Six trop puissant

Agrégation interne – Lyon

30 septembre 2017

Premières observations

$6^0 = 1$	1
$6^1 = 6$	6
$6^2 = 36$	3
$6^3 = 216$	2
$6^4 = 1296$	1
$6^5 = 7776$	7
$6^6 = 46656$	4
$6^7 = 279936$	2
$6^8 = 1679616$	1
$6^9 = 10077696$	1
$6^{10} = 60466176$	6
$6^{11} = 362797056$	3

Les premières décimales des 168 premières puissances

1	6	3	2	1	7	4	2	1	1	6	3	2	1
7	4	2	1	1	6	3	2	1	7	4	2	1	1
6	3	2	1	7	4	2	1	1	6	3	2	1	8
4	2	1	1	6	3	2	1	8	4	2	1	1	6
3	2	1	8	4	2	1	1	6	3	2	1	8	4
2	1	1	6	3	2	1	8	4	2	1	1	6	3
2	1	8	5	3	1	1	6	3	2	1	8	5	3
1	1	6	3	2	1	8	5	3	1	1	6	3	2
1	8	5	3	1	1	6	3	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	8	5	3	1	1	6	4	2	1
8	5	3	1	1	6	4	2	1	8	5	3	1	1
6	4	2	1	8	5	3	1	1	6	4	2	1	8

- beaucoup de 1 (ça se confirmera) ;

Les premières décimales des 168 premières puissances

1	6	3	2	1	7	4	2	1	1	6	3	2	1
7	4	2	1	1	6	3	2	1	7	4	2	1	1
6	3	2	1	7	4	2	1	1	6	3	2	1	8
4	2	1	1	6	3	2	1	8	4	2	1	1	6
3	2	1	8	4	2	1	1	6	3	2	1	8	4
2	1	1	6	3	2	1	8	4	2	1	1	6	3
2	1	8	5	3	1	1	6	3	2	1	8	5	3
1	1	6	3	2	1	8	5	3	1	1	6	3	2
1	8	5	3	1	1	6	3	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	8	5	3	1	1	6	4	2	1
8	5	3	1	1	6	4	2	1	8	5	3	1	1
6	4	2	1	8	5	3	1	1	6	4	2	1	8

- beaucoup de 1 (ça se confirmera) ;
- peu de 7 ;

Les premières décimales des 168 premières puissances

1	6	3	2	1	7	4	2	1	1	6	3	2	1
7	4	2	1	1	6	3	2	1	7	4	2	1	1
6	3	2	1	7	4	2	1	1	6	3	2	1	8
4	2	1	1	6	3	2	1	8	4	2	1	1	6
3	2	1	8	4	2	1	1	6	3	2	1	8	4
2	1	1	6	3	2	1	8	4	2	1	1	6	3
2	1	8	5	3	1	1	6	3	2	1	8	5	3
1	1	6	3	2	1	8	5	3	1	1	6	3	2
1	8	5	3	1	1	6	3	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	8	5	3	1	1	6	4	2	1
8	5	3	1	1	6	4	2	1	8	5	3	1	1
6	4	2	1	8	5	3	1	1	6	4	2	1	8

- beaucoup de 1 (ça se confirmera) ;
- peu de 7 ;
- le premier 5 arrive tard ;

Les premières décimales des 168 premières puissances

1	6	3	2	1	7	4	2	1	1	6	3	2	1
7	4	2	1	1	6	3	2	1	7	4	2	1	1
6	3	2	1	7	4	2	1	1	6	3	2	1	8
4	2	1	1	6	3	2	1	8	4	2	1	1	6
3	2	1	8	4	2	1	1	6	3	2	1	8	4
2	1	1	6	3	2	1	8	4	2	1	1	6	3
2	1	8	5	3	1	1	6	3	2	1	8	5	3
1	1	6	3	2	1	8	5	3	1	1	6	3	2
1	8	5	3	1	1	6	3	2	1	8	5	3	1
1	6	4	2	1	8	5	3	1	1	6	4	2	1
8	5	3	1	1	6	4	2	1	8	5	3	1	1
6	4	2	1	8	5	3	1	1	6	4	2	1	8

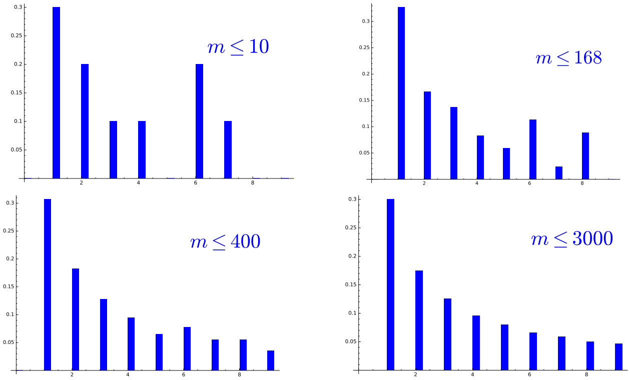
- beaucoup de 1 (ça se confirmera) ;
- peu de 7 ;
- le premier 5 arrive tard ;
- pas de 9

Ces observations ne seront pas confirmées (sauf la prédominance de 1 comme premier chiffre). Par exemple, un premier 9 apparaît pour

$$
\begin{aligned}
6^{176} = \; & 90\,078\,276\,385\,246\,202\,645\,102\,918\,820\,475\,217\,309 \\
& 622\,015\,212\,833\,705\,033\,780\,614\,505\,275\,352\,569\,662 \\
& 789\,031\,588\,822\,572\,244\,111\,398\,877\,227\,429\,324\,097 \\
& 608\,129\,063\,079\,175\,520\,256.
\end{aligned}
$$

Quelques diagrammes en bâtons

- abscisses : chiffres A de 1 à 9 ;
- ordonnées : fréquence des m tels que 6^m commence par c



Observation clé : ça se régularise !

