# Différentes géométrie Différents niveaux de géométrie

IREM 2012-2013

Ce que les programmes de l ’école appellent « géométrie » renvoie à deux champs de connaissances :

- les connaissances que l ’on va qualifier de « spatiales »
- les connaissances que l ’on va qualifier de « géométriques »

cf Berthelot et Salin

# Géométrie

# Les connaissances spatiales

Celles qui permettent à tout individu de contrôler **perceptivement** ses rapports à l ’espace et de résoudre un certain nombre de problèmes comme :

- se repérer, se diriger
- recueillir, mémoriser, communiquer des informations liées à des objets, des positions, des déplacements ...

# Les connaissances géométriques

Elles se réfèrent à un savoir mathématique, relatif à des concepts **théoriques**, organisés autour de définitions et théorèmes

Elles permettent de résoudre

- des problèmes spatiaux par l'intermédiaire d'une modélisation
- des problèmes théoriques en s'appuyant sur des représentations

# Problème du vitrier

Un artisan doit remplacer une vitre dans une fenêtre: la vitre a la forme d’un parallélogramme.

Il prend des mesures pour faire un cadre en bois ;

Il compare ce gabarit à la fenêtre

Ajuste la forme

Découpe la vitre en suivant le gabarit.

Dans une pièce « rectangulaire » on souhaite tendre un fil entre deux sommets opposés du plafond de cette pièce. Comment déterminer la longueur du fil ?

# Trois modes de résolution

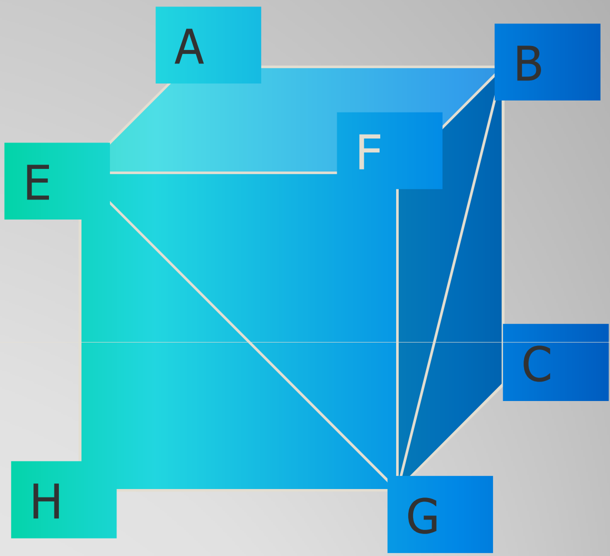
- ✓ Résolution "pratique", avec un fil et un escabeau…
- ✓ Résolution "pratique", sur le papier, avec *modélisation* des objets ou sur une maquette en 3D

(pièce = différents rectangles, ficelle = droite et règle pour mesurer)

- ✓ Résolution plus mathématique, avec mesurage et utilisation de propriétés issues de la théorie géométrique (théorème de Pythagore)

# Connaissances spatiales ou géométriques ?

- Essaie de prévoir, à partir du dessin en perspective du cube, la nature des triangles
  - EFG?
  - BFG?
  - AFB?




Et EBG ?

Les connaissances spatiales sont nécessaires à la résolution de problèmes géométriques.

# Les connaissances géométriques étudiées à l'école

9

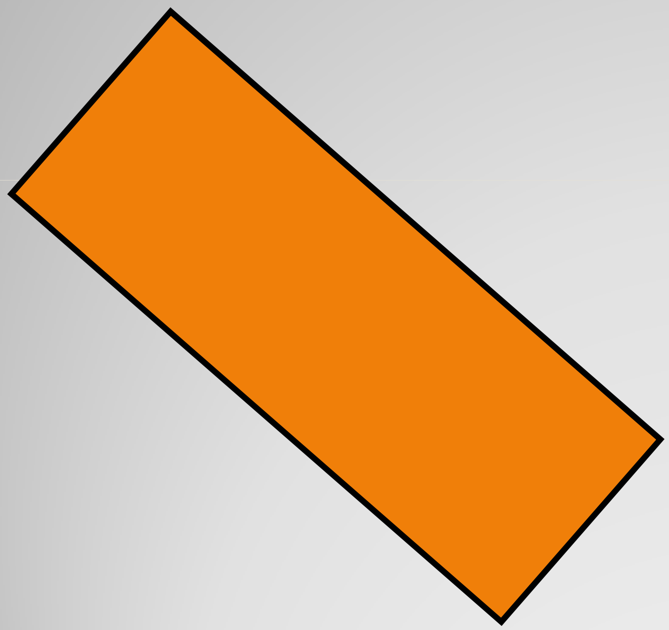
- **Les relations et propriétés géométriques :** alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, axe de symétrie, milieu d'un segment.
- **Les figures planes :** le carré, le rectangle, le losange, le parallélogramme, le triangle et ses cas particuliers, le cercle .

