Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle
Exercices - 27 juin 2012

Il s'agit de (re)voir et d'utiliser certains résultats fondamentaux de l'analyse réelle, ceux n'utilisant pas d'hypothèses « fortes »sur les fonctions. Ce thème renvoie à l'item **9.3 Continuité** et au début de l'item **9.4 Dérivabilité** du programme officiel.

Exercice 1. Utilisation de la relation d'ordre : automorphisme(s) du corps R

Soit f un automorphisme du corps $\mathbf{R}$ (une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant $f(1) = 1$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous réels x et y).

1. *Montrer que $f([0; +\infty[) \subseteq [0; +\infty[$ puis que f est croissante sur $\mathbf{R}$.*
2. *Montrer que la restriction $f|_{\mathbf{Q}}$ est l'identité puis que f est l'identité sur $\mathbf{R}$.*

Exercice 2.

Quelles sont les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telles que, pour tout réel x : $f^2(x) = 1$? $f^2(x) = f(x)$? (Ici $f^2(x)$ désigne le produit $f(x)f(x)$.)

Exercice 3.

On note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière du réel x : $\mathrm{E}(x) = \max\{n : n \in \mathbf{Z}, n \leqslant x\}$.

Étudier la continuité de la fonction $x \longmapsto \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^2$.

Exercice 4. Continuité et relation algébrique (1)

1. (a) *Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue en 0 et vérifiant, pour tout réel x, l'égalité $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbf{R}$.*
   Indication : Simplifier l'expression $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour n entier naturel.

   (b) *Un exemple de fonction non continue vérifiant $f(2x) = f(x)$ pour tout réel x ?*
2. *Adapter le raisonnement précédent lorsque f est continue en -1 et vérifie, pour tout réel x, $f(2x+1) = f(x)$.*
   Indication : Utiliser $\varphi : t \longmapsto \frac{t-1}{2}$ et l'expression $f \circ \varphi^n$.

Exercice 5. Point fixe (théorème de Brouwer en dimension 1)

Soient $I = [a; b]$ un intervalle compact de $\mathbf{R}$ et f une fonction définie et continue sur I telle que $f(I) \subseteq I$. Démontrer qu'il existe un réel x de I tel que $f(x) = x$.
Indication : deux méthodes (au moins). Les valeurs intermédiaires et une suite récurrente.
Et si l'intervalle I n'est pas compact ?

Exercice 6. Continuité et relation algébrique (2) Exercice adapté de façon incorrecte.

On considère un intervalle compact I et deux fonctions f et g continues sur I, à valeurs dans I et qui commutent ($f \circ g = g \circ f$). ~~On veut montrer qu'il existe un point fixe commun à f et g~~

1. *Justifier que l'ensemble des points fixes de f est fermé, non-vide et invariant par g.*
2. *Soit x_0 un point fixe de f. On considère la suite $(x_n)_n$ de réels définis par $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout entier naturel n. Justifier que la suite $(x_n)_n$ possède une sous-suite convergente.*
3. *~~Conclure.~~*

Exercice 7. Continuité et relation algébrique (3) : morphismes continus du groupe R

Soit f un morphisme du groupe $(\mathbf{R}; +)$ (une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y). On suppose de plus que l'application f est continue en 0.

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.*
2. *Montrer que f est une fonction linéaire. Indication : Établir d'abord la $\mathbf{Q}$-linéarité.*

Exercice 8. Bijection continue et homéomorphisme : le cas compact.

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue entre deux intervalles I et J avec I compact.

1. *Justifier que J est compact.*
2. *Démontrer que l'application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue.*
   Indication : Considérer l'image réciproque d'un fermé de I par l'application f^{-1}.