Premier chiffre et logarithmes

Fait : le premier chiffre de 6^m est A si et seulement si

$$\overline{A\underbrace{000\cdots 00}_{d \text{ chiffres}}} \leq 6^m \leq \overline{A\underbrace{999\cdots 99}_{d \text{ chiffres}}},$$

ce qui est équivalent à ($\log$ = logarithme de base 10) :

$$A \cdot 10^d \leq 6^m \leq A \cdot 10^d + 10^d - 1 < (A+1) \cdot 10^d,$$

ou encore à :

$$\log(A) + d \leq m \log 6 < \log(A+1) + d.$$

Alors $d = \lfloor m \log 6 \rfloor$; c'est la *partie fractionnaire* qui compte :

$$\log(A) \leq m \log 6 - \lfloor m \log 6 \rfloor < \log(A+1).$$

Premier chiffre et logarithmes (2)

Le premier chiffre de 6^m est A si et seulement si

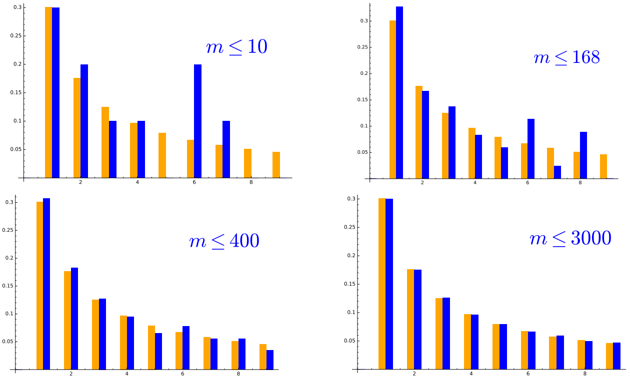
$$\log(A) \leq m \log 6 - \lfloor m \log 6 \rfloor < \log(A+1).$$

Dans quel intervalle est la partie fractionnaire de $m \log 6$?

NB : Il est beaucoup plus rapide de calculer $\{m \log 6\}$ que 6^m !

Quelques histogrammes

- abscisses : chiffres c de 1 à 9 ;
- ordonnées :
  - fréquence des m tels que 6^m commence par c
  - taille de l'intervalle : $\log(c+1) - \log c$

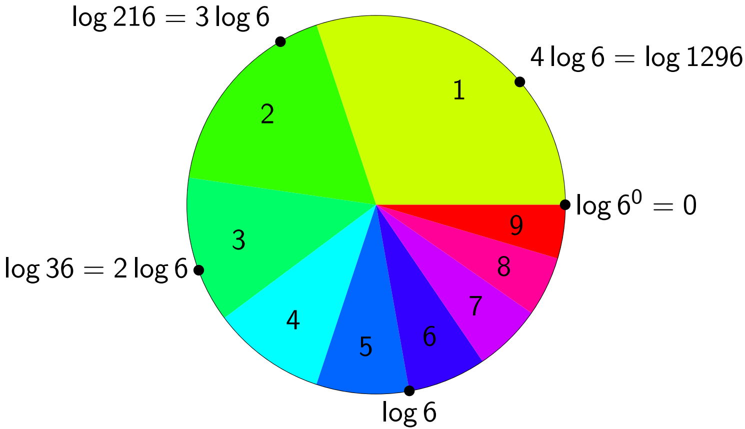


Observation clé confirmée : preuve ?

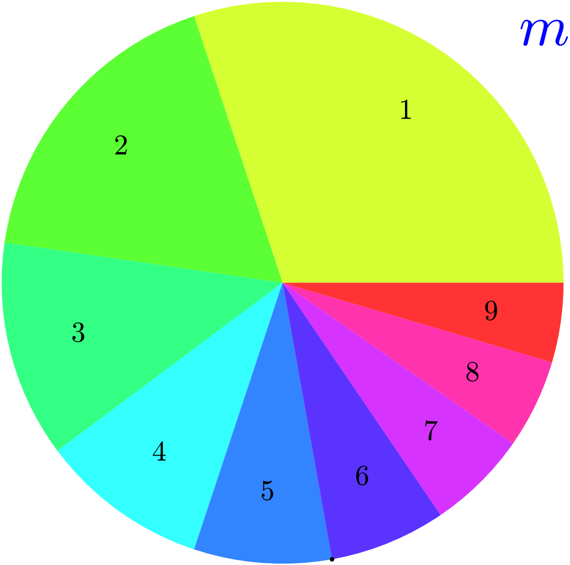
Camemberts

On « enroule » l'axe réel sur un cercle de périmètre 1 : chaque augmentation de 1 effectue un tour complet, i.e. $x \longmapsto e^{i2\pi x}$.

