SURFACES CIRCULAIRES.
UNE VALEUR APPROCHÉE DE PI

Arnaud Gazagnes

Résumé

Liu Hui calcule une valeur approchée de π (3,1416) à l'aide d'une duplication de polygones réguliers inscrits et circonscrits dans un cercle.

1 Surfaces circulaires. Cadre du texte de Liu Hui

Le texte de Liu Hui est en fait son commentaire du problème 1 – 32 du *Jiu Zhang Suan Shu*. Dans ce chapitre se trouvent des procédures pour calculer des surfaces de champ. Le problème 32 donne celle dans le cas où le champ est circulaire :

Procédure :
Multiplie la moitié de la circonférence par le rayon pour obtenir l'aire du cercle.
Autre procédure : Un quart du produit de la circonférence et du diamètre.
Autre procédure : Un quart du produit de trois fois le carré du diamètre.
Autre procédure : Le carré de la circonférence divisé par 12.

En notant respectivement R, D, C et A le rayon, le diamètre, la circonférence et l'aire du cercle, les règles donnent dans l'ordre :

$A = \dfrac{C}{2} \times R \qquad A = \dfrac{1}{4} C \times D \qquad A = \dfrac{1}{4} \times 3 \times D^2 \qquad A = \dfrac{c^2}{12}$

ce qui permet de calculer A connaissant C et D.

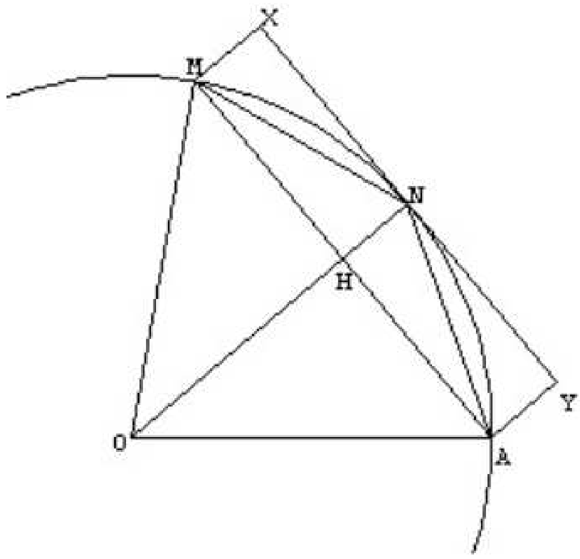
Les deux premières formules soient justes, les deux dernières sont inexactes, les mathématiciens chinois utilisant 3 pour valeur approchée de π ; les troisième et quatrième formules exactes sont respectivement $A = \frac{1}{4}\pi D^2$ et $A = \frac{1}{4\pi}C^2$. Liu Hui savait que 3 était une valeur approchée « arrondie » pratique et s'est attelé à trouver une meilleure approximation. Sa démarche ne fut pas unique : Zu Chongzhi (au Ve siècle) et Li Chunfeng (au VIIe siècle) ont proposé dans leur commentaire respectivement $\dfrac{355}{113}$ et $\dfrac{22}{7}$.

Les unités de mesures employées sont le *chi*, le *cun*, le *fen*, le *li*, le *hao*, le *miao* et le *hu* ; la valeur de chacune de ces unités est 10 fois celle de l'unité suivante (1 *chi* = 10 *cun* etc.).

2 Une valeur approchée de π

2.1 Méthode

Archimède et Liu Hui ont tous les deux utilisé une suite croissante de polygones réguliers pour arriver à leurs fins ; alors qu'Archimède a déterminé une approximation du périmètre de la circonférence, Liu Hui va déterminer une approximation de l'aire de ce cercle. De plus, tandis que le premier travaille par encadrements, le second tronque souvent les résultats partiels.



Sur la figure ci-dessus, les lettres A, O, … ont été ajoutées (pour une lecture « moderne ») à celle faite par Liu Hui ; toutefois, ce dernier n'utilise que la terminologie dans le triangle rectangle. Ainsi, se rapportant à OAH (contenu dans OAN) il appelle AH la base *(gou)*, OH la hauteur *(gu)* et OA l'hypoténuse *(xian)* ; se rapportant à ACH (contenu dans AHN avec le côté $[AH]$ en commun), il appelle NH la *petite* (1) *base*, AH la *petite hauteur* et AN la *petite hypoténuse*.

