1 Le problème

Antoine cherche à se faire embaucher. Il propose à un employeur potentiel le marché suivant :

- ▷ le premier jour, vous me paierez trois pièces ;
- ▷ le deuxième jour, vous me paierez le double du salaire du premier jour, moins deux pièces ;
- ▷ le troisième jour, vous me paierez le double du salaire du second jour, moins trois pièces ;
- ▷ ...
- ▷ le $n^{\text{ième}}$ jour, vous me paierez le double du salaire du jour précédent, moins n pièces.

L'employeur, avant d'accepter, aimerait savoir quel salaire il lui faudra débourser le $n^{\text{ième}}$ jour.
Expliciter le salaire a_n qu'il devra verser le $n^{\text{ième}}$ jour en fonction de n.

2 Changement de contrat

L'employeur, ravi du contrat, embauche Antoine quelque temps plus tard.
Antoine, arguant de l'augmentation du coût de la vie et des dettes accumulées durant ce laps de temps, demande un petit supplément avec un salaire initial de 5 pièces, l'augmentation quotidienne suivant la même loi.
L'employeur, qui sait qu'il n'employera pas Antoine plus de trois mois, accepte immédiatement. Qu'auriez vous fait à sa place ?
On explicitera le salaire b_n du jour n en fonction de n.

3 Troisième rétribution

A quelle catastrophe s'expose notre employeur s'il accepte de verser 10 pièces le premier jour ?
On nommera c_n le salaire du jour n.

4 Corrigé

4.1 $u_0 = 3$

	A	B
1	numéro jour	versement 3
2	1	3
3	2	=2*B2-A3
4	3	=2*B3-A4
5	4	=2*B4-A5
6	5	=2*B5-A6
7	6	=2*B6-A7
8	7	=2*B7-A8
9	8	=2*B8-A9
10	9	=2*B9-A10
11	10	=2*B10-A11
12	11	=2*B11-A12
13	12	=2*B12-A13
14	13	=2*B13-A14
15	14	=2*B14-A15
16	15	=2*B15-A16
17	16	=2*B16-A17

	A	B
1	numéro jour	versement 3
2	1	3
3	2	4
4	3	5
5	4	6
6	5	7
7	6	8
8	7	9
9	8	10
10	9	11
11	10	12
12	11	13
13	12	14
14	13	15
15	14	16
16	15	17
17	16	18

La relation saute aux yeux : $a_n = n + 2$

Démonstration
Pour la suite v définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = n + 2$, on a pour $n \geqslant 2$:

$$2v_{n-1} - n = 2(n - 1 + 2) - n = n + 2 = v_n$$

Ainsi v est définie par

$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_n = 2v_{n-1} - n \end{cases}$$

Les suites a et v sont donc confondues.

4.2 $u_0 = 5$

	A	B	C
1	numéro jour	versement 3	versement 5
2	1	3	5
3	2	=2*B2-A3	=2*C2-A3
4	3	=2*B3-A4	=2*C3-A4
5	4	=2*B4-A5	=2*C4-A5
6	5	=2*B5-A6	=2*C5-A6
7	6	=2*B6-A7	=2*C6-A7
8	7	=2*B7-A8	=2*C7-A8
9	8	=2*B8-A9	=2*C8-A9
10	9	=2*B9-A10	=2*C9-A10
11	10	=2*B10-A11	=2*C10-A11
12	11	=2*B11-A12	=2*C11-A12
13	12	=2*B12-A13	=2*C12-A13
14	13	=2*B13-A14	=2*C13-A14
15	14	=2*B14-A15	=2*C14-A15
16	15	=2*B15-A16	=2*C15-A16
17	16	=2*B16-A17	=2*C16-A17

	A	B	C
1	numéro jour	versement 3	versement 5
2	1	3	5
3	2	4	8
4	3	5	13
5	4	6	22
6	5	7	39
7	6	8	72
8	7	9	137
9	8	10	266
10	9	11	523
11	10	12	1036
12	11	13	2061
13	12	14	4110
14	13	15	8207
15	14	16	16400
16	15	17	32785
17	16	18	65554

De toute évidence, l'employeur sera vite ruiné.