Le premier chiffre de la partie fractionnaire de x est donné par la couleur du secteur où est $e^{i2\pi x}$.

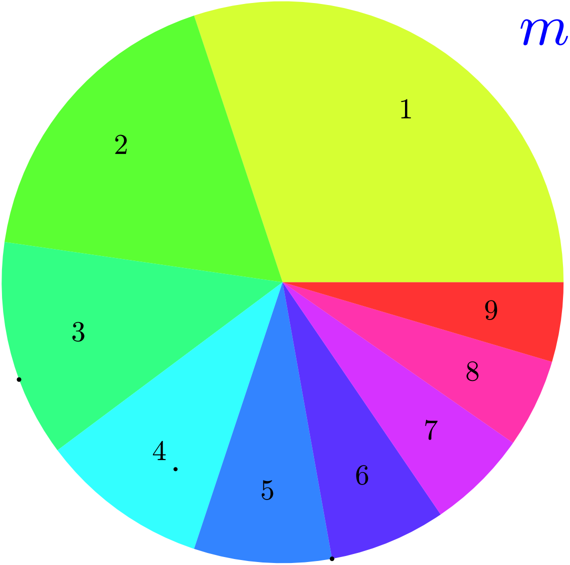


Camemberts



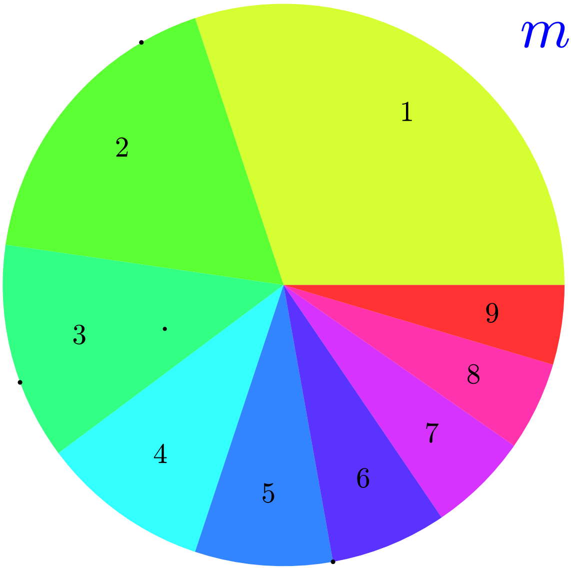
$$m \leq 1$$

Camemberts



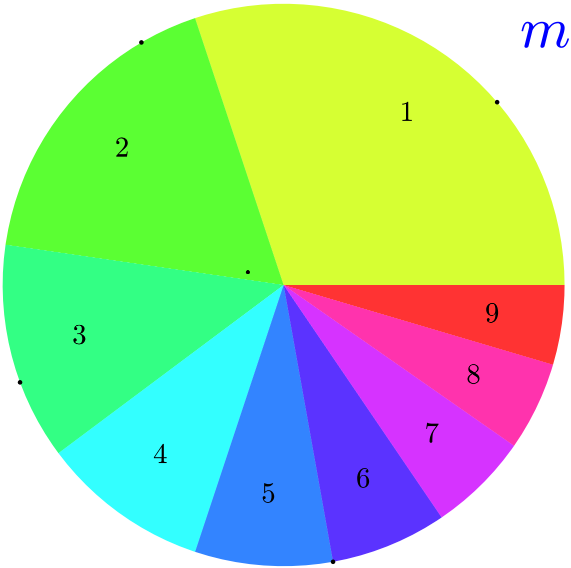
$m \leq 2$

Camemberts



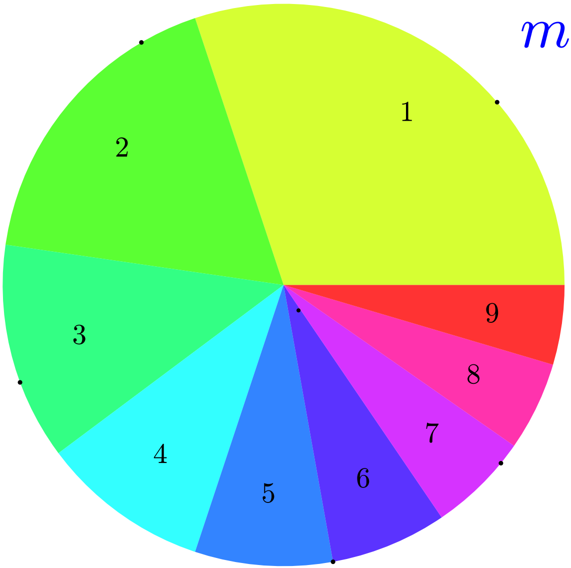
$$m \leq 3$$

Camemberts



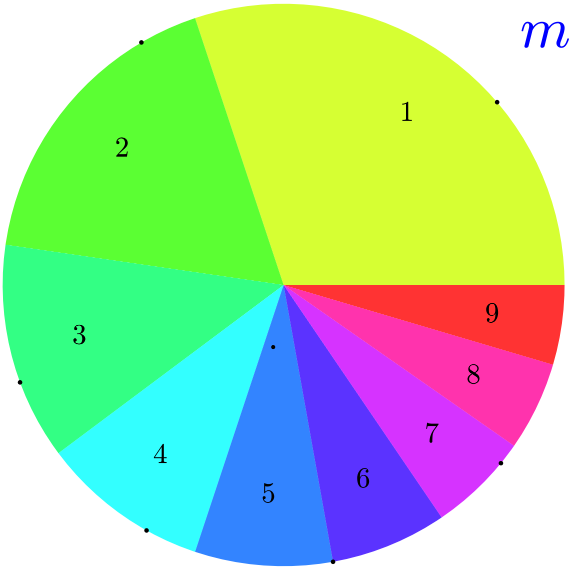