On notera, pour le polygone régulier à n côtés, c_n la longueur du côté, S_n l'aire, a_n la longueur de l'apothème et b_n la longueur du co-apothème.

Sur la figure, on a : $AM = c_n$, $AN = c_{2\,n}$, $OH = a_n$ et $HN = b_n$.

Pour ses calculs, Liu Hui utilise (sans justification) le fait que le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon (2) (ici, 1 *chi*) et les formules suivantes qui découlent du théorème de Pythagore appliqué aux triangles AHO et AHN :

$$a_n = \sqrt{R^2 - \left(\frac{c_n}{2}\right)^2} \qquad c_{2n} = \sqrt{\left(\frac{c_n}{2}\right)^2 + (R - a_n)^2} \text{ avec } R = \frac{D}{2} = 1 \textit{ chi}$$

Les valeurs écrites dans l'explication du commentaire sont les valeurs approchées calculées par Liu Hui. Ce dernier n'a pas écrit tous ses résultats…

Le commentaire de Liu Hui repose sur les calculs successifs de $S_6, S_{12}, \ldots, S_{96}$ donnés par la relation $S_{2n} = \dfrac{n}{2} \times c_n \times \dfrac{D}{2}$. Ce qui correspond bien à la deuxième des quatre formule ci-dessus, puisque la limite en l'infini de $\frac{n}{2} \times c_n$ est $\frac{C}{2}$.

Commençant avec un cercle de diamètre D = 2 *chi*, il calcule par récurrence les apothèmes a_n et donc les longueur c_{2n} des côtés des polygones de 24 (= 2 × 12), 48 et 96 côtés.

Après avoir calculé c_{48}, il calcule S_{96} et en déduit une valeur approchée. Ensuite il calcule de même c_{96} et donne ses résultats sous la forme $S_{96} = 313 \textit{ cun} + \dfrac{584}{625} \textit{ cun}$ et $S_{192} = 314 \textit{ cun} + \dfrac{64}{625}$ *cun* (3) . Puis il encadre π de la façon suivante :

- $100\,\pi > S_{192}$ (100 étant le carré du rayon exprimé en *cun*) ;

(1). L'adjectif « petit » lui sert pour différencier les deux triangles d'une même figure. Le segment qui est la base du premier triangle est la hauteur d'un nouveau triangle.
(2). Liu Hui appelle en fait le rayon le « demi-diamètre ».
(3). Le texte parle de *cun* et non de *cun carré*. Les surfaces ont la même unité de même nom que l'unité de longueur correspondante : par exemple, 1 *bu* peut désigner aussi bien la longueur de 1 *bu* que l'aire du carré de côté 1 *bu*.

- en considérant les polygones réguliers à 96 et 192 côtés, il vient :

$$96\,XY\,HN = 2\,(S_{192} - S_{96})$$

(le disque peut être entièrement couverte par 96 figures polygonales $OMXYA$)
et $S_{96} + 2(S_{192} - S_{96}) = S_{192} + (S_{192} - S_{96}) > 100\,\pi$.

Soit $314 + \dfrac{64}{625} < 100\,\pi < 314 + \dfrac{169}{625}$.

Pour des raisons pratiques, il abandonne les fractions et conclut que le rapport de l'aire du disque et l'aire de son carré circonscrit est $\dfrac{314}{400}$ ou $\dfrac{157}{200}$.

Liu Hui explique aussi que les modèles correspondants du diamètre et de la circonférence sont égaux à 50 et 157, respectivement. Il ne raisonne pas en termes d'un nombre spécifique (π) mais en couple de nombres proportionnels (l'un se rapportant au diamètre, l'autre à la circonférence), tout comme les anciens mathématiciens chinois. Dans l'ensemble des traités des *Dix Classiques du Calcul*, il est donné pour valeur du périmètre et du diamètre d'un cercle respectivement 3 et 1. Par exemple, Liu Hui écrivait : « *Le modèle (*lü*) du diamètre étant 1, le modèle du tour extérieur est 3.* »

Toutefois, il propose de meilleurs modèles, obtenus par la méthode du polygone inscrit. Il explique que par duplication répétée de ses côtés, le contour du polygone vient se confondre avec celui du cercle.