On peut chercher à évaluer l'écart entre la nouvelle somme versée et l'ancienne :

	A	B	C	D
1	numéro jour	versement 3	versement 5	différence
2	1	3	5	2
3	2	4	8	4
4	3	5	13	8
5	4	6	22	16
6	5	7	39	32
7	6	8	72	64
8	7	9	137	128
9	8	10	266	256
10	9	11	523	512
11	10	12	1036	1024
12	11	13	2061	2048
13	12	14	4110	4096
14	13	15	8207	8192
15	14	16	16400	16384
16	15	17	32785	32768
17	16	18	65554	65536

	A	B	C	D
1	numéro jour	versement 3	versement 5	différence
2	1	3	5	=C2-B2
3	2	=2*B2-A3	=2*C2-A3	=C3-B3
4	3	=2*B3-A4	=2*C3-A4	=C4-B4
5	4	=2*B4-A5	=2*C4-A5	=C5-B5
6	5	=2*B5-A6	=2*C5-A6	=C6-B6
7	6	=2*B6-A7	=2*C6-A7	=C7-B7
8	7	=2*B7-A8	=2*C7-A8	=C8-B8
9	8	=2*B8-A9	=2*C8-A9	=C9-B9
10	9	=2*B9-A10	=2*C9-A10	=C10-B10
11	10	=2*B10-A11	=2*C10-A11	=C11-B11
12	11	=2*B11-A12	=2*C11-A12	=C12-B12
13	12	=2*B12-A13	=2*C12-A13	=C13-B13
14	13	=2*B13-A14	=2*C13-A14	=C14-B14
15	14	=2*B14-A15	=2*C14-A15	=C15-B15
16	15	=2*B15-A16	=2*C15-A16	=C16-B16
17	16	=2*B16-A17	=2*C16-A17	=C17-B17

Feuille1

On conjecture : $b_n - a_n = 2^n$.
Soit $b_n = 2^n + n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Démonstration.
On pose $v_n = 2^n + n + 2$. On a pour $n \geqslant 2$:

$$2v_{n-1} - n = 2\left(2^{n-1} + n - 1 + 2\right) - n = 2^n + n + 2 = v_n$$

La suite v étant amorcée par $v_1 = 2^1 + 1 + 2 = 5 = b_1$, les suites b et v sont identiques.

4.3 Troisième répartition

	A	B	C	D
1	numéro jour	versement 3	versement 10	différence
2	1	3	10	7
3	2	4	18	14
4	3	5	33	28
5	4	6	62	56
6	5	7	119	112
7	6	8	232	224
8	7	9	457	448
9	8	10	906	896
10	9	11	1803	1792
11	10	12	3596	3584
12	11	13	7181	7168
13	12	14	14350	14336
14	13	15	28687	28672
15	14	16	57360	57344
16	15	17	114705	114688
17	16	18	229394	229376

Le lien avec les puissances de 2 est peut être moins évident.
La croissance est toutefois visiblement du même ordre.
Il parait donc raisonnable de tester la formule de la colonne E ci-dessous :