$$m \leq 4$$

Camemberts



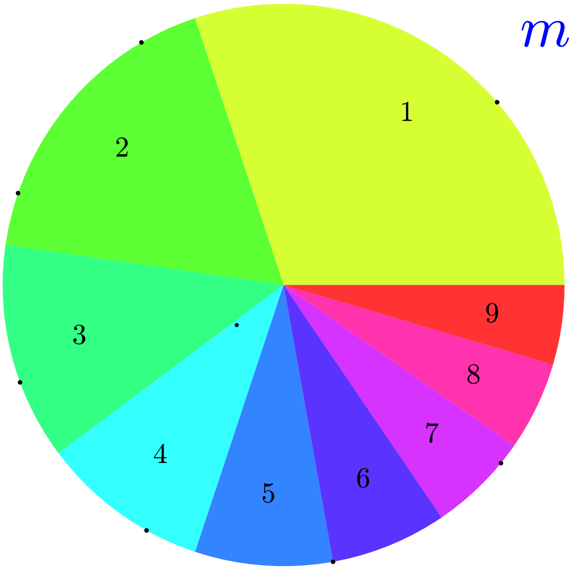
$$m \leq 5$$

Camemberts



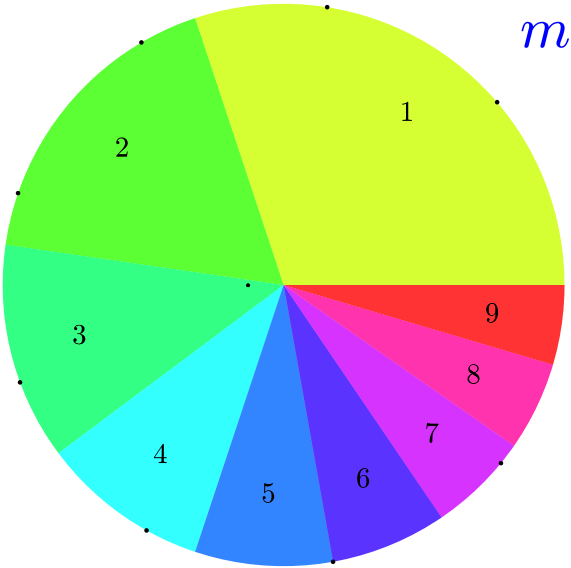
$$m \leq 6$$

Camemberts



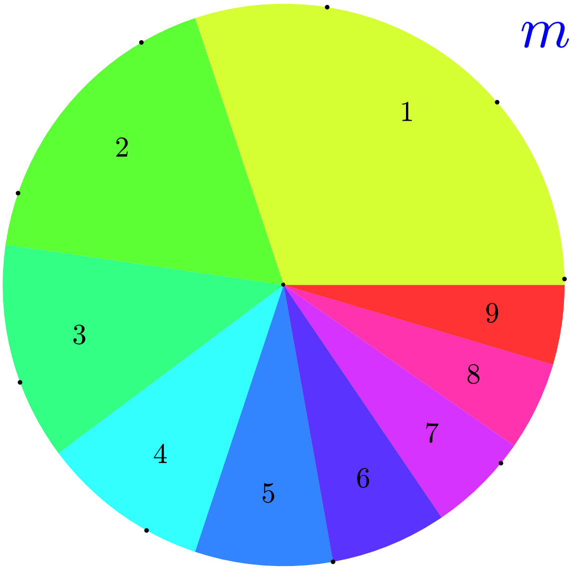
$m \leq 7$

Camemberts



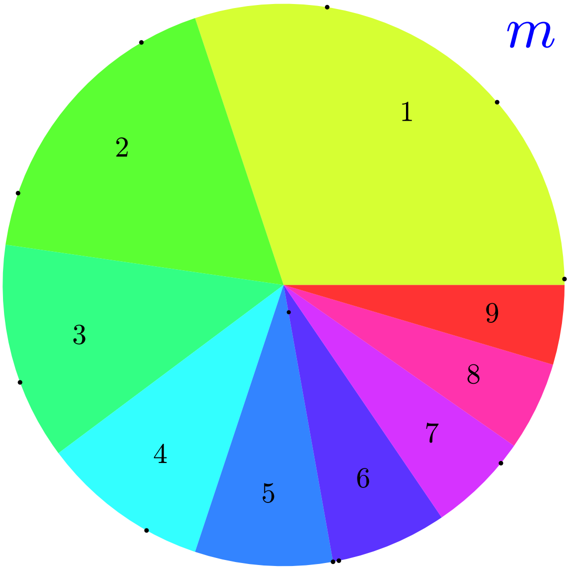
$$m \leq 8$$

Camemberts



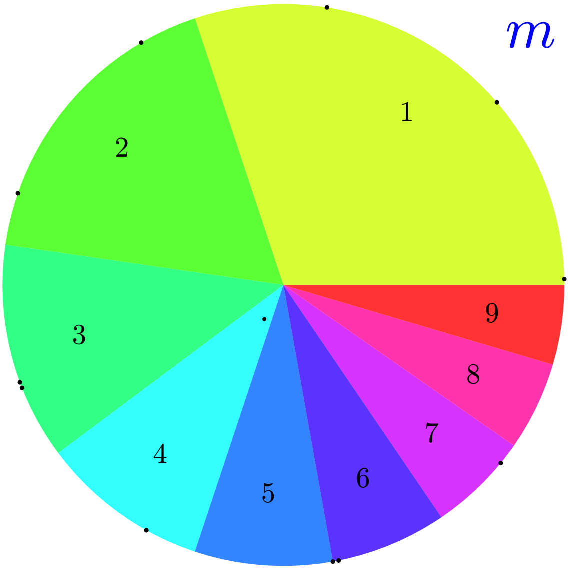
$$m \leq 9$$

Camemberts



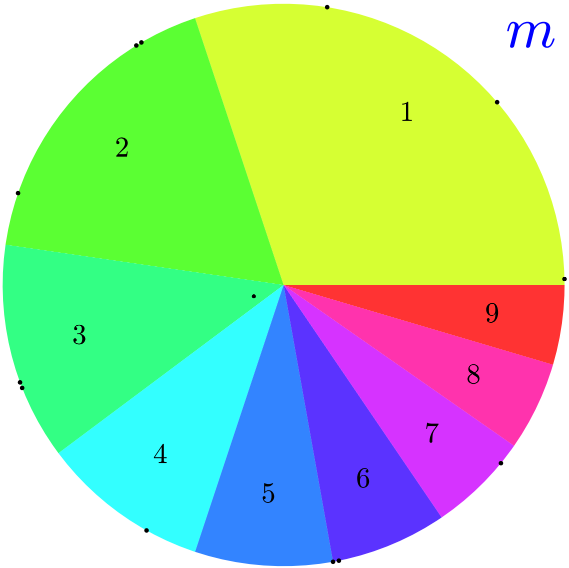