2.2 Le texte de Liu Hui

(4) *Problème 1 – 32.*

Suppose un champ de circulaire de 181 bu *de circonférence et de 60* bu *1/3* bu *de diamètre. On demande l'aire du champ.*

Réponse : 11 mu *90* bu *1/12* bu

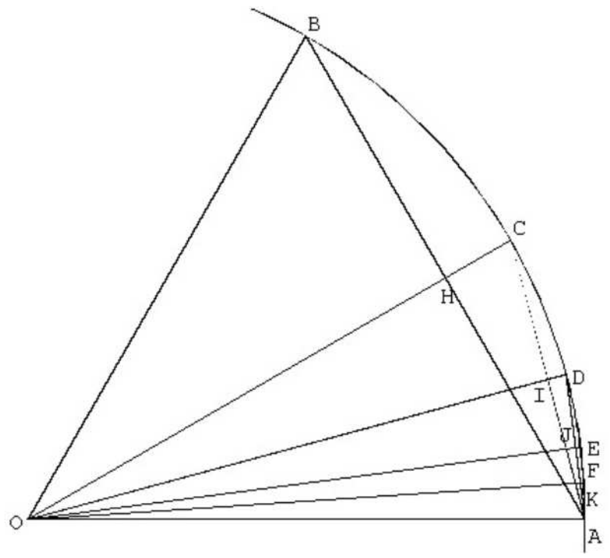
Liu Hui insère à cet endroit cette précision : « *Avec ma procédure, l'aire devrait être 10* mu*208* bu*113/314* bu. » C'est-à-dire qu'il considère $\pi \approx 3{,}14$, comme nous le verrons.

Procédure : La moitié de la circonférence et la moitié du diamètre sont multipliées ; on obtient les bu*du produit* (ji)*.*

Comme à son habitude, Liu Hui commente la procédure. Il donne ensuite sa méthode pour déterminer une valeur approchée de π : elle est l'objet des lignes suivantes. Pour faciliter la lecture et la compréhension de ce texte ancien, celui-ci a été découpé en paragraphes en dessous desquels se trouve leur transcription mathématique moderne.

[...] *Supposons un cercle de diamètre 2 chi et à l'intérieur du cercle un côté* (5) *d'un hexagone. Sa mesure est égale à la moitié du diamètre du cercle, conformément au modèle de diamètre 1, et au modèle du tour extérieur 3. Cela étant, par un côté de l'hexagone, multiplions le demi-diamètre. Multiplions deux fois et sextuplons cela : on obtient la surface du dodécagone.*

(4). Le texte qui suit est tiré de la thèse de R. Schrimpf *(op. réf.)* mais néanmoins mis au goût du jour. Le lecteur moderne trouvera une autre traduction dans *Histoires d'algorithmes (op. réf.).*
(5). Le terme est *mien*, soit la *face*, car on le voit de l'extérieur.



Si l'on coupe à nouveau cela, multiplions ensuite par un côté du dodécagone le demi-diamètre d'un cercle correspondant au segment circulaire ; multiplions quatre fois et sextuplons cela : on obtient l'aire du 24-gone.

Ce qu'on perd est d'autant plus faible qu'on coupe les polygones plus finement. Coupons-les et coupons à nouveau pour arriver à ce qu'on ne puisse plus couper, alors il y a coïncidence avec le tour du cercle, et il n'y a rien qui soit perdu.

Liu Hui vient d'expliquer que la surface d'un polygone se calcule à partir du demi diamètre du cercle et du côté du polygone. Il va utiliser la procédure du *gougu* (6) .

Procédure de découpage du hexagone en un dodécagone. On pose le diamètre du cercle 2 chi*. On le partage en 2, il fait 1* chi *: c'est le côté de l'hexagone inscrit dans le cercle* (7)*. On prend le demi-diamètre 1* chi *comme hypoténuse, le demi-côté 5* cun *comme base* (gou) (8)*. Cela étant, on cherche la hauteur* (gu)*correspondante* (9) *: avec le carré* (mi) (10) *de la base, 25* cun*, on diminue le carré de l'hypoténuse : il reste 75* cun*. On divise ceci en prenant la racine carrée ; le calcul continue jusqu'aux* miao *et aux* hu*. On recule* (tui)*de nouveau le diviseur, pour trouver un chiffre de la partie décimale* (11)*. On prend le chiffre de la partie décimale sans nom comme numérateur et 10 comme dénominateur. Par simplification, on a 2 cinquièmes de* hu*. On obtient donc une hauteur de 8* cun *6* fen *6* li *2* miao *5* hu *+ 2/5* hu*. On diminue ceci du demi-diamètre : il reste* (12) *1* cun *3* fen *3* li *9* hao *7* miao *4* hu *+ 3/5* hu *; on l'appelle petite hauteur. On appelle alors petite hauteur le demi-côté du polygone* (13)*. Cela étant, on cherche l'hypoténuse : son carré est 949 193 445* hu *et une fraction restante que l'on néglige. On divise ceci en prenant la racine carrée : c'est le côté du dodécagone.*