	A	B	C	D	E
1	numéro jour	versement 3	versement 10	différence	formule diff
2	1	3	10	=C2-B2	=2^(A2-1)*(C$2-B$2)
3	2	=2*B2-A3	=2*C2-A3	=C3-B3	=2^(A3-1)*(C$2-B$2)
4	3	=2*B3-A4	=2*C3-A4	=C4-B4	=2^(A4-1)*(C$2-B$2)
5	4	=2*B4-A5	=2*C4-A5	=C5-B5	=2^(A5-1)*(C$2-B$2)
6	5	=2*B5-A6	=2*C5-A6	=C6-B6	=2^(A6-1)*(C$2-B$2)
7	6	=2*B6-A7	=2*C6-A7	=C7-B7	=2^(A7-1)*(C$2-B$2)
8	7	=2*B7-A8	=2*C7-A8	=C8-B8	=2^(A8-1)*(C$2-B$2)
9	8	=2*B8-A9	=2*C8-A9	=C9-B9	=2^(A9-1)*(C$2-B$2)
10	9	=2*B9-A10	=2*C9-A10	=C10-B10	=2^(A10-1)*(C$2-B$2)
11	10	=2*B10-A11	=2*C10-A11	=C11-B11	=2^(A11-1)*(C$2-B$2)
12	11	=2*B11-A12	=2*C11-A12	=C12-B12	=2^(A12-1)*(C$2-B$2)
13	12	=2*B12-A13	=2*C12-A13	=C13-B13	=2^(A13-1)*(C$2-B$2)
14	13	=2*B13-A14	=2*C13-A14	=C14-B14	=2^(A14-1)*(C$2-B$2)
15	14	=2*B14-A15	=2*C14-A15	=C15-B15	=2^(A15-1)*(C$2-B$2)
16	15	=2*B15-A16	=2*C15-A16	=C16-B16	=2^(A16-1)*(C$2-B$2)
17	16	=2*B16-A17	=2*C16-A17	=C17-B17	=2^(A17-1)*(C$2-B$2)

Démonstration. En se rappelant ce que l'on a obtenu avec un versement initial de 5 pièces, on peut chercher directement à établir que la suite $(c_n - a_n)$ est géométrique.

$$c_n - a_n = (2c_{n-1} - n) - (2a_{n-1} - n) = 2(c_{n-1} - a_{n-1})$$

Ainsi :

$$c_n - a_n = (c_1 - a_1) \times 2^{n-1}$$

soit :

$$c_n = 7 \times 2^{n-1} + n + 2$$

5 Autre version

On peut également, sur le modèle du sujet 001 de 2006–2007, donner un énoncé du genre :

On considère la suite (a_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} a_1 = 14 \\ \text{pour } n \geqslant 2,\ a_n = 2a_{n-1} - n^2 - n \end{cases}$$

1. A l'aide d'un tableur, représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
2. Faire une conjecture sur l'expression de a_n en fonction de n.
3. Démontrer.
4. On considère maintenant la suite (b_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

   $$\begin{cases} b_1 = 15 \\ \text{pour } n \geqslant 2,\ b_n = 2b_{n-1} - n^2 - n \end{cases}$$

   Mêmes questions.

	A	B	C
1	numéro jour	versement 14	conjecture
2	1	14	=A2^2+5*A2+8
3	2	=2*B2-A3^2-A3	=A3^2+5*A3+8
4	3	=2*B3-A4^2-A4	=A4^2+5*A4+8
5	4	=2*B4-A5^2-A5	=A5^2+5*A5+8
6	5	=2*B5-A6^2-A6	=A6^2+5*A6+8
7	6	=2*B6-A7^2-A7	=A7^2+5*A7+8
8	7	=2*B7-A8^2-A8	=A8^2+5*A8+8
9	8	=2*B8-A9^2-A9	=A9^2+5*A9+8
10	9	=2*B9-A10^2-A10	=A10^2+5*A10+8
11	10	=2*B10-A11^2-A11	=A11^2+5*A11+8
12	11	=2*B11-A12^2-A12	=A12^2+5*A12+8
13	12	=2*B12-A13^2-A13	=A13^2+5*A13+8
14	13	=2*B13-A14^2-A14	=A14^2+5*A14+8
15	14	=2*B14-A15^2-A15	=A15^2+5*A15+8
16	15	=2*B15-A16^2-A16	=A16^2+5*A16+8
17	16	=2*B16-A17^2-A17	=A17^2+5*A17+8