# Typologie dans le domaine sensible

*Proposée par Brousseau, développée par Berthelot et Salin.*

- *Le micro-espace*
  - L'espace proche dans lequel l'élève peut déplacer l'objet, le voir sous toutes ses dimensions. L'élève est à l'extérieur de cet espace dont il a une vue d'ensemble.
- *Le méso-espace*
  - L'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue (entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet). Les objets fixes sont des références.
- *Le macro-espace*
  - L'espace éloigné accessible seulement de manière locale. Nécessite une décentration pour intégrer des représentations fragmentaires.

# Est-ce un rectangle ?



Oui, parce que :

Je le vois

Si, je tourne la tête, je le vois

J’ai vérifié que ses angles sont droits à l’aide de l’équerre

Tu m’as dit que c’est un quadrilatère qui a trois angles droits

# La géométrie de l'école au collège

## C1 et C2

- Géométrie de la **perception**
- Est vrai ce qui est "vu" comme tel
- Boîte à outils : **l'œil**

## Fin C2 et C3 et 6ème

- Géométrie **instrumentée**
- Sont vraies les propriétés contrôlées à l'aide d'instruments
- Boîte à outils : **instruments**

## Collège (à partir de fin 5ème)

- Géométrie **déductive**
- Est vrai ce qui est démontré
- Boîte à outils : **théorèmes**

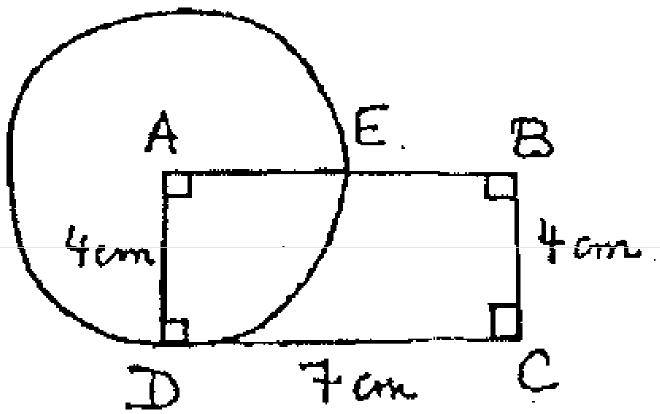
Sur ce dessin à main levée (les vraies grandeurs sont écrites en cm). On a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.

Trouve la longueur du segment [EB] :

……………………………

Explique ta réponse :

………………………………




Adrien : 1 cm 8 *(j'ai mesuré)* ***16,6 %***

Victor : 3,5 cm *(le cercle est au milieu du segment)* ***26,3%***

Lise : 3 cm *(car 7 cm – 4 cm = 3 cm)* ***10,3 %***

# Le quiproquo

**Le maitre attend une résolution mathématique**

- Une analyse de la figure (schéma)
- Une prise en compte des informations données
- Une utilisation des propriétés des figures
- Un raisonnement

**L’élève répond par une résolution pratique**

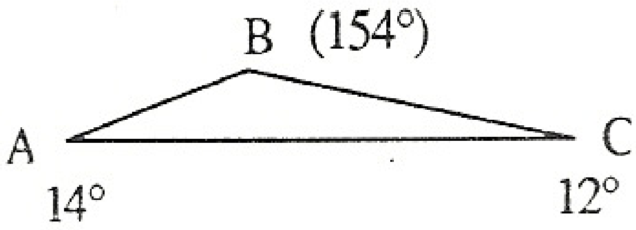
- Mesure sur la figure
- Prend des informations sur la figure qui ne sont pas celles explicitées, mais seulement perçues

# Un problème de construction

- Tracer un triangle dont les côtés mesurent 12 cm, 7 cm et 3 cm.
- Tracer un triangle dont les côtés mesurent et 9cm, 4cm et 5cm.
- Tracer un triangle dont les côtés mesurent et 4cm, 5cm et 9cm.

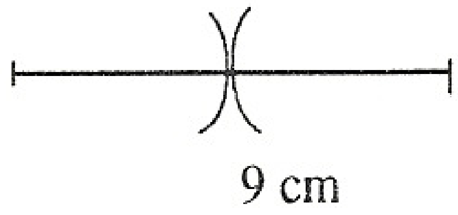
**A**

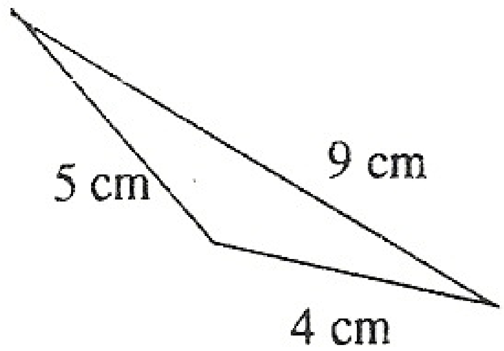
Oui il existe un triangle aux côtés 5 cm, 9 cm, 4 cm, car on a regardé si on pouvait créer ce triangle. Et on a réussi à le faire en obtenant les angles suivants : 14°, 154°, 12° .