$$c_6 = OA = 1 \ chi = 10 \ cun \qquad \frac{c_6}{2} = AH = 5 \ cun$$

$$a_6{}^2 = OH^2 = OA^2 - AH^2 = 102 - 52 = 75 \ cun \ carrés$$

$$a_6 = OH = 8cun \ 6fen \ 6li \ 2miao \ 5hu + 2/5hu = 0{,}866\,025\,4 \ chi$$

$$b_6 = CH = R - OH = 1 \ cun \ 3 \ fen \ 3 \ li \ 9 \ hao \ 7 \ miao \ 4 \ hu + 3/5 \ hu = 0{,}133\,974\,6 \ chi$$

$$c_{12}^2 = AC^2 = AH^2 + HC^2 = 267\,949\,193\,445 \ hu \ carrés$$

(6). Voir le chapitre « La technique du *gougu* » pour la présentation de cette méthode.
(7). OA
(8). AH
(9). BH
(10). Littéralement : « l'étendue » (*mi*) de la base *(gou)*, soit l'aire du carré ayant la base pour côté.
(11). Ces termes se rapportent à la technique d'extraction de racine. Voir le chapitre de la brochure sur ce point.
(12). CH
(13). AC

Procédure de découpage du dodécagone en un 24-gone. On prend de la même façon le demi-diamètre comme hypoténuse, le demi côté comme base (gou). *Cela étant, on cherche la hauteur* (gu) *lui correspondant. On pose le carré de la petite hypoténuse ci-dessus et on en prend le quart*(14) *: on obtient 66 987 298 361* hu*et une fraction restante que l'on néglige. Le résultat, c'est le carré de la base. On le soustrait au carré de l'hypoténuse ; on divise leur reste en prenant la racine carrée : on obtient une hauteur de 9* cun *6* fen *5* li *9* hao *2 miao 5* hu *4/5* hu. *On diminue ceci du demi-diamètre : il reste 3* fen *4* li*7* miao *4* hou *1/5* hu *: on l'appelle petite base. On appelle alors petite hauteur le demi-côté du polygone. Cela étant, on cherche l'hypoténuse : son carré est 68 148 349 466* hu *et une fraction restante que l'on néglige. On divise ceci en prenant la racine carrée : c'est le côté du 24-gone.*

$$\frac{c_{12}}{2} = AI^2 \qquad \left(\frac{c_{12}}{2}\right)^2 = AI^2 = 66\ 987\ 298\ 361 \ \textit{hu carrés}$$

$$a_{12}^2 = OI^2 = OA^2 - AI^2$$

$$a_{12} = OI = 9cun\ 6fen\ 5li\ 9hao\ 2miao\ 5hu\ 4/5hu = 0,\ 965\ 925\ 8\ \textit{chi}$$

$$b_{12} = ID = R - OI = 3fen\ 4li\ 7miao\ 4hou\ 1/5\ hu = 0,\ 034\ 074\ 2\ \textit{chi}$$

$$c_{24}^2 = AD^2 = AI^2 + ID^2 = 68\ 148\ 349\ 466 hu\ \textit{carrés}$$

Procédure de découpage du 24-gone en un 48-gone. On prend de la même façon le demi-diamètre comme hypoténuse, le demi côté comme base (gou). *Cela étant, on cherche la hauteur* (gu) *lui correspondant. On pose le carré de la petite hypoténuse ci-dessus et on en prend le quart : on obtient 17 037 087 366* hu*et une fraction restante que l'on néglige. Le résultat, c'est le carré de la base. On le soustrait au carré de l'hypoténuse ; on divise leur reste en prenant la racine carrée : on obtient une hauteur de 9* cun *9* fen *1* li *4* hao *4* miao *4* hu *4/5 de* hu.*On diminue ceci du demi-diamètre : il reste 8 li 5* hao *5* miao *5* hu *1/5 de* hu *: on l'appelle petite base. On appelle alors petite hauteur le demi-côté du polygone. Cela étant, on cherche l'hypoténuse : son carré est 17 110 278 813* hu *et une fraction restante que l'on néglige. On divise ceci en prenant la racine carrée : on obtient 1* cun *3* fen *8* hao *6* hu *et on abandonne les parts restantes : c'est le côté du 48-gone.*