Exercice 9. Uniforme continuité ; caractère lipschitzien

1. *Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe deux constantes a et b positives telles que $|f(x)| \leqslant a|x| + b$ pour tout réel x.*
2. *Sur $\mathbf{R}$, quelles sont les fonctions polynomiales uniformément continues ?*
3. *Justifier que la fonction $[0;1] \to \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue et non lipschitzienne.*

Exercice 10. Homéomorphismes de R : extraits du sujet d'analyse 2011

Partie I-3. *L'objet de cette question est d'établir l'équivalence entre les assertions :*

(i) *$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue et bijective,*

(ii) *$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur lui-même.*

(a) *On suppose que $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue et injective. Soit $\Pi_+ = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x < y\}$ et Δ la fonction définie sur Π_+ par $\Delta(x,y) = f(x) - f(y)$. En étudiant le signe de Δ sur Π_+, démontrer que f est strictement monotone sur $\mathbf{R}$.*

(b) *Justifier que si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue et bijective, alors f^{-1} est continue.*

(c) *Conclure.*

Partie IV *Dans cette partie, on considère une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.*
On dira que f satisfait la propriété (H) s'il existe deux nombres réels m et M, strictement positifs et tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \qquad (x \neq y) \Longrightarrow \left(m \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant M \right).$$

1. *Dans cette question seulement, on suppose que f est dérivable sur $\mathbf{R}$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que f satisfasse la propriété (H).*

On suppose dans toute la suite que f satisfait la propriété (H).

2. *Démontrer que f est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.*
3. *On pose $k = \frac{m+M}{2}$ et on introduit la fonction réelle $F_k : x \mapsto f(x) - kx$.*
   Démontrer que F_k est lipschitzienne d'un rapport L que l'on déterminera.

Exercice 11. Signe de la dérivée et variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Comment justifier les implications suivantes ?

$$f \text{ est croissante} \Longleftrightarrow f' \geqslant 0$$
$$f \text{ admet un extremum local en } x_0 \Longleftrightarrow f'(x_0) = 0$$

Exercice 12. Racines réelles d'un polynôme

1. *Montrer qu'un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.*

2. *Soit P un polynôme non nul à coefficients réels. Démontrer que si P admet au moins r racines réelles distinctes, alors P' admet au moins $r-1$ racines réelles distinctes.*

Exercice 13. **La fonction** arctan

1. *Démontrer que* tan *définit un homéomorphisme de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbf{R}$.
2. *Déterminer la fonction dérivée de la fonction réciproque* $\tan^{-1} = \arctan$

Exercice 14. **Exemple d'homéomorphisme polynomial**

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^3 + x^2 + x$.

1. *La fonction f est-elle lipschitzienne sur $\mathbf{R}$?*
2. *Démontrer que f réalise une bijection continue de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.*
3. *Démontrer que sa réciproque f^{-1} vérifie $\left|f^{-1}(y)\right| \leqslant \frac{8}{7}|y|$ pour tout réel y.*

Exercice 15. *Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}$; déterminer la dérivée f' et vérifier que f' n'est pas continue en 0.*

Exercice 16. **Dérivée et valeurs intermédiaires : le théorème de Darboux**

On veut démontrer le résultat suivant : la dérivée d'une fonction vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Plus précisément : si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est dérivable sur $[a;b]$, alors f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
On considère pour cela les fonctions suivantes :

$$\varphi \ : \ t \longmapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \text{ et } \psi \ : \ t \longmapsto \frac{f(b)-f(t)}{b-t}.$$

1. *Montrer que les fonctions φ et ψ sont dérivables sur $]a;b[$ et admettent un prolongement par continuité sur $[a;b]$. Préciser les valeurs aux bornes.*
2. *Démontrer que l'ensemble des réels compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ est inclus dans l'ensemble $\varphi([a;b]) \cup \psi([a;b])$.*
3. *Conclure en utilisant le théorème de Rolle.*

Exercice 17. **Dérivabilité et relation algébrique**

On cherche à déterminer les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, dérivables en 0 et vérifiant la relation $f(2x) = 2f(x)$ pour tout réel x.

1. *Démontrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a $f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.*
2. *En déduire que f est linéaire.*
3. *Un contre-exemple si f est seulement supposée continue en 0 ?*

Exercice 18. **Sujet d'analyse 2007**

Les parties I.A. et I.B. portent sur les « dérivées au sens généralisées »(la limite du taux d'accroissement peut être infini), la dérivabilité d'une fonction réciproque et l'exemple de la fonction racine cubique.
Une partie des questions consistent à démontrer des résultats proches de ceux du programme : dérivée de la fonction réciproque, condition d'extremum local, théorème de Rolle, critère d'uniforme continuité.
La partie III.A. consiste en une démonstration du théorème de Baire sur $\mathbf{R}$.