en démontrant, démonter les mécanismes mis en jeu pour réaliser le projet. Les élèves feront fonctionner leurs connaissances, ils les compléteront et les affineront.

L'activité :

1) Manipulation :

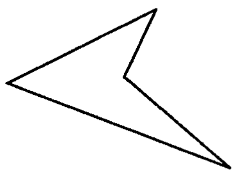
Les élèves travaillent en groupes ; chaque groupe reçoit une dizaine de quadrilatères, tous superposables, découpés dans du carton ou du papier fort.

> La consigne : *Vous avez reçu une dizaine de quadrilatères* (2) *tous superposables. Si nécessaire, vous pouvez en fabriquer d'autres, superposables à ceux reçus.*
>
> *A votre avis, pouvez-vous recouvrir le plan avec ces quadrilatères ? Il ne doit pas y avoir de trous et ils ne peuvent pas se chevaucher, même un tout petit peu.*

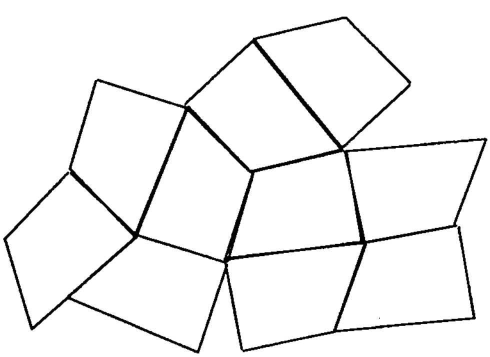
Dans un premier temps, on propose aux élèves des quadrilatères convexes. On proposera des non convexes pour les élèves qui sont en avance.

(2) Les quadrilatères croisés sont exclus provisoirement.

Choix des quadrilatères :



Chaque groupe reçoit un type de quadrilatères différents des autres groupes. On prendra garde que certaines configurations de quadrilatères peuvent conduire les élèves vers des issues bloquées. Si un angle du quadrilatère est diviseur de 360°, par exemple 72°, on peut mettre 5 quadrilatères autour de ce sommet et rester bloqué. Si le quadrilatère a trois côtés égaux, il est assez facile d'en disposer 10 en ayant l'impression que le plan ne sera pas rempli (3). Il faut préciser que, dans un premier temps, les élèves procèdent par tâtonnements, ils manipulent les formes de manière très erratique : ils les posent d'abord au petit bonheur la chance. Ensuite, ils pensent à les tourner et à les retourner ; la symétrie par rapport à un côté apparaît très souvent. On obtient alors des travaux qui n'aboutissent pas, du type de la figure ci-dessous.



(3) Je dois cette remarque à Marie-Jeanne Perrin.

Ils finiront par trouver le principe du d mi-tour, mais ils auront beaucoup de diff cultés à préciser autour de quel point.

Fin de la première étape :

Voir en annexe trois productior d'élèves, qui caractérisent bien la situatic de la classe à la fin de l'heure :

– ceux qui n'ont rien fait (c'est rare av cette activité).
– ceux qui remplissent la page l'exemple proposé (annexe 1) est le tr vail d'un des élèves les plus faibles de classe. Il a procédé en décalquant, en servant d'une forme comme gabarit. reste à l'aider à expliciter sa démarch en analysant ses gestes, et à lui propos de trouver les constructions.
– ceux qui tentent une explication de démarche, du genre "tourner autour c milieu" (annexe 2)
– ceux qui s'engagent dans une réflexi profonde (annexe 3) : l'exemple propo est produit par un groupe où travailla une des meilleures de la classe. Noton à part son orthographe catastrophiq (c'en est parfois drôle), que sa conclusi est une *hypothèse* : elle *fait l'hypothè que* "cela revient au même".

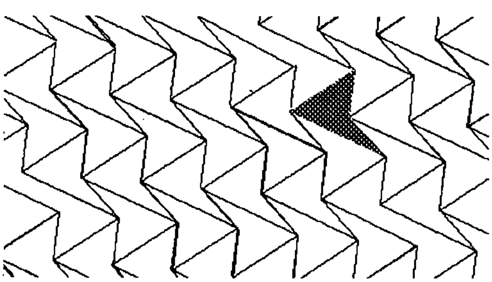
2) Mise en commun :

Les élèves présentent leur solution : i recouvrent le rétroprojecteur avec leu formes. Le professeur leur deman d'expliciter leurs gestes. On arrive ainsi formuler que, un quadrilatère étant pos le voisin se pose comme si on faisait faire demi-tour à celui qui est posé autour du n lieu d'un de ses côtés. On place ainsi pl sieurs quadrilatères. Les élèves ne voie pas encore qu'il suffit d'en placer quatre ue le reste du pavage se déduira de cette remière configuration par translation. En énéral, ils refont la même manipulation our placer chaque quadrilatère. On trouve à une attitude fréquente des élèves de Collège : "quand ça marche, je fais comme ça et uis c'est tout !"