**B**

Trois élèves pensent que le triangle est possible si on commence par tracer le segment de 4 cm, mais qu'il est impossible si on trace le segment de 9 cm en premier.



## C

Nous trouvons que ce triangle n'est pas réalisable car : nous prenons pour base le côté de 9 cm, puis nous additionnons les deux autres côtés (5 + 4 = 9), puis nous superposons ces deux segments.

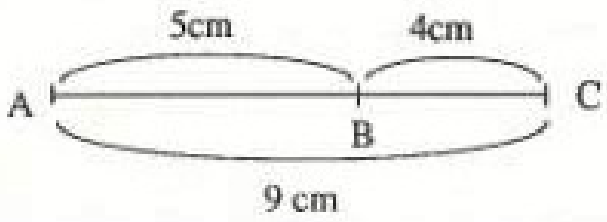
Si le total des deux autres avait été supérieur à la base, (ex base 14, côtés 9+7=16). Dans ce cas, ils ne se seraient pas superposés, ce qui aurait voulu dire que le triangle était réalisable. (position de deux élèves)

On a réussi à faire ce triangle mais au pif, on n'a pas de preuves. (position de deux élèves)

## F

Oui, il existe pas un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm, 4 cm.

Dessin




Échelle : $\frac{1}{2}$

Conclusion : on constate que c'est un triangle plat.

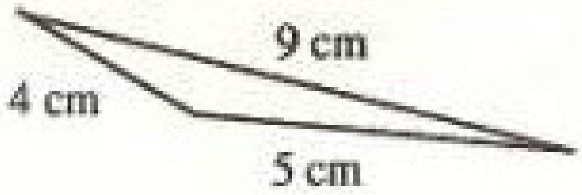
Le triangle ABC a trois côtés (BC = 9 cm ; BA = 5 cm ; AC = 4 cm) et trois sommets : A, B, C. Les angles ont une somme de 180°.

**D**

Non, il n'existe pas car si on additionne les deux plus petits nombres des trois, cela donne le même nombre que le troisième.

Il faudrait que les deux plus petits nombres donnent un chiffre plus grand que le troisième. Exemple : 9 cm, 5 cm, 6 cm (5+6=11).

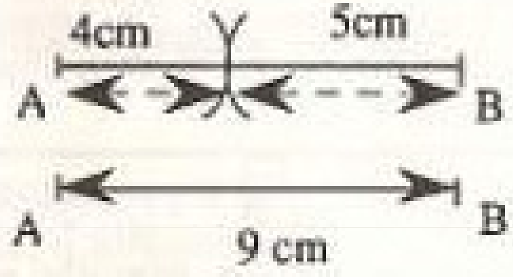
Un élève du groupe : je ne suis pas d'accord avec eux, parce qu'en faisant le triangle avec ces mesures, j'arrive à le faire.




**E**

Non, il n'existe pas de triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm, 4 cm.

Raison :




On trace un segment [AB] de 9 cm. On part de A, on trace un arc de cercle de 4 cm de rayon et on part de B, on trace un arc de cercle de 5 cm de rayon. Le point de rencontre est C, il se retrouve sur le segment [AB]. On n'obtient pas un triangle.

# Trois modes de résolution

- **Résolution pratique :** dessin du triangle à l'aide du compas et constat :
  - Les arcs de cercle sont tangents, le triangle est plat
  - Les arcs de cercles sont sécants, je trace le triangle, il existe bien
- **Résolution mathématique :**
  - 5 cm + 4 cm = 9 cm, on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, le triangle est donc plat

# Différentes démarches pour résoudre un problème

- Résolution pratique : elle met en œuvre la perception et des actions et des compétences purement spatiales
- Résolution pratique qui s'appuie sur des modélisations de l'espace qui nous entoure et qui utilise des propriétés du modèle théorique (pratico-mathématique)
- Résolution par un raisonnement théorique mathématique (démonstration)

# Les types de géométrie
## Houdement et Kuzniak 1996

| | Géométrie Empirique Niveau I | Géométrie Théorique Niveau II |
|---|---|---|
| Intuition | Sensible et perceptive | Liée aux figures |
| Expérience | Liée à l’espace mesurable | Schéma de la réalité |
| Déduction | Proche du réel et liée à l’expérience par la vue | Démonstration basée sur des axiomes |