$$m \leq 10$$

Camemberts



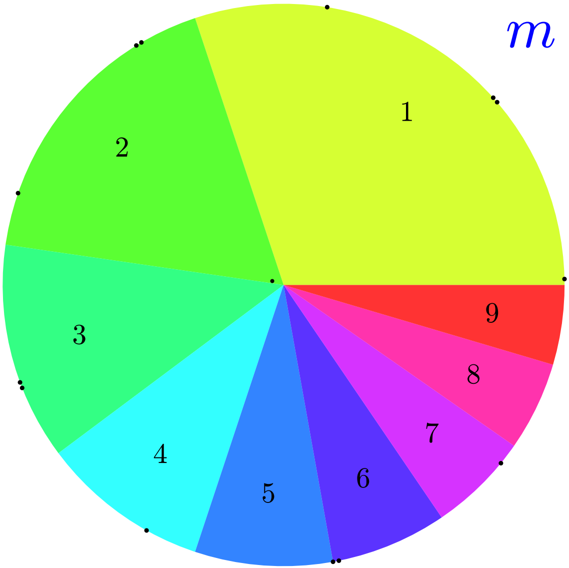
$$m \leq 11$$

Camemberts



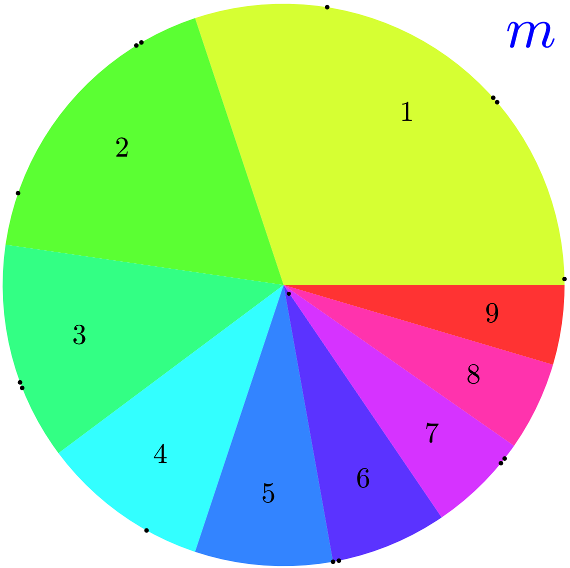
$$m \leq 12$$

Camemberts



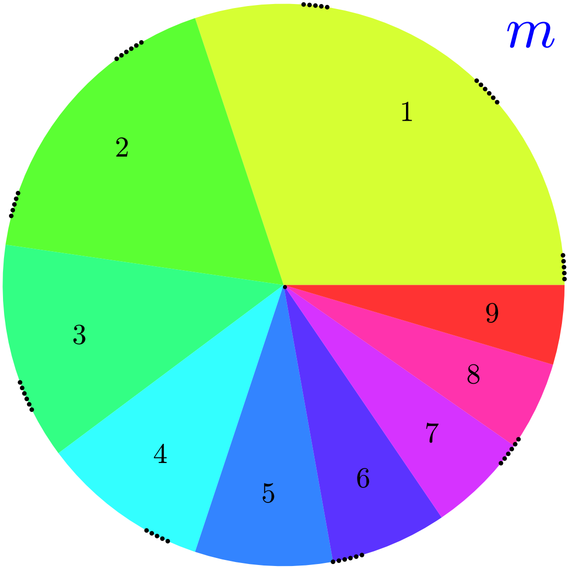
$$m \leq 13$$

Camemberts



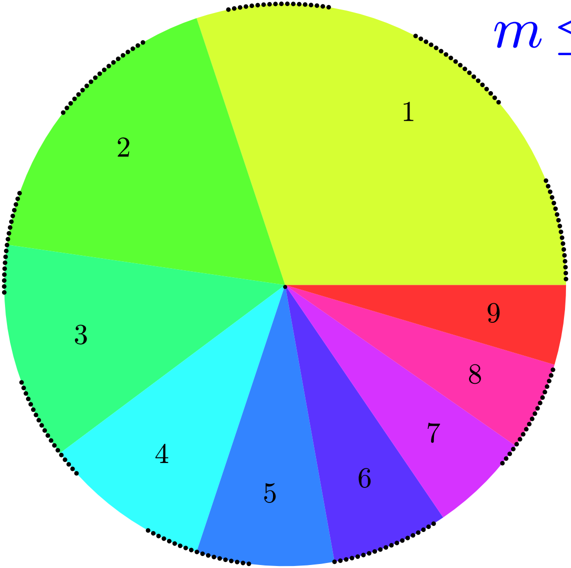
$$m \leq 14$$

Camemberts



$m \leq 50$

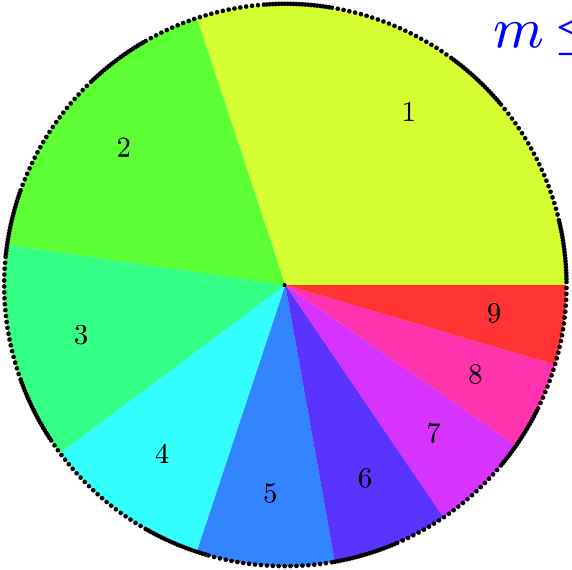
Camemberts



$$m \leq 168$$