$$\frac{c_{24}}{2} = AJ \qquad \left(\frac{c_{24}}{2}\right)^2 = AJ^2 = 17\ 037\ 087\ 366 hu\ \textit{carrés}$$

$$a_{24}^2 = OJ^2 = OA^2 - AJ^2$$

$$a_{24} = OJ = 9\ cun\ 9\ fen\ 1\ li\ 4\ hao\ 4\ miao\ 4\ hu\ 4/5\ hu = 0{,}991\,444\,8\ \textit{chi}$$

$$b_{24} = EJ = R - OJ = 8\ li\ 5\ hao\ 5\ miao\ 5\ hou\ 1/5hu = 0{,}008\,555\,2\ \textit{chi}$$

$$c_{48}^2 = AE^2 = AJ^2 + EJ^2 = 17\ 110\ 278\ 813\ \textit{hu carrés}$$

$$c_{48} = AE = 1\ cun\ 3\ fen\ 8\ hao\ 6\ hu = 0,\ 130\ 806\ \textit{chi}$$

Liu Hui calcule alors l'aire du polygone double, à 96 côtés :

Par le demi-diamètre de 1 chi, on le multiplie, puis on multiplie le résultat par 24 : on obtient une aire de 3 139 344 000 000 hu. *On la divise par 10 000 000 000 : on obtient une surface de 313* cun *et 584/625* cun. *C'est la surface d'un 96-gone.*

$$S_{96} = 24\, c_{48}\, R = 3\ 139\ 344\ 000\ 000\ \textit{hu carrés} = 313 + \frac{584}{625}\ \textit{cun carrés}$$

Le commentateur continue avec le calcul du côté :

Procédure de découpage du 48-gone en 96-gone. On prend de la même façon le demi-diamètre comme hypoténuse, le demi côté comme base (gou). *Cela étant, on cherche la hauteur* (gu) *lui correspondant. On pose le carré de la petite hypoténuse ci-dessus et on en prend le quart : on obtient 4 277 569 703* hu *et une fraction restante que l'on néglige. Le résultat, c'est le carré de la base. On le soustrait au carré de l'hypoténuse ; on divise leur reste en prenant la racine carrée : on obtient une hauteur de 9* cun *9* fen *7* li *8* hao *5* miao *8* hu *9/10* hu.*On diminue ceci du demi-diamètre : il*

(14). « *de 4 parties, prends-en 1* »

reste 2 li *1* hao *4* miao *1* hu*1/10* hu *: on l'appelle petite base. On appelle alors petite hauteur le demi-côté du polygone. Cela étant, on cherche l'hypoténuse : son carré est 4 282 154 012* hu *et une fraction restante que l'on néglige. On divise ceci en prenant la racine carrée : on obtient pour la petite hypoténuse 6* fen *5* li *4* hao *3* miao *8* hu*et on abandonne les parts restantes : c'est le côté du 96-gone.*

$\frac{c_{48}}{2} = AK \qquad \left(\frac{c_{48}}{2}\right)^2 = AK^2 = 4\,277\,569\,703$ *hu carrés*

$a_{48}^2 = OK^2 = OA^2 - AK^2$

$a_{48} = 9$ *cun* 9 *fen* 7 *li* 8 *hao* 5 *miao* 8 *hu* 9 *dixièmes de hu* $= 0{,}997\,858\,9$ *chi*

$b_{48} = KF = R - OK = 2$ *li 1 hao 4 miao 1 hu 1 dixième de hu* $= 0{,}002\,141\,1$ *chi*

$c_{96}^2 = AF^2 = KF^2 + AK^2 = 4\ 282\ 154\ 012$ *hu carrés*

$c_{96} = \mathrm{AF} = 6$ *fen* 5 *li* 4 *hao* 3 *miao* 8 *hu* $= 0{,}065\,438$ *chi*

Comme précédemment, Liu Hui en déduit l'aire du polygone double :