C. Houdement A. Kuzniak dans Petit X n°51

# Intuition

- Fournit au sujet:
  - Une théorie première basée sur un lot d'évidences
  - Un socle pour le raisonnement
- Est une source de découvertes.
- Peut être vue comme un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions.
- Non stable, évolue grâce aux expériences.
- ***Exemple*** : « par 2 points distincts, il passe une seule droite »

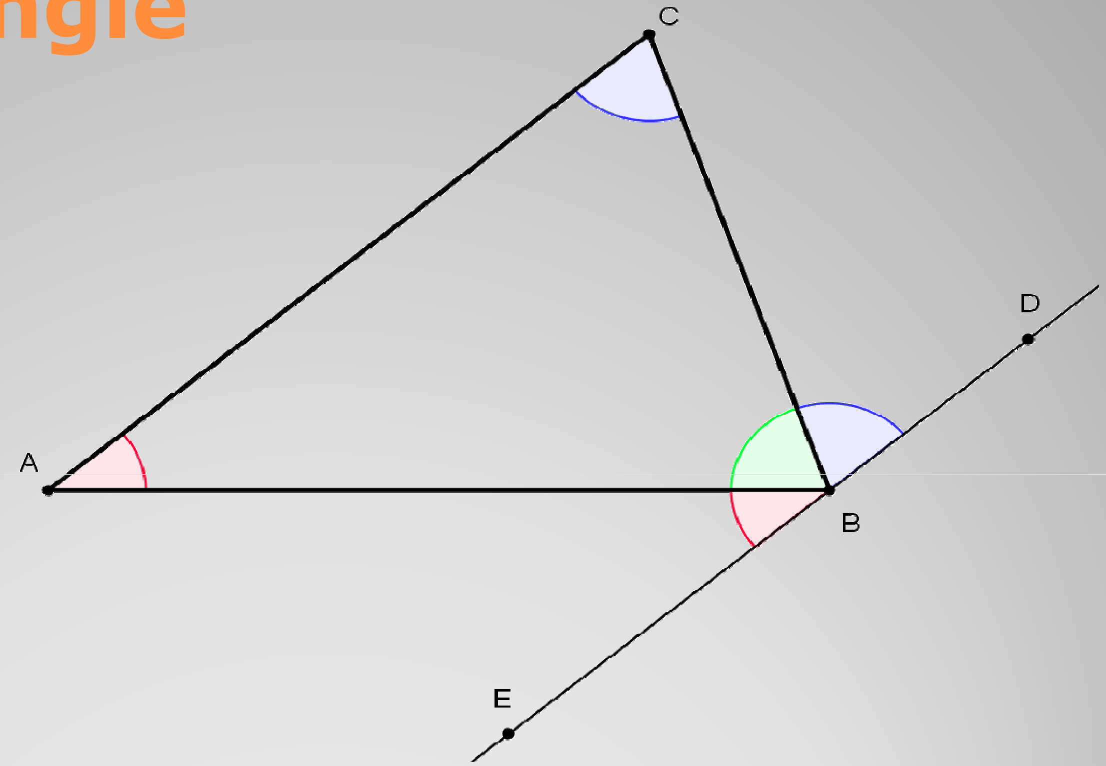
# Expérience

- Est non immédiate, action physique ou mentale nécessaire.
- Lieu: espace mesurable.
- Outil: perception, instruments.
- ***Ex***: «la somme des angles intérieurs d'un triangle est un angle plat» par découpage ou pliage

# Déduction

- Permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises sans recours à l'expérience.
- Fondée sur le raisonnement.
- Permet de réorganiser les apports de l'expérience.

# Exemple: la somme des angles d'un triangle




On trace la parallèle à [AC] passant par B, puis on utilise les angles alternes – internes.

$\widehat{ACB} = \widehat{CBD}$ et $\widehat{CAB} = \widehat{ABE}$

# Liens entre *Intuition, Expérience, Déduction*

1) ***Expérience*** $\underset{\text{structure}}{\overset{\text{nourrit}}{\rightleftarrows}}$ ***Intuition***

2) «La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique.
La ***déduction*** avance mais ne voit pas.
L'***intuition*** voit mais n'avance pas. » R. Thom

3) Évidence issue de l'***intuition*** # renseignement issu de l'***expérience***

Résultat d'une ***expérience*** # conclusion d'un ***raisonnement***

# Géométrie naturelle (ou géométrie I)

(ou la confusion entre la géométrie et la réalité)

- La déduction s'exerce sur des objets matériels.
- Preuve dynamique et mécanique.
- Importance de la construction et la perception (pliage, superposition).
- <u>Source de validation:</u> monde réel, sensible.
- Présence des 3 pôles: intuition, expérience, déduction.

# Géométrie axiomatique naturelle (ou géométrie II)

- Géométrie comme schéma de la réalité.
- Importance de la déduction logique et de la démonstration au sein d'un système axiomatique précis.
- Présence des 3 pôles.