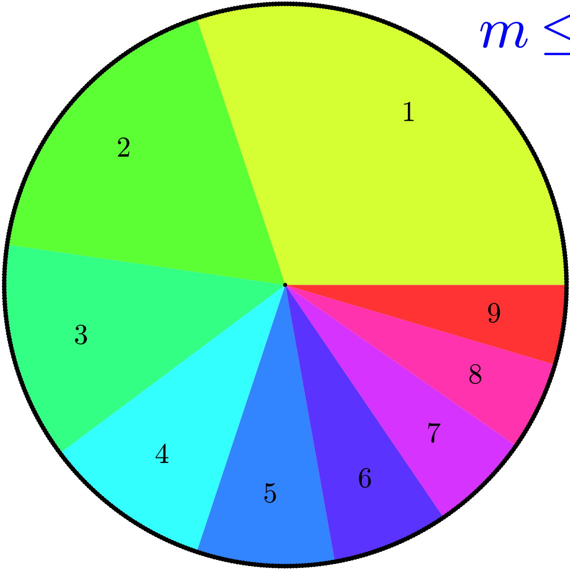
Camemberts

$$m \leq 400$$



Camemberts

$m \leq 1000$



Équirépartition

La répartition des parties fractionnaires de $m \log 6$ devient « visiblement » de plus en plus régulière.

De plus, cette visualisation est une incitation sérieuse à s'intéresser aux $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi m \log 6}$ et à leur moyenne : c'est le critère de Weyl !