) *Validation :*

"Nos manipulations nous permettent-elles de conclure que nous pouvons paver le plan avec n'importe quel quadrilatère ?"

Cette question provoque l'analyse des ıanipulations, avec une "traduction" en termes mathématiques" : l'objet n'est plus n morceau de carton, mais un quadrilatère. Ce passage de l'objet manipulé à objet mathématique intéresse les élèves ; est un bon moyen de les amener à raisonner. Le demi-tour autour du point est une ymétrie centrale. La symétrie va entrer en ction, agir sur les sommets, sur les côtés es quadrilatères. On utilisera les caractéistiques de ces "objets mathématiques" longueur, parallélisme). Quand le pavage era terminé, on verra apparaître un nouel outil : la translation. Il est à noter que es quadrilatères non convexes font apparaître plus facilement cette idée de translaion :



Des élèves de cinquième ont vu des parallèles pour terminer plus rapidement leur pavage : l'idée de "glissement" commence à émerger. Par contre, cette idée n'est jamais apparue *a priori* pour terminer le pavage.

4) Formalisation :

L'action de la symétrie sur le polygone nous amène *nécessairement* à mettre les points en correspondance. La notation $A \to E$ n'est qu'une disposition pratique qui montre que le point A a pour correspondant le point E. La mise en correspondance entre les points est précieuse pour utiliser les théorèmes sur les transformations. Elle permet de mettre en correspondance des objets, parfois sophistiqués, afin de les comparer. On peut par exemple utiliser un tableau :

un point	A	B	D
son symétrique	E	F	C

On peut facilement affirmer, grâce à la conservation des longueurs, des angles, des aires, etc., des choses comme AB = EF, angle BAD = angle FEC, aire de ABD = aire de EFC, (AB) // (EF)...

L'idée n'est donc pas d'étudier la symétrie en tant que transformation ponctuelle, mais de proposer des indices, des repères, qui permettent de s'assurer que deux figures sont bien en correspondance.

5) Tentative de démonstration :

Mise en place :

On nomme le quadrilatère de départ ABCD, I_1 le milieu de [BC] et on appelle S_1

la symétrie de centre I_1. On construit les images des points A, B, C et D.

$A \rightarrow E$
$B \rightarrow C$
$C \rightarrow B$
$D \rightarrow F$

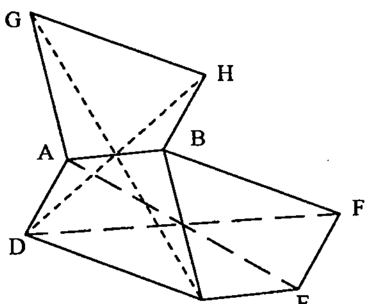


Figure 1

De même avec I_2 milieu de [AB] :

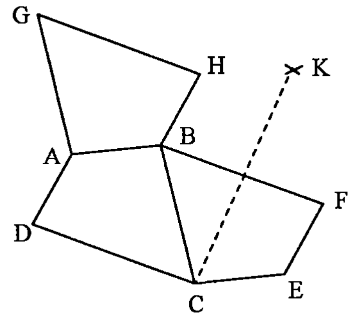
$A \rightarrow B$
$B \rightarrow A$
$C \rightarrow G$
$D \rightarrow H$

Reste à terminer le pavage. Les élèves ne doutent pas qu'un quatrième quadrilatère terminera tranquillement le pavage autour du point B.

Ils ne pensent pas encore que ce pavage autour du point B termine complètement le problème : le plan est pavé.

La démonstration :

Elle ne servira pas à convaincre les élèves du vrai, mais va leur montrer pourquoi la construction du point K, symétrique de C par rapport au milieu de [BF], termin (presque) le problème.



Soit I le Milieu de [BF] et S la symétrie c centre I.

$B \rightarrow F$
$F \rightarrow B$
$C \rightarrow K$
$E \rightarrow ?$

C'est en essayant de construire le sym trique de E que les élèves se posent la que tion : ce symétrique est-il bien le point H

Exercice :

Avec les données précédentes (voir figu 1), montrer que :

ADEF est un parallélogramme (4)
ADBH est un parallélogramme

En déduire que BHFE est un parallél gramme.