Par le demi-diamètre de 1 chi, on le multiplie, puis on multiplie le résultat par 48 : on obtient une aire de 3 141 024 000 000 hu*. On la divise par 10 00 000 000 : on obtient une surface de 314* cun *et 64/625* cun*. C'est la surface d'un 96-gone.*

$S_{192} = 48\, c_{96}\, R = 3\,141\,024\,000\,000$ *hu carrés* $= 314 + \frac{64}{625}$*cun carrés*

Il fait alors remarquer que la différence des deux aires calculées, prise deux fois, et ajoutée à l'aire la plus petite dépasserait celle du cercle. Autrement dit, le 192-gone détermine un minorant et le 96-gone, un majorant.

Par l'aire du 96-gone, on la diminue ; il reste 105/625 cun *: on l'appelle l'aire de la différence. On la double : cela fait 210/625* cun*. Cela donne 96 champs polygonaux extérieurs au 96-gone, c'est-à-dire l'aire totale des produits des flèches par les cordes. On ajoute cette aire à celle du 96-gone : on obtient 314* cun *et 169/625* cun*. On sort alors de l'intérieur du cercle.*

$$314 + \frac{64}{625} < S < 314 + \frac{584}{625} + \frac{210}{625} = 314 + \frac{169}{625}$$

$S_{96} + 2(S_{192} - S_{96}) = S_{192} + (S192 - S96) > 100\,\pi$

Liu Hui détermine la valeur de la circonférence du cercle et donne A $= 314$ *cun* à partir non pas des bases des polygones, mais de l'aire.

C'est pourquoi on revient à l'aire totale du 192-gone : 314 cun*est pris pour modèle* (lü) *défini de l'aire du cercle et on néglige l'aire restante. Par le demi-diamètre 1* chi*, on divise l'aire du cercle. On double ceci : on obtient 6* chi *2* cun *8* fen *; c'est la valeur de la circonférence.*

Liu Hui aboutit enfin à son modèle *(lü)*, le rapport de la circonférence au demi-diamètre.

On multiplie le diamètre par lui-même ; le carré qui a pour coté ce diamètre a pour aire 400 cun *; avec l'aire du cercle, on les réduit mutuellement : l'aire du cercle donne 157 comme modèle* (lü)*, l'aire du carré donne 200 comme modèle* (lü)*. L'aire du carré étant 200, celle du cercle inscrit est 157. Le modèle* (lü)*du cercle est aussi légèrement trop petit.*

[...] De même, la simplification du diamètre de 2 chi *et de la circonférence 6* chi *2* cun *8* fen *donnent pour circonférence 157 et pour diamètre 50. Ce sont les modèles mis en relation l'un avec l'autre* (xiangyu lü)*. Le modèle* (lü)*de la circonférence est encore légèrement trop petit.*

Bibliographie

(Sont cités pour le lecteur les textes et ouvrages en langues occidentales)

GRANET, M., *La civilisation chinoise*, Coll. « L'évolution de l'humanité », Albin Michel, 1968

LIBBRECHT, U., *The Chinese Ta-yen Rule : a Comparative Study, Orientalia Lovaniensa* (Louvain), 1972

LIU, D., *Nombres et outils de calcul et expressions mathématiques en Chine ancienne*, in *L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, Actes du Colloque, 3-7 novembre 1997, I.U.F.M. de La Réunion, pp 161-177, 1998

MARTZLOFF, J.-Cl., *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, 1983

MARTZLOFF, J.-Cl., *A History of Chinese Mathematics*, Springer, 1997

MIKAMI, Y., *The developpment of mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishry Compagny New York, 1913

NEEDHAM, J., *La science chinoise et l'Occident*, Ed. du Seuil, 1973

SCHRIMPF, R., *La collection mathématique Souan King Che Chou, Contribution à l'histoire des mathématiques chinoises des origines au VIIe siècle de notre ère,* Thèse, Rennes, 1963

YABUUTI, K., *Une histoire des mathématiques chinoises*, Belin Sciences, 2000

YAMASAKI, Y., *History of instrumental Multiplication and Division in China – from the Reckoning-blocks to the Abacus*

Ce document a été écrit à partir de la brochure *Promenades mathématiques en Chine Ancienne*, écrite par Arnaud GAZAGNES et publiée par l'IREM de Reims en 2005 (ISBN : 2-910076-12-1).