NB : Le point qui se promène sur les camemberts est la moyenne.

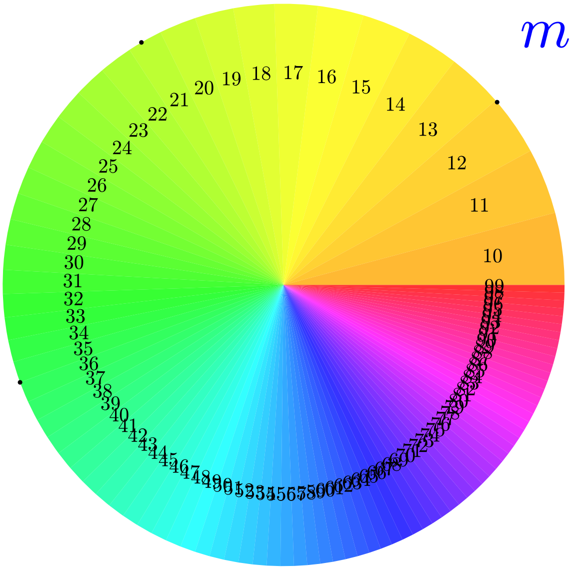
La partie III montre que

$$\lim_{M \to +\infty} \frac{\{m \leq M : \ 6^m \text{ commence par } A\}}{M} = \log(A+1) - \log(A).$$

Sens : la proportion des puissances de 6 qui commencent par A parmi les M premières puissances tend vers $\log(1 + 1/A)$.

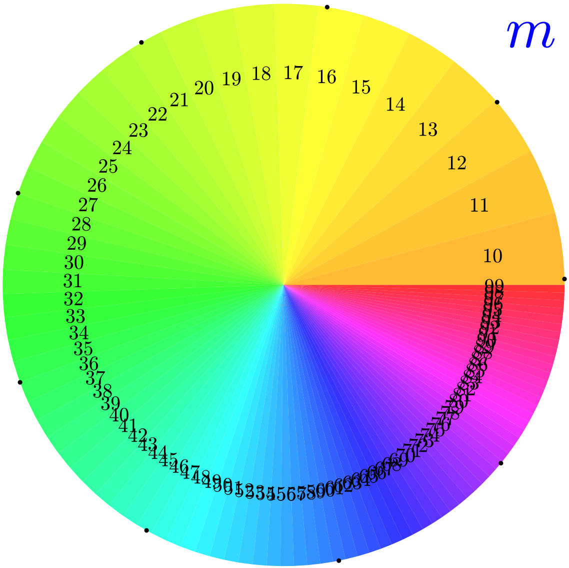
(Le chiffre 9 est plus rare mais pas rarissime.)

Camemberts à 99 parts : idem



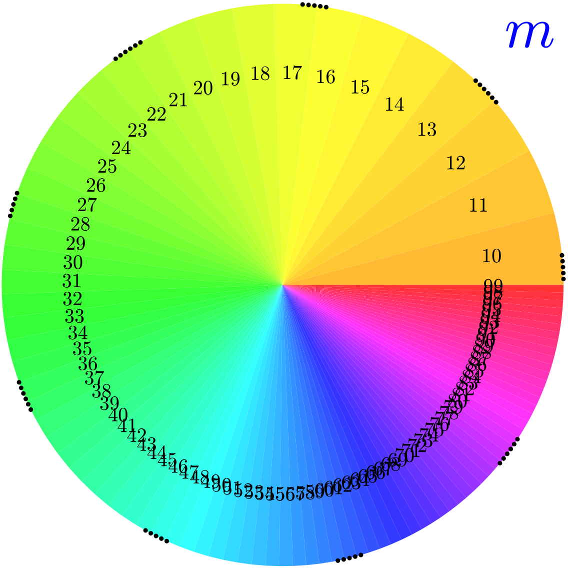
$$m \leq 4$$

Camemberts à 99 parts : idem



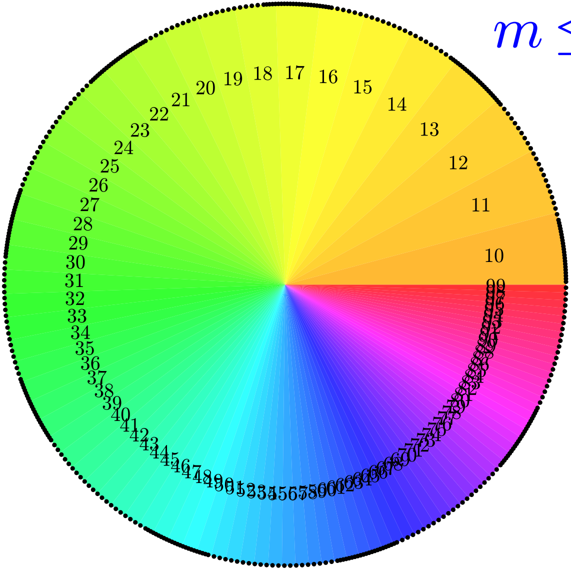
$$m \leq 10$$

Camemberts à 99 parts : idem



$$m \leq 50$$

Camemberts à 99 parts : idem



$$m \leq 400$$

Loi de Benford

L'équirépartition modulo 1 de la suite $(m \log 6)_{m \geq 1}$ entraîne que la proportion des indices m pour lesquels le premier chiffre de 6^m est A tend vers $\log(1 + 1/A)$.