Avec $a_1 = 14$, on observe sur la feuille de tableur la solution $a_n = n^2 + 5n + 8$.
Avec $b_1 = 15$, la croissance explose, la différence $b_n - a_n$ observée est :

$$b_n - a_n = 2^{n-1}$$

	A	B	C	D	E
1	numéro jour	versement 14	conjecture	versement 15	différence
2	1	14	14	15	1
3	2	22	22	24	2
4	3	32	32	36	4
5	4	44	44	52	8
6	5	58	58	74	16
7	6	74	74	106	32
8	7	92	92	156	64
9	8	112	112	240	128
10	9	134	134	390	256
11	10	158	158	670	512
12	11	184	184	1208	1024
13	12	212	212	2260	2048
14	13	242	242	4338	4096
15	14	274	274	8466	8192
16	15	308	308	16692	16384
17	16	344	344	33112	32768

Avec $c_1 = 16$:

$$c_n - a_n = 2^n$$

Avec d_1 :

$$d_n = (d_1 - 14) \times 2^{n-1} + n^2 + 5n + 8$$

6 Prolongement : $a_n = ka_{n-1} + P(n)$ où P est un polynôme.

A partir de ces cas particuliers, on peut chercher à vérifier avec les élèves la propriété :

> Une relation de récurrence $u_n = ku_{n-1} + P(n)$ a une suite solution polynomiale $a_n = Q(n)$ (degré de P).
> Et pour une autre solution b, la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison k.

sur quelques exemples explicites (avec P de faible degré pour des calculs raisonnables).
Exemple.
On cherche les suites satisfaisants la relation de récurrence :

$$u_n = 3\,u_{n-1} + \sum_{i=0}^{5} a_i\,n^i$$

Avec maxima :

```
P(n):=sum(a[i]*n^i,i,0,5);
Q(n):=sum(b[j]*n^j,j,0,5);
D(n):=ratsimp(Q(n)-3*Q(n-1));
```

On obtient :

$$\begin{aligned} D(n) = &-2\,b_5\,n^5 \\ &+ (15\,b_5 - 2\,b_4)\;n^4 \\ &+ (-30\,b_5 + 12\,b_4 - 2\,b_3)\;n^3 \\ &+ (30\,b_5 - 18\,b_4 + 9\,b_3 - 2\,b_2)\;n^2 \\ &+ (-15\,b_5 + 12\,b_4 - 9\,b_3 + 6\,b_2 - 2\,b_1)\;n \\ &+ 3\,b_5 - 3\,b_4 + 3\,b_3 - 3\,b_2 + 3\,b_1 - 2\,b_0 \end{aligned}$$

Et

```
solve([coeff(D(n),n,5)=coeff(P(n),n,5), coeff(D(n),n,4)=coeff(P(n),n,4),
coeff(D(n),n,3)=coeff(P(n),n,3), coeff(D(n),n,2)=coeff(P(n),n,2),
 coeff(D(n),n,1)=coeff(P(n),n,1), coeff(D(n),n,0)=coeff(P(n),n,0)],
  [b[5],b[4],b[3],b[2],b[1],b[0]]);
```

nous donne :

$$\begin{aligned} b_5 &= -\frac{a_5}{2}, \\ b_4 &= -\frac{15\,a_5 + 2\,a_4}{4}, \\ b_3 &= -\frac{30\,a_5 + 6\,a_4 + a_3}{2}, \\ b_2 &= -\frac{165\,a_5 + 36\,a_4 + 9\,a_3 + 2\,a_2}{4}, \\ b_1 &= -\frac{150\,a_5 + 33\,a_4 + 9\,a_3 + 3\,a_2 + a_1}{2}, \\ b_0 &= -\frac{546\,a_5 + 120\,a_4 + 33\,a_3 + 12\,a_2 + 6\,a_1 + 4\,a_0}{8} \end{aligned}$$