En déduire que H est le symétrique de par rapport à I.

(4) Certains professeurs contesteront l'utilisation théorème : si un quadrilatère non croisé a deux c tés opposés parallèles et égaux, alors c'est un p rallélogramme. Bonne contestation, donc...

Pour les plus forts, avant de conclure :

Exercice :

On a construit le quatrième quadrilatère en utilisant une symétrie de centre le milieu de [BF]. Montrer qu'on obtient le même quadrilatère en utilisant le milieu de [BH].

Maintenant qu'on a rempli le plan autour du point B, il est évident (!) qu'on peut recommencer autour des autres points. On a compris comment placer les quadrilatères et pourquoi le pavage est bien fait, sans chevauchement et sans trou.

6) Variante sur quadrillage :

Mon copain Bernard Cazier propose cette même activité sur un quadrillage.

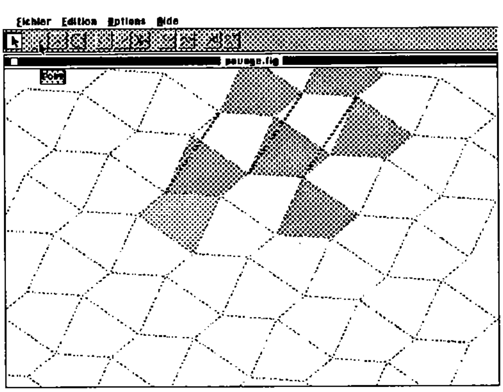
Remarque préliminaire : Soit S une transformation, du type translation ou symétrie centrale, qui transforme un nœud du quadrillage en un autre nœud de ce quadrillage. Alors, tout point du quadrillage est transformé en un point du quadrillage.

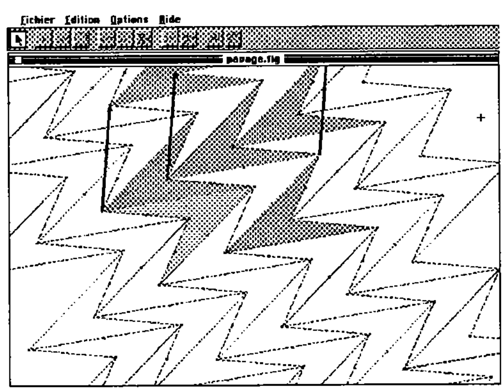
Grâce à cette remarque, le quadrillage permet des ajustements. En effet, les constructions à la règle et au compas provoquent des petites erreurs qui s'amplifient avec les itérations. Le quadrillage permet de tricher un peu : si l'image d'un nœud tombe au voisinage d'un nœud, on la placera exactement sur ce nœud.

Utilisation de Cabri :

L'utilisation des menus “Polygone”,“Milieu”,“Symétrique” est très simple. Elle permet un réinvestissement de l'activité ; l'utilisation des commandes permet une formulation précise de l'action menée sur la feuille de papier.

La poignée permet de visualiser toutes sortes de formes de pavage, en déformant le polygone initial *(figures ci-dessous).*





