Correction de la fiche du 6 juin 2012

Tous les résultats (ou presque) peuvent être vérifiés avec un logiciel de calcul formel type Xcas, logiciel libre[1].

Exercice 1 *L'algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif et en général*

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

Le développement de $(A+B)^2$ donne $A^2+AB+BA+B^2$. On a donc la propriété suivante :

$$\boxed{\text{Si } AB = BA \text{ alors } (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k\, B^{n-k}}$$

D'autre part, on peut remarquer que B est une matrice de transposition ce qui permet de trouver AB et BA facilement.

Exercice 2

a) L'espace est engendré par $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ donc de dimension 1.

b) L'espace est engendré par les $(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$ donc de dimension n.

c) L'espace est engendré par I_n donc de dimension 1.

d) L'espace est engendré par les $(E_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ donc de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

e) L'espace est engendré par les $(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$et les $(E_{ij}+E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ donc de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

f) L'espace est engendré par les $(E_{ij}-E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ donc de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Remarque 1 *Les matrices triangulaires supérieures carrées forment une algèbre (stabilité pour la multiplication) et $M_n(\mathbb{K}) = T_n^+(\mathbb{K}) + T_n^-(\mathbb{K})$ avec des notations évidentes.*

Remarque 2 *En notant $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ les matrices symétriques et anti-symétriques, on a $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.*

[1]On peut télécharger le logiciel à l'adresse suivante `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html`

Exercice 3

4) $\ker f = \langle e_2 \rangle$ *et* $Imf = \langle e_2, e_2 + e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle$.

Remarque 3 *$E \neq \ker f \oplus Imf$ puisque e_2 est élément de l'espace image et du noyau.*

Exercice 4

3) Pour $k \geqslant 1 \quad A^k = 3^{k-1} A$

4) On peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(I_3 + A)^k = \frac{4^k - 1}{3} A + I_3 \text{ et } (3I_3 - 2A) = \left((-1)^k - 1\right) 3^{k-1} A + 3^k I_3$$

Exercice 5

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir ce résultat, on peut utiliser la relation $A = 4J + I$ et $J^2 = 0$

Exercice 6

1) on vérifie que le déterminant de (e_1, e_2, e_3) n'est pas nul avec la règle de Sarrus.

2) Les coordonnées de u sont $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (il faut inverser la matrice de passage).

Exercice 7 *On écrit les matrices de passage des anciennes aux nouvelles bases : P_1 dans $\mathbb{R}^4$ et P_2 dans $\mathbb{R}^3$. Si M' est la matrice de f dans les bases B et B', on a alors*

$$M' = P_2^{-1} M P_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{-7}{3} \\ \frac{-2}{3} & 1 & \frac{-8}{3} & \frac{14}{3} \\ -1 & 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Remarque 4 *Pour inverser P_2, on peut chercher à exprimer les coordonnées de l'ancienne base dans la nouvelle c'est à dire exprimer dans B' la base canonique (i, j, k).*

Exercice 8

3) On trouve $a_n = n$ et $b_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 9

1) On calcule le déterminant de A et on trouve $\det A = 2$ avec la règle de Sarrus

2) On calcule A^2 *et on trouve* $A^2 = A + 2I$ *d'où* $\lambda = -1$ *et* $\mu = 2$

3) De la relation au-dessus, on tire $A\,\frac{1}{2}\,(A - I) = I$ *d'où* $A^{-1} = \frac{1}{2}\,(A - I)$

4) Par récurrence, on trouve $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$ *et* $\beta_{n+1} = 2\beta_n$

5) On a $u_n = (-1)^{n+1}$ *et* $v_n = 2^n$

6) D'où $\alpha_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ *et* $\beta_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}$ *puis* A^n

Exercice 10

1) $\ker A = \langle e_3 \rangle$ *donc l'application linéaire représentée par* B *doit envoyer les 3 vecteurs de la base canonique sur* e_3*. D'où* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

2) Par calcul matriciel on montre que $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2b & b & 3b \end{pmatrix}$

Exercice 11 *On sait que* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^t Comat(A)$ *donc pour* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *on obtient* $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*,* $ad - bc$ *ne prend que deux valeurs : 0 ou 1. Il faut chercher les 6 matrices de déterminant non nul.* (Rappel : $1 + 1 = 0$ *et* $-1 = 1$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12

1) E_{ij} *envoie le vecteur* e_j *sur* e_i *et* E_{kl} *envoie* e_l *sur* e_k *On peut donc schématiser le produit* $E_{ij} \times E_{kl}$ *par :*

$$\begin{array}{ccccc} & E_{kl} & & E_{ij} & \\ E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E \\ e_l & \longrightarrow & e_k & & \\ & & e_j & \longrightarrow & e_i \end{array}$$

Au final, $E_{ij} \times E_{kl}$ *n'est différent de 0 que si* $k = j$ *et il correspond à l'application qui envoie* e_l *sur* e_i *D'où le résultat à retenir :*

$$\boxed{E_{ij} \times E_{kl} \;=\; \delta_{jk}\, E_{il}}$$

2) Il faut décomposer Z *sur la base canonique et chercher les cas possibles où* $\forall (i,j) \in [\![1 \cdots n]\!]^2 \quad \sum_{1 \leqslant {k \atop l} \leqslant n} z_{kl}\, E_{ij} \times E_{kl} = \sum_{1 \leqslant {k \atop l} \leqslant n} z_{kl}\, E_{kl} \times E_{ij}$ *Le calcul donne alors* $i = l$*,* $j = k$ *puis* $i = k$*,* $j = l$ *d'où* $z_{kk} = z_{ll}$ *et* $z_{kl} = 0$ *si* $k \neq l$*. Au final* $Z = \lambda\, I_n$ *homothétie.*

Exercice 13

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de déterminant 1.*

2) On peut exprimer les $\left(x^k\right)$ *en fonction des* (q_k) *ou inverser la matrice* M *avec Gauss (* $\forall\, 0 < k \leqslant n \quad C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$ *). En notant* $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k\, x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} p'_k\, q_k$ *on a* $p'_n = p_n$ *puis pour* $n > k \leqslant 0 \quad p'_k = p_k - p_{k+1}$