On dit que le premier chiffre suit la loi de Benford. On ne peut pas parler de probabilité (pourquoi ?) mais ça peut y ressembler...

Dans les grosses séries de données de « la vraie vie », la répartition du premier chiffre n'est pas uniforme non plus, ce qui est étonnant : elle tend souvent à se rapprocher de la loi de Benford. Exemples : longueur des rivières, des routes, des altitudes des montagnes, de la population des villes, des aires des circonscriptions religieuses avant la Révolution française, cours de la bourse, puissances de 2, factorielles, etc.

Applications : détection de la fraude fiscale, comptable, électorale ou même scientifique ! En effet, les données inventées par des fraudeurs pas assez savants ne suivent pas la loi de Benford.

Voir cet article de Jean-Paul Delahaye ou Wikipedia.

Recherche d'un préfixe tout neuf

Dire que 6^m commence par d chiffres 9, c'est dire que

$$\log \frac{10^d - 1}{10^d} \leq m \log 6 - \lfloor m \log 6 \rfloor < 1.$$

Idée

Les fractions continues donnent de très bonnes approximations de $\log 6$; celles d'indice impair sont très légèrement au-dessus.

Plus précisément :

$$-\frac{1}{q_{2n+1} q_{2n+2}} < \log 6 - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < 0$$

donc

$$-\frac{1}{q_{2n+2}} < q_{2n+1} \log 6 - p_{2n+1} < 0 \ :$$

$q_{2n+1} \log 6$ est juste en-dessous d'un entier donc $6^{q_{2n+1}}$ est proche d'une puissance de 10.

Recherche d'un préfixe tout neuf (2)

n	q_{2n+1}	préfixe de $6^{q_{2n+1}}$
1	5	7
2	293	996
3	595	99998
4	166307	99999
5	830345	9999995
6	5314089	99999992
7	31054189	99999998
8	863372858	999999998
9	1845648383	99999999997
10	84036452760	999999999994
11	920709683594	999999999998
12	2259755982605	9999999999996
13	49128222096373	99999999999998
14	153243224553340	999999999999997
15	1023574349777007	999999999999998
16	8599196249779703	99999999999999993

Recherche d'un préfixe tout neuf (3)

Si on cherche la plus petite puissance de 6 qui commence par d chiffres 9, on calcule les q_{2n+1} jusqu'à ce que

$$\frac{1}{q_{2n+2}} \leq -\log\left(1 - \frac{1}{10^d}\right)$$

et on calcule $6^{q_{2n+1}}$.

```
y = continued_fraction(log(6,10))
k, q = 2, y.convergent(k).denominator()
while -log(1-10.n(200)^(-d),10.n(200))<1/q:
    k+= 2
    q = y.convergent(k).denominator()
m = y.convergent(k-1).denominator()
```

Exemple : pour avoir 50 chiffres 9, il faut $n = 88$; on trouve que q_{87} a 49 chiffres :
$q_{87} = 7199692485495290923749957803863969876283954017105$

Préfixe quelconque

Idée

On doit caser la partie fractionnaire $\{m \log 6\}$ entre celles de $\log(A)$ et $\log(A+1)$. Il est facile de coller $\{p_n/q_n\}$ dans un intervalle un peu plus petit et ça suffit.

- Pour n assez grand, il y a un entier N entre $q_n \log(A)$ et $q_n \log(A+1)$; on n'a qu'à assurer que $q_n m - p_n k = N$.
- Comme $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$, $m = m q_{n-1}$ convient ; son reste dans la division par q_n, c'est mieux.
- En réalité, pour être sûr que $m \log 6$ soit aussi dans l'intervalle, on choisit $]a, b[\subset]\log A, \log(A+1)[$ et on colle p_n/q_n dans $]a, b[$.

Préfixe quelconque

Le code Sage est très court parce que les fractions continues sont déjà implémentées.

```
y = continued_fraction(log(6,10))
def exposant(A = 1234567):
  a0, b0 = log(A,10), log(A+1,10)
  a, b, d = (2*a0+b0)/3, (a0+2*b0)/3, (b0-a0)/3
  n, p, q = 0, 0, 1
  while floor((b*q).n(99))<=(a*q).n(99) or 1/q>=d:
    n = n+1
    p = y.convergent(n).numerator()
    q = y.convergent(n).denominator()
  pp = y.convergent(n-1).numerator()
  qq =y.convergent(n-1).denominator()
  m = ((-1)^(n+1)*qq*floor(b*q))% q
  print "n = %s " % n
  return m
```

Préfixe quelconque (exemple)

On teste :

```
m = exposant(123456789101112)
print "6^%s\n␣␣␣=␣%s" % (m, 6.n(99)^m)
```

donne :

```
n = 30
6^300352599706824
   = 1.23456789101112483 74e233719751017843
```

Ça ne se trouverait pas ça par hasard...