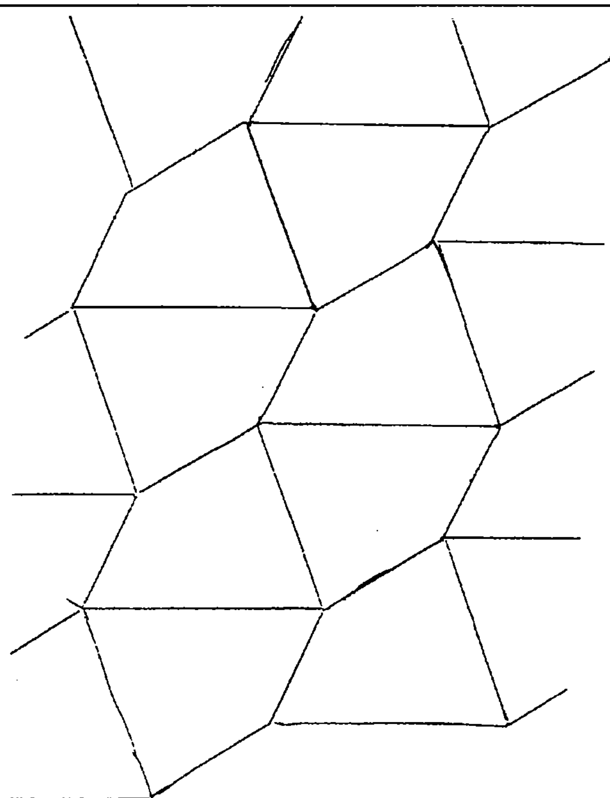
Conclusion

L'élève de Collège est comme tout le monde : il n'aime pas que ses convictions soient ébranlées, remises en cause. Des activités de ce type, où l'élève commence par manipuler, l'invite à se forger une opinion, juste ou erronée. La manipulation est un prétexte fort pour s'investir. A travers ses errements, ses trouvailles, l'élève, guidé par le professeur, arrivera au questionnement. Le doute est là. Le pourquoi fait son apparition. La démonstration va lever les doutes, en faisant éventuellement changer d'avis.

De plus, elle est un moyen fort pour af fermir les connaissances mathémati ques [5]. Si, grâce à cette activité, les élève ont senti que le doute est nécessaire, que l: justification étaye les propositions, si pa la démonstration ils confortent les notion qu'ils doivent acquérir, alors, le professeu verra ses élèves s'engager sans complexe dans des démonstrations.

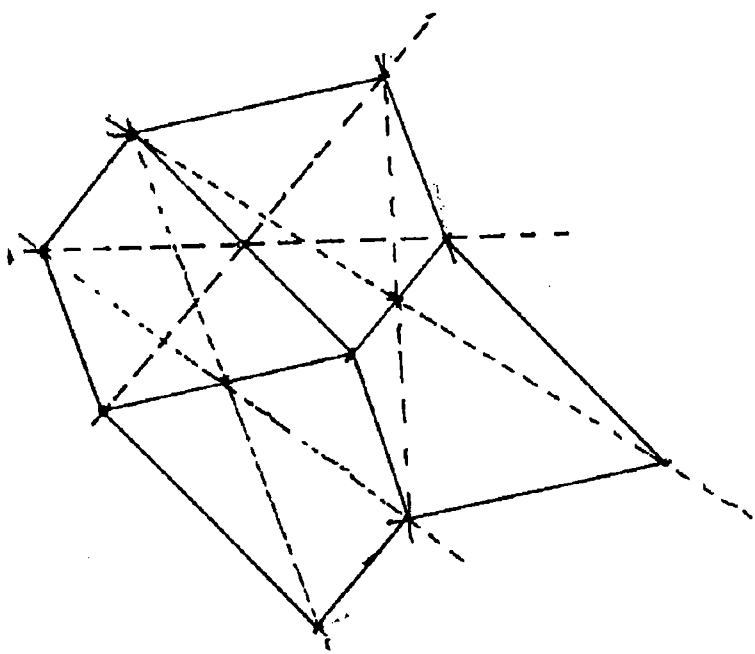
(5) Dans une note de "Preuves et réfutations", Laka tos fait dire par Polya que *la preuve, même incon plète, établit des connexions entre des faits ma thématiques, ce qui nous aide à les garder en mé moire.*

Annexe 1



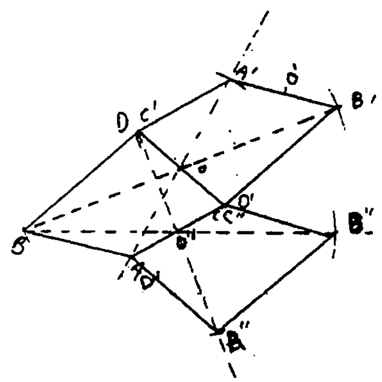
Annexe 2

Pour qu'il n'y ait pas de trou
Il faut que les pièces s'emboitent toujours
pour cela il faut prendre un cotés du
quadrilatère , prendre le millieu de ce
coté et faire faire un demi tour à la pie



Annexe 3

~~On a un quadrilatère ABCD. Pour pouvoir paver le pla
avec nous avons proposé de tracé le symetrique du quadri-
latère ABCD par rapport au point O milieu du segment[DC].
Puis ensuite, tracé le symétrique de A'B'C par rapport à O', mi
de A',B'. Et ainsi de suite (continuer la ligne). Ensuite, pou
faire la ligne en dessous, tracer le symetrique de B' par rap
port à O', milieu du segment AC. puis reconstruire le quadrilatèr
A''B''C''D''~~



Un problème se pose : arrivé là, quel symetrique faisons no
Celui de A'B'C'D' ou celui de A''B''C''D'' ?
hypot. = cela revient au même

elles sont symetriques par rapport au
milieu du côté. ensuite faire le symétrique
par rapport à un <u>autre</u> coté

Est-ce que je peux paver le plan avec des quadrilatères ?