Iterated function systems

G. Aldon - J. Germoni - J.-M. Mény

IREM de Lyon

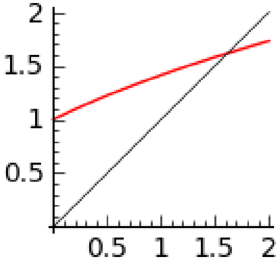
mars 2012

IFS (*iterated function systems*) : systèmes dynamiques qui consistent à itérer plusieurs contractions.

Une *contraction* de coefficient $k \in [0,1[$ dans un ensemble X muni d'une distance d est une application $w : X \to X$ telle que :

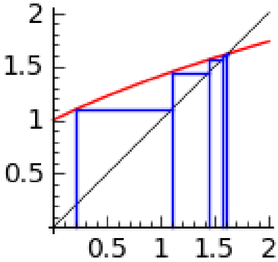
$$\forall (x,y) \in X^2, \quad d(w(x), w(y)) \leq k \cdot d(x,y).$$

Exemple : $X = [a,b]$, $d(x,y) = |x-y|$ et $w : X \to X$ dérivable avec $|w'| \leq k$, $k \in [0,1[$: contraction (accroissements finis).



Itérer une contraction, c'est étudier les suites récurrentes

$$u_0 \in X, \quad \forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+1} = w(u_p).$$

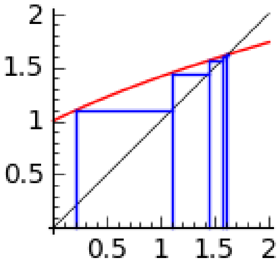


Théorème du point fixe contractant

Soit $w : X \to X$ une contraction où $X = [a, b]$.
Alors w a un unique point fixe et toute suite récurrente converge vers ce point fixe.

Itérer une contraction, c'est étudier les suites récurrentes

$$u_0 \in X, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \; u_{p+1} = w(u_p).$$



Théorème du point fixe contractant

Soit $w : X \to X$ une contraction où X est un espace métrique complet. Alors w a un unique point fixe et toute suite récurrente converge vers ce point fixe.

(Espace complet : toute suite de Cauchy converge.)

Iterated function system

Un *IFS* est la donnée de

- (X, d) espace métrique,
- w_n contraction de facteur k_n $(1 \leq n \leq N)$.

Exemple : $X = \mathbb{R}^2$, $d =$ distance euclidienne

On étudie alors les suites de la forme

$$u_0 \in X, \quad \forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+1} = w_{n_p}(u_p), \qquad \text{où } (n_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \{1, \ldots, N\}^{\mathbb{N}}.$$

Évidemment, toutes ces suites n'ont pas le même comportement.

Iterated function system

Un *IFS* est la donnée de

- (X, d) espace métrique,
- w_n contraction de facteur k_n $(1 \leq n \leq N)$.

Exemple : $X = \mathbb{R}^2$, $d =$ distance euclidienne

On étudie alors les suites de la forme

$$u_0 \in X, \quad \forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+1} = w_{n_p}(u_p), \qquad \text{où } (n_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}.$$

Évidemment, toutes ces suites n'ont pas le même comportement.

Néanmoins, un théorème du « point » fixe analogue au précédent reste valable si on passe dans un espace plus gros que X.

Désormais, $X = \mathbb{R}^2$. Alors, compact = fermé borné.

Espace de Hausdorff de X

Soit $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des compacts de X. Complet pour la distance :

$$\begin{array}{rcl} d(x, A) & = & \min\{d(x, B),\ b \in B\} \quad (x \in X,\ B \in \mathcal{H}(X)), \\ d(A, B) & = & \max\{d(x, B),\ a \in A\} \quad (A, B \in \mathcal{H}(X)), \\ h(A, B) & = & \max(d(A, B), d(B, A)). \end{array}$$

Désormais, $X = \mathbb{R}^2$. Alors, compact = fermé borné.

Espace de Hausdorff de X

Soit $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des compacts de X. Complet pour la distance :

$$\begin{array}{rcll} d(x,A) & = & \min\{d(x,B),\ b \in B\} & (x \in X,\ B \in \mathcal{H}(X)), \\ d(A,B) & = & \max\{d(x,B),\ a \in A\} & (A, B \in \mathcal{H}(X)), \\ h(A,B) & = & \max(d(A,B), d(B,A)). & \end{array}$$

Attracteur d'un IFS

Soit $(X, w_1, \dots, w_N)$ un IFS et

$$W : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X), \quad A \longmapsto \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A).$$

1. W est une contraction de rapport $\max(k_1, \dots, k_n)$,
2. W a un unique point fixe A,
3. $A = \lim_{p\to\infty} W^p(B)$ pour tout B.

Désormais : $X = \mathbb{R}^2$ et w_n est affine ($1 \leq n \leq N$), i.e.

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n & f_n \end{pmatrix}.$$

Pseudo

Entrée : $w_1, \ldots, w_N$ contractions, K entier, A_0 carré
Sortie : attracteur de l'IFS

```
pour k de 0 jusque K
    pour n de 1 jusque N
        calculer w_n(A_k)
    calculer A_{k+1} = ⋃_{n=1}^{N} w_n(A_n)
    si k ≥ 5 dessiner A_{k+1}
```

Exemple : tapis de Sierpinski ($N = 3$)

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n
1	0.5	0	0	0.5	1	1
2	0.5	0	0	0.5	1	50
3	0.5	0	0	0.5	50	50

Exemple : fougère de Barnsley ($N = 4$)

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n
1	0	0	0	0.16	0	0
2	0.85	-0.04	0.04	0.85	0	1.6
3	0.2	0.23	-0.26	0.22	0	1.6
4	-0.15	0.26	0.28	0.24	0	0.44

On attribue une probabilité aux contractions (puis on arrondit) :

$$p_n = \frac{|\det w_n|}{\sum_{n=1}^{N} |\det w_n|} \qquad (1 \leq n \leq N).$$

Pseudo

Entrée : $w_1, \ldots, w_N$ contractions, K entier, m_0 un point
Sortie : attracteur de l'IFS
calculer $p_1, \ldots, p_N$
pour k de 0 jusque K
    choisir n entre 1 et N avec probabilité p_n
    calculer $m_{k+1} = w_n(m_k)$
    si $k \geq 20$ dessiner A_{k+1}

Exemple : tapis de Sierpinski ($N = 3$)

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n	p_n
1	0.5	0	0	0.5	1	1	0.33
2	0.5	0	0	0.5	1	50	0.33
3	0.5	0	0	0.5	50	50	0.34

w	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n	p_n
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.85	-0.04	0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	0.23	-0.26	0.22	0	1.6	0.07
4	-0.15	0.26	0.28	0.24	0	0.44	0.07

NB : $p_n \simeq \dfrac{|\det w_n|}{\sum_{n=1}^{N} |\det w_n|}$ (arrondie) : bon choix de probabilités.